

*На правах рукописи*

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета  
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

**Буткарев Иван Андреевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНЫХ  
ПЕРЕХОДОВ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Москва 2004

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор А.Н. Боголюбов.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор А.С. Логгинов,  
доктор физико-математических наук  
М.К. Трубецков.

Ведущая организация: Институт Математического Моделирования  
Российской Академии Наук.

Защита диссертации состоится 21 октября 2004 г. в 15 час. 00 мин. на  
заседании Диссертационного совета К 501.001.17 в Московском  
государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992,  
Москва, ГСП-2, Ленинские горы д. 1, стр. 2, МГУ, Физический факультет,  
аудитория СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета  
МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 17 сентября 2004г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

П.А. Поляков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В современной СВЧ технике, волоконной и интегральной оптике широко используются волноводы различных типов. Волноводы также входят в состав различных дискретных устройств, например, антенн, полупроводниковых лазеров, транзисторов, передатчиков. Для сопряжения волноводов используются согласующие волноводные переходы самых разных систем. Выполняя важную роль по оптимальному согласованию входного и выходного волноводов, волноводные переходы являются важными узлами волноведущей системы, в значительной степени определяющими эффективность ее функционирования. Поскольку современные волноводные переходы имеют, как правило, весьма сложную геометрию и неоднородное заполнение, то разработка эффективных численных методов их расчетов представляет собой крайне важную и актуальную проблему. Этим проблемам посвящены исследования многих авторов, в частности А.С. Беланова, А.С. Ильинского, Б.З. Каценеленбаума, Г.В. Кисунько, А.Г. Свешникова, В.П. Шестопалова и многих других. Настоящая работа посвящена математическому моделированию двух типов волноводных переходов: волноводных переходов соединяющих два металлодиэлектрических волновода с различными параметрами заполнения и разной формой поперечного сечения и волноводных переходов, соединяющих прямоугольный и планарный волноводы.

При математическом моделировании волноводных переходов рассматриваются две основные задачи: прямая задача расчета волноводного перехода и задача синтеза (математического проектирования) волноводного перехода с требуемыми техническими характеристиками. Основной проблемой при решении задачи синтеза является то, что данная задача не является корректно поставленной. Волноводные переходы с различными параметрами могут иметь одинаковые характеристики на данной частоте.

При решении задачи синтеза обычно задается допуск на требуемое значение характеристик перехода, и, кроме того, расчет волноводного перехода осуществляется с определенной погрешностью. Все это приводит к появлению множества практической эквивалентности, т.е. множества различных конфигураций волноводного перехода, любая из которых может считаться решением задачи синтеза. Для ее решения наиболее эффективным является метод регуляризации А.Н. Тихонова. В процессе решения обратной задачи синтеза возникает необходимость в многократном решении прямой задачи расчета характеристик волноводных переходов, что подразумевает наличие достаточно эффективного алгоритма решения прямой задачи. Отметим, однако, что повышение производительности современных вычислительных систем в значительной степени снижает важность требования эффективности этого алгоритма.

Учитывая существующие тенденции в развитии вычислительной техники и появление кластерных вычислительных систем, большое значение приобретает создание распараллеленных численных алгоритмов и распараллеливание уже имеющихся. Поэтому в данной работе проведено распараллеливание алгоритма метода скользящего допуска, используемого в процессе решения задачи синтеза. Распараллеливание этого алгоритма позволяет увеличить скорость решения задачи синтеза, не прибегая к распараллеливанию алгоритма решения прямой задачи вычисления характеристик волноводных переходов. Совместное применение параллельных алгоритмов решения прямой и обратной задач позволяет еще более повысить эффективность использования процессоров в кластерной вычислительной системе.

Для расчета волноведущих систем используется большое число самых различных методов. Однако, один из наиболее мощных и универсальных методов — метод конечных разностей в прямой и вариационной формулировках (метод конечных элементов) стал применяться относительно

недавно, в частности в работах А.Н. Боголюбова. В то же время этот метод имеет такое неоспоримое преимущество, как широкая универсальность, что дает возможность создавать алгоритмы расчета волноводных переходов со сложной геометрией и сложным неоднородным, возможно, анизотропным заполнением. Отметим также простоту реализации алгоритмов на основе конечно-разностного подхода, возможность проведения расчетов с высокой точностью, достаточную простоту распараллеливания. Все это позволяет строить на основе метода конечных разностей эффективные алгоритмы решения прямых задач расчета волноводных переходов, а в сочетании с методом регуляризации А.Н. Тихонова строить эффективные алгоритмы синтеза таких систем.

**Цель работы.** Целью данной работы является:

- построение алгоритма решения задачи расчета волноводного перехода, соединяющего два металлодиэлектрических волновода;
- постановка задачи синтеза волноводного перехода, соединяющего два металлодиэлектрических волновода, и построение алгоритма ее решения;
- построение алгоритма решения задачи расчета волноводного перехода, соединяющего прямоугольный и планарный волноводы;
- постановка задачи синтеза волноводного перехода, соединяющего прямоугольный и планарный волноводы, и построение алгоритма ее решения;
- распараллеливание алгоритма решения задачи синтеза волноводных переходов и исследование его эффективности;
- исследование влияния входящих ребер на точность характеристик волноводной системы, вычисленных с помощью метода конечных элементов.

**Научная новизна.** На основе единообразного подхода с использованием методов конечных разностей и конечных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова в диссертации поставлены и решены две задачи синтеза волноводного перехода. Первой задачей является задача синтеза волноводного перехода, соединяющего два соосных металлодиэлектрических волновода с различными характеристиками заполнения и различной геометрией сечения. Второй задачей является задача синтеза волноводного перехода, соединяющего прямоугольный и планарный волноводы. Для повышения скорости решения задач математического проектирования нами разработан параллельный алгоритм поиска минимума функционала на основе метода скользящего допуска. Проведено исследование эффективности применения этого метода при расчетах на кластерном компьютере. Для волноводного разветвления специального вида, имеющего входящие ребра, проведено сравнение результатов его расчета с помощью метода конечных элементов с аналитическими результатами. Кроме того, разработан специальный метод, учитывающий особенность поля на ребре, и исследовано его применение.

**Практическая ценность.** Разработаны и реализованы в виде комплекса программ эффективные алгоритмы решения задач анализа и синтеза волноводных переходов двух различных типов для соединения металлодиэлектрических волноводов и для соединения прямоугольного и планарного волноводов. Программы построены по модульной схеме, что позволяет использовать их для решения задач синтеза волноводных переходов практически любых типов. Настройка на определенный тип волноводного перехода осуществляется путем замены модуля решения прямой задачи. Проведено распараллеливание метода скользящего допуска, используемого при поиске минимума сглаживающего функционала, и написана программа для кластерного компьютера.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на конференциях «Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов 2001» и «Ломоносов 2004», научном семинаре «Численные методы электродинамики» МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессоров А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского и на симпозиуме “Inverse problems, design and optimization symposium” Рио-де-Жанейро, март 2004г.

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из 3 глав, введения, заключения и приложения. Объем работы составляет 129 страниц, включая 45 рисунков и список литературы, содержащий 83 работы.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации рассматриваются основные этапы построения алгоритма решения задачи синтеза волноводных переходов.

В первом параграфе излагается алгоритм решения прямой задачи расчета волноведущих систем. Рассматривается общая схема метода конечных элементов как проекционно-сеточная схема, реализованная на основе метода Галеркина. Рассмотрены также вопросы построения конечномерных подпространств и триангуляции области, в которой ищется решение.

Для решения задач синтеза рассматриваемых волноводных переходов применяется метод регуляризации А.Н.Тихонова. Схема этого метода применительно к задачам синтеза приводится во втором параграфе. Здесь дается общая формулировка задачи синтеза волноводного перехода, рассматривается сглаживающий функционал. Для численной реализации алгоритма минимизации сглаживающего функционала применяется метод

скользящего допуска, который базируется на методе деформируемого многогранника. Нелдер и Мид ввели в этот метод возможность ускорения поиска путем растягивания или сжатия многогранника. Метод скользящего допуска отличается от метода Нелдера и Мида по существу лишь наличием возможности поиска минимума в областях при наличии ограничений. Эти методы описаны в третьем параграфе.

Решение задачи синтеза является очень ресурсоемкой задачей и для ее решения целесообразно использовать параллельные вычислительные системы, например кластерные компьютеры, которые становятся все более доступными. В третьем разделе параграфа три первой главы приводится процедура распараллеливания метода скользящего допуска и исследуется эффективность полученного алгоритма.

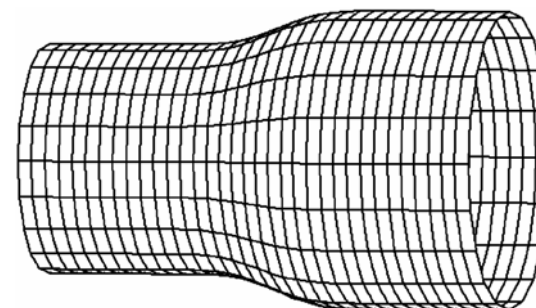


Рис. 1. Геометрия перехода между двумя соосными металлодиэлектрическими волноводами.

Вторая глава посвящена решению задачи математического проектирования волноводного перехода между двумя соосными металлодиэлектрическими волноводами, изображенного на рис. 1. В первом параграфе дается постановка задачи. Граница волноводов и перехода предполагается идеально проводящей и звездной. Диэлектрическое заполнение волноводов и перехода предполагается изотропным, может быть неоднородным и определяется функцией  $\epsilon(r, \varphi, z)$ . Решение прямой задачи расчета волноводного перехода сводится к решению системы уравнений

Максвелла в области включающей волноводный переход, причем ищется квазистационарное распределение поля. Для решения этой задачи продольные компоненты электромагнитного поля исключаются из системы уравнений Максвелла. Кроме того, проводится замена переменных  $\rho = rr_0/\eta(\varphi, z)$ , где  $r = \eta(\varphi, z)$  — функция, описывающая форму поперечного сечения волноведущей системы, которая позволяет привести область, в которой вычисляется поле, к прямому круговому цилиндру радиуса  $r_0$ . Боковые стенки волноводов и волноводного перехода считаются идеально проводящими. Задача решается в параболическом приближении, с помощью которого удастся построить устойчивый алгоритм решения задачи в прямом круговом цилиндре. Используя параболическое приближение, можно получить следующую задачу:

$$Q_1 \mathbf{Y}_z + \left(1 + (\ln \eta)_\varphi^2\right) \mathbf{Y}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi} - \frac{2}{\rho} (\ln \eta)_\varphi \mathbf{Y}_{\rho\varphi} + Q_2 \mathbf{Y}_\rho + Q_3 \mathbf{Y}_\varphi + Q_4 \mathbf{Y} = 0, \quad (1)$$

$$E_t(P) = 0, \quad P \in \Sigma, \quad (2)$$

$$\text{Начальные условия: } \mathbf{Y}|_{z=0} = \mathbf{Y}_0 - \text{заданная вектор-функция}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{Y} = (H_x, H_y, E_x, E_y)^T$ ,  $\Sigma$  — боковая поверхность,  $Q_i$  ( $i=1..4$ ) — матрицы размерности  $4 \times 4$ ,  $E_t$  — касательная компонента вектора напряженности электрического поля. В качестве начальных условий выбирается мода входного волновода. На функции  $\varepsilon$  и  $\eta$  накладывается условие гладкости второго порядка.

Во втором параграфе рассматривается постановка разностной задачи. Вводится разностная сетка

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_n : \rho_n &= \frac{h_\rho}{2} + nh_\rho, h_\rho = \frac{r_0}{N+0.5}, n = 0, \dots, N \\ \varphi_m : \varphi_m &= mh_\varphi, h_\varphi = \frac{2\pi}{M}, m = 0, \dots, M-1 \\ z_n : z_n &= nh_z, h_z = \frac{l}{N_z}, n = 0, \dots, N_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $l$  — длина перехода. Для задачи (1)-(3) строится двухслойная разностная схема с весами. Приводятся выражения для коэффициентов построенной разностной схемы. В результате разностная схема сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой позволяет определить распределение поля на следующем шаге вдоль продольной оси  $z$  волноведущей системы. Матрица полученной СЛАУ является ленточной, что позволяет построить экономичный алгоритм ее решения.

В третьем параграфе ставится задача синтеза волноводного перехода. Рассматривается синтез волноводного перехода между двумя круглыми соосными металлодиэлектрическими волноводами с однородным различным заполнением. Строится переход с круглыми поперечными сечениями с однородным по сечению заполнением, обеспечивающий заданное отношение амплитуд составляющей поля  $H_x$  в выходном и входном сечениях. Для этого необходимо определить две функции:  $\eta(z)$  и  $\varepsilon(z)$ , которые ищутся в форме кубического сплайна, состоящего из трех отрезков. Функция  $\eta(z)$  описывает геометрию волноводного перехода, а функция  $\varepsilon(z)$  — его заполнение. Использовался следующий сглаживающий функционал:

$$f^\alpha[q] = \left( T_0 - \frac{A_2[q]}{A_1} \right)^2 + \alpha \Omega[q], \quad (5)$$

где  $A_1$  — амплитуда поля  $H_x$  во входном сечении,  $A_2$  — амплитуда поля на выходе волноводного перехода,  $T_0$  — требуемое значение отношения амплитуды поля в выходном сечении перехода к амплитуде поля на входе перехода,  $q$  — набор синтезируемых параметров оптимизации,  $\alpha$  — параметр

регуляризации,  $\Omega$  — стабилизирующий функционал. В качестве набора параметров  $q$  использовались координаты шивки отрезков сплайнов: по два на функции  $\eta(z)$  и  $\varepsilon(z)$ . В качестве параметра регуляризации использовалось его квазиоптимальное значение.

В четвертом параграфе описана организация программы решения прямой и обратной задач расчета волноводного перехода. Точность алгоритма оценивалась при решении модельных задач. Кроме того, проведен расчет нескольких вариантов волноводных переходов: с круглого волновода на круглый и с круглого на овальный. В этом параграфе приведены также результаты решения задач синтеза.

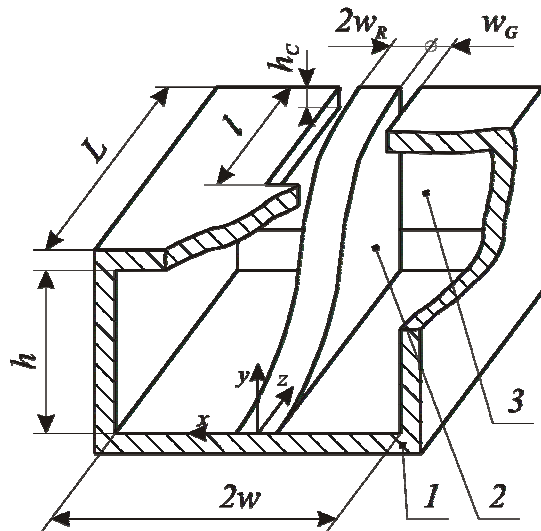


Рис. 2. Геометрия перехода между прямоугольным и планарным волноводами: 1 — входное сечение, 2 — ребро, 3 — выходное сечение.

Третья глава посвящена решению задачи математического проектирования волноводного перехода между прямоугольным и планарным волноводами изображенного на рис. 2. В первом параграфе описана геометрия перехода и дается постановка задачи: рассматривается скалярная задача расчета  $z$ -компоненты магнитного вектора Герца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad P \in D, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad P \in \partial D \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_B), \quad (7)$$

$$u = 0, \quad P \in S_B, \quad (8)$$

$$u|_{P \in S_1} = u_0(x, y, z) + \sum_n R_n \exp(-i\gamma_n^{(1)} z) \varphi_n^{(1)}(x, y), \quad (9)$$

$$u|_{P \in S_2} = \sum_n T_n \exp(i\gamma_n^{(2)} z) \varphi_n^{(2)}(x, y), \quad (10)$$

где  $S_1$  — входное сечение,  $S_2$  — выходное сечение,  $S_B$  — поверхности, имеющие отличную от нуля  $z$ -компоненту вектора нормали,  $\gamma_n^{(1,2)}$  — постоянные распространения мод прямоугольного и планарного волноводов,  $\varphi_n^{(1,2)}$  — функции сечения входного и выходного волноводов,  $u_0$  — падающее поле,  $R_n$  — амплитуды отраженных мод,  $T_n$  — амплитуды мод, возбужденных в выходном волноводе. Соотношения (9)-(10) представляют собой парциальные условия излучения. Компоненты электромагнитного поля могут быть получены по формулам:

$$\vec{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \text{rot } \vec{\Pi}^m, \quad \vec{H} = \text{rot rot } \vec{\Pi}^m, \quad (11)$$

где  $\vec{\Pi}^m = \{0, 0, u\}$ ,  $\omega$  — циклическая частота,  $c$  — скорость света,  $\mu$  — магнитная восприимчивость.

Во втором параграфе строится алгоритм решения прямой задачи расчета волноводного перехода, т.е. задачи (6)-(10). Для ее решения применяется метод конечных элементов. Сначала строится алгоритм разбиения области на тетраэдры. Затем строятся конечные элементы первого порядка. Применение метода конечных элементов производится по схеме описанной в первой главе. Во втором параграфе построен также алгоритм вычисления мод планарного волновода и приведены коэффициенты в итоговой системе линейных алгебраических уравнений. Матрица построенной СЛАУ является сильно разреженной, и для решения этой системы применялся метод минимальной степени.

Особенную сложность вызывает разбиение области на тетраэдры, т.к. переход включает в себя согласующее ребро, которое в общем случае имеет произвольную форму. Разбиение области с помощью универсальных методов получается очень мелким, что приводит к системам уравнений очень высокого порядка. Поэтому в данном случае был написан специальный алгоритм разбиения области на тетраэдры, учитывающий особенности геометрии волноводного перехода.

В третьем параграфе проводится исследование влияния различных параметров геометрии перехода на его характеристики. В данном случае имеется возможность изменять следующие параметры:  $L$ ,  $l$  (рис. 2) и профиль согласующего ребра. Было установлено, что параметры  $L$  и  $l$  практически не влияют на характеристики волноводного перехода, которые в основном определяются формой профиля ребра. В соответствии с этими результатами, в четвертом параграфе ставится задача синтеза как поиск такого профиля ребра  $f_{pr}$ , который обеспечивает заданный коэффициент отражения  $R_0$  у рассматриваемого волноводного перехода:

$$f^\alpha [f_{pr}] = (R[f_{pr}] - R_0)^2 + \alpha \Omega[f_{pr}], \quad (12)$$

где  $R$  — коэффициент отражения по энергии. При этом профиль ребра ищется в классе кусочно-линейных функций состоящих из трех отрезков, что дает 4 параметра оптимизации  $q$  — координаты точек излома, которые и требуется синтезировать. В сглаживающем функционале (12) использовалось квазиоптимальное значение параметра регуляризации  $\alpha$ . Решением задачи синтеза является профиль ребра, обеспечивающий минимум сглаживающего функционала в заданном классе решений и для данного параметра регуляризации.

В пятом параграфе приводятся результаты решения задачи оптимизации. При этом выбор квазиоптимального значения параметра регуляризации осуществлялся следующим образом: для различных значений

параметра  $\alpha$  численно вычислялось выражение  $\left\| \alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha} \right\|$ , и выбирался

локальный минимум этого выражения по  $\alpha$  наиболее близкий к 0. Заметим, что более точное вычисление параметра регуляризации сопряжено с большими вычислительными затратами.

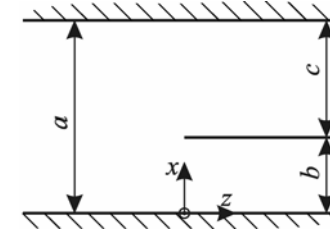


Рис. 3. Разветвление двухмерного волновода.

В шестом параграфе проводится исследование точности метода конечных элементов при наличии входящих ребер в двумерном случае. Исследование проводилось на примере разветвления двухмерного волновода (рис. 3). При этом сравниваются аналитические результаты, приведенные в работе Р. Миттры и С. Ли, результаты, полученные с помощью метода конечных элементов, и результаты, полученные с помощью метода конечных элементов при специальном учете условий на ребре. Математическая постановка задачи относительно  $y$ -компоненты напряженности электрического поля  $E_y$  выглядит следующим образом:

$$\Delta E_y + k^2 E_y = 0, \quad P \in \Omega, \quad (13)$$

$$E_y = 0, \quad P \in \partial\Omega \setminus (S_a \cup S_b \cup S_c), \quad (14)$$

$$E_y|_{P \in S_a} = E_y^0(x, z) + \sum_n R_n \exp(-i\gamma_n^{(1)} z) \varphi_n^{(1)}(x), \quad (15)$$

$$E_y|_{P \in S_b} = \sum_n T_n^{(2)} \exp(i\gamma_n^{(2)} z) \varphi_n^{(2)}(x), \quad (16)$$

$$E_y|_{P \in S_c} = \sum_n T_n^{(3)} \exp(i\gamma_n^{(3)} z) \varphi_n^{(3)}(x), \quad (17)$$

где  $S_a$  — входное сечение,  $S_b$  и  $S_c$  — выходные сечения двух волноводов,  $\gamma_n^{(1,2,3)}$  — постоянные распространения мод соответствующих волноводов,  $\varphi_n^{(1,2,3)}$  — функции сечения входного и выходных волноводов,  $E_y^0$  — поле, падающее из входного волновода,  $R_n$  — амплитуды отраженных мод,  $T_n^{(2,3)}$  — амплитуды мод, возбужденных в выходных волноводах. Было установлено, что модули амплитуд коэффициентов отражения и пропускания в случаях, учитывающих условия на ребре и не учитывающих, практически совпадают и лишь на очень грубой сетке заметны различия. В сравнении с аналитическими результатами модули амплитуд этих коэффициентов на низкой частоте хорошо совпадают, а с ростом частоты начинается постепенное расхождение. Наибольший эффект учет условий на ребре при применении метода конечных элементов дает для аппроксимации фазы коэффициентов отражения и пропускания мод волноводов. Фаза коэффициентов вычисленных с учетом условий на ребре заметно ближе к аналитическим результатам, чем в случае, не учитывающем эти условия.

В заключении даются основные результаты работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Разработана общая схема решения задачи математического проектирования волноводных переходов с использованием метода конечных разностей в прямой и вариационной (метод конечных элементов) постановках, метода регуляризации А.Н. Тихонова и процедуры распараллеливания.
- Разработан и реализован алгоритм решения прямой задачи расчета волноводного перехода между двумя соосными металлодиэлектрическими волноводами.
- Поставлена и решена обратная задача синтеза волноводного перехода между соосными металлодиэлектрическими волноводами.

- Разработан и реализован алгоритм решения прямой задачи расчета волноводного перехода между прямоугольным и планарным волноводами.
- Поставлена и решена обратная задача синтеза волноводного перехода между прямоугольным и планарным волноводами.
- Исследована точность метода конечных элементов при расчете волноводных систем имеющих входящие ребра.
- Проведено распараллеливание алгоритма минимизации по методу скользящего допуска.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Буткарев И.А. Синтез трехмерного волноводного перехода // Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2001». Секция «Физика». Сборник тезисов. М.: Физич. ф-т МГУ. 2001. С. 70-71.
2. Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. Синтез трехмерного волноводного перехода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2002. № 2. С. 3-5.
3. Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. Применение метода конечных элементов к исследованию волноводного перехода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2003. № 4. С. 6-9.
4. Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. Математическое проектирование трехмерных волноводных переходов // Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал <http://jre.cplire.ru>). 2003. № 12.
5. Буткарев И.А. Синтез перехода между прямоугольным и копланарным волноводами // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2004». Секция «Физика». Сборник тезисов. М.: Физич. ф-т МГУ. 2004. С. 144-146.