На правах рукописи

УДК 519.6

ДОРОФЕЕВ КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ ПРИ УСЛОВИИ ИСТОКООБРАЗНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНТНОЙ МИКРОТОМОГРАФИИ

Специальность 05.13.18

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва

2003

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:
-доктор физико-математических наук, профессор А. Г. Ягола.

Официальные оппоненты:
-доктор физико-математических наук И. В. Кочиков,
-доктор физико-математических наук, профессор М. Н. Филиппов.

Ведущая организация: Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).

Защита диссертации состоится "___"_______2004 г. на заседании диссертационного совета К 501.001.17 Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в___час.___мин. по адресу: 119992, г. Москва, Воробьевы горы, МГУ, Физический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического факультета МГУ.

Автореферат разослан "___"_______2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 501.001.17
доктор физико-математических наук П. А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются как линейные, так и нелинейные задачи, характеризующиеся тем, что их решение неустойчиво к сколь угодно малым возмущениям исходных данных, так называемые некорректно поставленные задачи. Такие задачи возникают во многих областях науки и техники. При этом часто заранее известны некоторые свойства решения, т.е. имеется некоторая априорная информация о решении. Поэтому, и с теоретической, и с практической точки зрения, представляют интерес вопросы построения и изучения свойств алгоритмов, учитывающих ту или иную априорную информацию о решении. В работе предложены алгоритмы решения некорректно поставленных задач при условии истокообразной представимости точного решения с помощью вполне непрерывного оператора, доказано, что предложенные алгоритмы являются регуляризирующими по Тихонову, а также установлены и обоснованы их некоторые свойства. Предложенный алгоритм численно реализован и применен к решению задачи катодолюминесцентной микротомографии.

После основополагающих работ А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева теория некорректных задач привлекала внимание многих исследователей: В.Я. Арсенина, А.Б. Бакушинского, Г.М. Вайникко, В.В. Васина, А.В. Гончарского, А.С. Леонова, В.А. Морозова, В.П. Тананы, А.Г. Яголы, H.W. Engl, C.W. Groetsch, и многих др.

На практике при решении задач важен не только вопрос приближенного нахождения решения некорректно поставленной задачи, но и вопрос о точности найденного приближения. Для некорректно поставленных задач невозможно найти точность полученного решения, но иногда, при сильных априорных предположениях о решении возможно построение, так называемой, апостериорной оценки погрешности. В любом случае, при решении некорректно поставленных задач следует использовать всю имеющуюся априорную информацию. В данной работе предлагается алгоритм, использующий априорную информацию о том, что точное решение принадлежит истокопредставимому с помощью вполне непрерывного оператора множеству, допускающий апостериорную оценку погрешности и являющийся оптимальным по порядку точности на специальном классе задач. Алгоритм предложен как для линейных, так и для нелинейных задач, для случаев точно и приближенно заданных операторов.

В современных оптоэлектронных приборах, например, таких, как светодиоды и полупроводниковые лазеры, существенную роль играют процессы излучательной рекомбинации, при которых происходит генерация световых квантов. Такие полупроводниковые структуры состоят из эпитаксиальных слоев малой толщины. В этих структурах эффективность излучательной рекомбинации зависит от наличия структурных дефектов, которые обычно распределены по слоям неоднородно, что приводит к неоднородному распределению излучательных характеристик. Режим катодолюминесценции в растровой электронной микроскопии позволяет контролировать распределение излучательных характеристик на микроуровне и, как следствие, внутреннюю микроструктуру объекта и является незаменимым при исследовании таких структур. В диссертации разработан альтернативный существующим метод, обладающий повышенным пространственным разрешением, что особенно важно в связи с активным развитием полупроводниковой оптоэлектроники и необходимостью контроля микронных и субмикронных полупроводниковых эпитаксиальных слоев. Эффективность метода подтверждена модельными расчетами.

Целью работы является разработка алгоритмов решения некорректно поставленных задач при условии истокопредставимости точного решения с помощью вполне непрерывного оператора, как для линейных, так и нелинейных задач**,** численная реализация предложенных алгоритмов и их применение для решения задачи катодолюминесцентной микротомографии.

Методика исследования базируется на основных фактах теории решения некорректно поставленных задач, функционального анализа, теории линейных операторов, методов решения экстремальных задач.

Научная новизна и практическая значимость. Разработанные в работе алгоритмы решения некорректно поставленных задач могут быть использованы для решения различных классов прикладных задач, включая нелинейные. Метод решения задачи катодолюминесцентной микротомографии с помощью предложенного алгоритма может быть использован для определения и визуализации внутренней микроструктуры оптоэлектронных структур. Ожидается улучшение пространственного разрешения (по глубине и латерально) в несколько раз, что необходимо в связи с бурным развитием нанотехнологий и микроскопии.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математики физического факультета МГУ, семинаре "Обратные задачи математической физики" под руководством проф. Яголы А.Г, проф. Бакушинского А.Б. и проф. Тихонравова А.В., на конференциях «Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-99». Москва, физический факультет МГУ, 21 апреля 1999 года», «Обратные и некорректно поставленные задачи. Москва, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 20-21 июня 2000 года», «Ill-posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis, September 11-15, 2000 , Самарканд, 2000», «Fast solution of discretized optimization problems" (WIAS Berlin, May 8-12, 2000)», «ECMI 2002. 12th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry. Jurmala, Latvia, September 10-14, 2002», «International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics (ISIP2003), Nagano, Japan, 18-21 February 2003».

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ, одна работа находится в печати. Список работ приведен в конце автореферата. Соавторы участвовали в постановках задач и обсуждении результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем работы - 122 страницы. Список литературы содержит 110 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы работы, приведен обзор известных результатов по теме исследования и дано краткое описание содержания диссертации по главам.

В первой главе рассматривается операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{1}$$

где Z, U -нормированные пространства, $A: Z \to U$ -линейный ограниченный инъективный оператор с областью значений $R(A)$.

Уравнение (1) имеет решение $\bar{z} \in Z$ для правой части из области значения рассматриваемого оператора $\bar{u} \in R(A)$. Рассматриваемая задача может оказаться некорректно поставленной, например, в случае, когда оператор A вполне непрерывный[1].

В §1 главы 1 рассматривается случай точно заданных операторов. Требуется найти устойчивое приближение к точному решению $\bar{z}$ по заданным приближенному значению правой части уравнения (1) u_δ и погрешности его задания δ. Элемент u_δ такой, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$. Таким образом, по данным $\{u_\delta, \delta\}$ требуется построить приближенное решение, то есть элемент $z_\delta \in Z$, такой что $\|z_\delta - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть известна следующая априорная информация о точном решении $\bar{z} \in Z$:

$$\bar{z} = B\bar{v}, \tag{2}$$

где B-линейный инъективный вполне непрерывный оператор, действующий из нормированного пространства V в Z. Предлагается следующий алгоритм приближенного решения уравнения (1) с априорной информацией (2) [1-5]:

1. Положим $n = 1$;

2. Определим множество Z_n как

$$Z_n = \{z \in Z : z = Bv, v \in V, \|v\| \le n\};$$

3. Минимизируем невязку $F(z) = \|Az - u_\delta\|$ на множестве Z_n;

4. Если

$$\min\{\|Az - u_\delta\| : z \in Z_n\} \le \delta,$$

[1] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

то решение найдено. Обозначим $n(\delta)=n$, а в качестве приближенного решения уравнения (1) с априорной информацией (2), которое обозначим как $z_{n(\delta)}$, возьмем произвольное решение неравенства

$$\|Az-u_\delta\|\le\delta,\quad z\in Z_{n(\delta)}; \tag{3}$$

5. В противном случае изменяем n на $n+1$ и повторяем процесс.

Теорема 1.1. [1,2] *Предложенный метод сходится* $n(\delta)<+\infty$. *Существует* $\delta_0>0$ *(зависящее, вообще говоря, от неизвестного решения* $\bar z$*) такое, что* $n(\delta)=n(\delta_0)$ *для любого* $0<\delta\le\delta_0$. *Приближенные решения* $z_{n(\delta)}$ *сходятся к* $\bar z$ *при* $\delta\to 0$.

Замечание. Предложенный выше метод является вариантом метода расширяющихся компактов, предложенного впервые в работе[2].

Теорема 1.2. [1,2] *Для предложенного выше метода существует апостериорная оценка погрешности. Это означает, что существует функционал* $\Delta(\delta,u_\delta)$ *такой, что* $\Delta(\delta,u_\delta)\to 0$ *при* $\delta\to 0$ *,и* $\|z_{n(\delta)}-\bar z\|\le\Delta(\delta,u_\delta)$, *по крайней мере для всех достаточно малых положительных* δ.

Замечание. В доказательстве Теоремы 1.2 показано, что в качестве апостериорной оценки погрешности решения достаточно взять функционал:

$$\Delta(\delta,u_\delta)=\max\{\|z-z_{n(\delta)}\|: z\in Z_{n(\delta)}, \|Az-u_\delta\|\le\delta\}. \tag{4}$$

Замечание. Определение апостериорной оценки погрешности для некорректно поставленных задач было введено в работе[3].

[2] Домбровская И.Н., Иванов В.К. К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах // Сиб. мат. журн., 1965, т.6, №3, с.499-508.

Результат Теоремы 1.2, утверждающей существование апостериорной оценки погрешности, может быть получен из работы[3], т.к. если рассмотреть пространство истокообразно представимых с помощью оператора B решений (1) $\overline{Z} \in Z$, тогда $\overline{Z}$-σ-компакт, потому что $\overline{Z}$-объединение счетного числа компактов Z_n.

Замечание. Вычисление апостериорной оценки погрешности для уравнения (1) возможно, в принципе, при его решении с помощью метода расширяющихся компактов. Следует подчеркнуть, что апостериорная оценка погрешности является верхней оценкой погрешности приближенного решения только для $\delta: 0 < \delta \le \delta_0$, где δ_0 зависит от неизвестного точного решения $\bar{z}$.

В §2 главы 1 показаны особые свойства предложенного алгоритма. Рассматривается метод расширяющихся компактов в случае: Z, U-гильбертовы пространства, $V = Z, A$-вполне непрерывный линейный инъективный оператор, действующий из Z в U, $B = (A^* A)^{p/2}$, $p = const > 0$, $p - задано$. Во многих публикациях, например[4], посвященных сходимости регуляризующих алгоритмов, такая истокообразная представимость рассматривается для сравнения различных алгоритмов.

Теорема 1.3. [2,3] *Метод расширяющихся компактов в случае: Z, U-гильбертовы пространства, $V = Z, A$-линейный компактный инъективный оператор, действующий из Z в U, $B = (A^* A)^{p/2}$, оптимальный по порядку точности регуляризирующий алгоритм, допускающий апостериорную оценку погрешности.*

---

[3] Винокуров В.А., Гапоненко Ю.Л. Апостериорные оценки решений некорректных обратных задач // ДАН СССР, 1982, т.263, №2, с.277-280.

[4] Engl, H.W., Hanke, M., and Neubauer, A. Regularization of Inverse Problems, Kluwer, Dordecht, 1996.

В §3 главы 1 рассматриваются случаи операторов, заданных с ошибками, а именно:

1. оператор A задан с ошибкой, оператор B задан точно;
2. оператор A задан точно, оператор B задан с ошибкой;
3. операторы A и B заданы с ошибками.

Для всех случаев предложены алгоритмы решения уравнения (1) с априорной информацией (2), доказаны теоремы, утверждающие, что данные алгоритмы являются регуляризирующими по Тихонову и допускают апостериорные оценки погрешности, получены выражения для данных оценок погрешностей.

Для краткости изложения приведем результаты, полученные для случая 3.

Пусть операторы A и B заданы с ошибками, а V-рефлексивное банахово пространство. Вместо точных данных задачи операторов A, B и правой части уравнения (1) $\bar{u}$, известны приближенные данные $\{A_{h_1}, B_{h_2}, u_\delta\}$ и ошибки их задания $\{h_1, h_2, \delta\}$. Здесь $A_{h_1}: Z \to U$-линейный ограниченный оператор, такой что $\|A - A_{h_1}\| \le h_1$, $B_{h_2}: V \to Z$-линейный вполне непрерывный инъективный оператор, такой что $\|B - B_{h_2}\| \le h_2$, $h_1 \ge 0$, $h_2 \ge 0$. Элемент $u_\delta \in U$-приближенно заданная правая часть уравнения (1) такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$. Таким образом, по данным $\{A_{h_1}, B_{h_2}, u_\delta, h_1, h_2, \delta\}$ требуется построить элемент $z_\eta \in Z, \eta \overset{def}{=} (h_1, h_2, \delta)$, такой что $\|z_\eta - \bar{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$.

Предлагается следующий алгоритм приближенного решения уравнения (1) с априорной информацией (2) для случая 3 [3]:

1. Положим $n = 1$;

2. Определим множество Z_{n,h_2} как

$$Z_{n,h_2} = \{z \in Z : z = B_{h_2} v, v \in V, \|v\| \le n\}; \qquad (5)$$

3. Минимизируем невязку $F(z) = \|A_{h_1} z - u_\delta\|$ на множестве Z_{n,h_2};

4. Если

$$\min\{\|A_{h_1} z - u_\delta\| : z \in Z_{n,h_2}\} \le \delta + (h_1\|B_{h_2}\| + h_2\|A_{h_1}\| + h_1 h_2)n,$$

то решение найдено. Обозначим $n(\delta, h_1, h_2) = n$, а в качестве приближенного решения уравнения (1) с априорной информацией (2), которое обозначим, как $z_{n(\delta,h_1,h_2)}$, возьмем произвольное решение неравенства

$$\|A_{h_1} z - u_\delta\| \le \delta + (h_1\|B_{h_2}\| + h_2\|A_{h_1}\| + h_1 h_2)n, \quad z \in Z_{n(\delta,h_1,h_2),h_2}; \qquad (6)$$

5. В противном случае изменяем n на $n+1$ и повторяем процесс.

Теорема 1.6. [3] *Для сформулированного выше алгоритма* $n(\delta, h_1, h_2) < +\infty$. *Приближенные решения* $z_{n(\delta,h_1,h_2)}$ *сходятся к точному решению уравнения (1)* $\bar{z}$ *при* $\delta, h_1, h_2 \to 0$. *Существует апостериорная оценка погрешности* $\Delta(\delta, h_1, h_2, u_\delta, A_{h_1}, B_{h_2})$ *такая, что* $\Delta(\delta, h_1, h_2, u_\delta, A_{h_1}, B_{h_2}) \to 0$ *при* $\delta, h_1, h_2 \to 0$, *и* $\|z_{n(\delta,h_1,h_2)} - \bar{z}\| \le \Delta(\delta, h_1, h_2, u_\delta, A_{h_1}, B_{h_2})$, *по крайней мере для достаточно малых положительных* δ *и неотрицательных* h_1, h_2.

Замечание. В доказательстве Теоремы 1.6 показано, что в качестве апостериорной оценки погрешности решения достаточно взять функционал:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\delta, h_1, h_2, u_\delta, A_{h_1}, B_{h_2}) \\
&\quad = \max\{\|z - z_{n(\delta,h_1,h_2)}\| : z \in Z_{n(\delta,h_1,h_2),h_2}, \|Az - u_\delta\| \\
&\quad \le \delta + (h_1\|B_{h_2}\| + h_2\|A_{h_1}\| + h_1 h_2) n(\delta, h_1, h_2)\} + h_2 n(\delta, h_1, h_2).
\end{aligned} \qquad (7)$$

Замечание. В предлагаемом методе не обязательно, чтобы компакты "расширялись" вокруг нуля. Они могут "расширяться" вокруг Bv_0, где v_0-любой априори заданный элемент.

Замечание. В определении множеств Z_n, вместо последовательности положительных целых n, можно взять последовательность положительных чисел R_n, подчиненных условию: $0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots$ и $R_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

В §4 главы 1 установлена связь метода расширяющихся компактов и метода регуляризации Тихонова с выбором параметра регуляризации по принципу невязки.

В §5 главы 1 справедливость доказанных утверждений подтверждена модельными расчетами для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Во второй главе рассматривается операторное уравнение (1) при наличии априорной информации (2) о решении в предположениях: оператор $A: Z \to U$-(не)линейный непрерывный инъективный оператор с областью значений $R(A)$, B-инъективный вполне непрерывный[5] оператор, действующий из пространства V в Z. Рассматривались случаи как точно (§1), так и приближенно (§2) заданных операторов. Для краткости изложения приведем результаты, полученные для случая, когда оба оператора A и B известны с ошибками.

Пусть Z, U-нормированные пространства, а V-рефлексивное банахово пространство, B-усиленно непрерывный оператор, действующий из пространства V в Z. Вместо точных данных задачи-операторов A и B и правой части уравнения (1) $\bar{u}$, известны

[5] Под понятием вполне непрерывный оператор здесь и в дальнейшем будем понимать компактный и непрерывный оператор.

приближенные данные $\{A_{h_1}, B_{h_2}, u_\delta\}$ и ошибки задания данных $\{h_1, h_2, \delta\}$. Здесь $A_{h_1}: Z \to U$-непрерывный оператор, имеющий непрерывную сильную производную на пространстве Z, $A'_{h_1}(z)$-зависит непрерывно от z в равномерной операторной топологии, $\|Az - A_{h_1}z\| \le \psi_A(h_1, \|z\|)$, существует $\sup_{z\in Z}\|A'_{h_1}(z)\|$, $B_{h_2}: V \to Z$ усиленно непрерывный инъективный оператор (следует заметить, что B и B_{h_2}-компактные операторы), такой, что $\|Bv - B_{h_2}v\| \le \psi_B(h_2, \|v\|)$. Элемент $u_\delta \in U$-приближенно заданная правая часть уравнения (1), такая что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$. Ошибки задания входных данных $\{h_1, h_2, \delta\}$ и функции ψ_A, ψ_B предполагаются известными, $\psi_A(h, y), \psi_B(h, y)$-непрерывные функции своих аргументов при $h \ge 0, y \ge 0$, монотонно неубывающие по первому аргументу, $\psi_A(h, y), \psi_B(h, y) \to 0$ равномерно по y на любом сегменте $[0, C], C \ge 0$, при $h \to 0$.

Таким образом, по данным $\{A_{h_1}, B_{h_2}, u_\delta, \psi_A, \psi_B, h_1, h_2, \delta\}$ требуется построить элемент $z_\eta \in Z, \eta \overset{def}{=} (h_1, h_2, \delta)$, такой что $\|z_\eta - \bar{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$.

Предлагается следующий алгоритм приближенного решения уравнения (1) с априорной информацией (2) для случая 3 [13]:

1. Положим $n = 1$;

2. Определим множество Z_{n,h_2}, как

$$Z_{n,h_2} = \{z \in Z : z = B_{h_2}v, v \in V, \|v\| \le n\};$$

3. Минимизируем невязку $F(z) = \|A_{h_1}z - u_\delta\|$ на множестве Z_{n,h_2};

4. Если

$$\begin{aligned}\min\{\|A_{h_1}z - u_\delta\| : z \in Z_{n,h_2}\} &\le \delta + C_1(h_1, h_2, v)C_2(h_2, v) \\ &+ C_3(h_1, h_2, v), \quad z = B_{h_2}v,\end{aligned}$$

где

$$C_1(h_1,h_2,v)=\sup_{z\in R(B_{h_2}v,\psi_B(h_2,\|v\|))}\|A'_{h_1}(z)\|,$$
$$C_2(h_2,v)=\psi_B(h_2,\|v\|),$$
$$C_3(h_1,h_2,v)=\max_{\|B_{h_2}v\|-\psi_B(h_2,\|v\|)\le t\le\|B_{h_2}v\|+\psi_B(h_2,\|v\|)}\psi_A(h_1,t),$$

$R(B_{h_2}v,\psi_B(h_2,\|v\|))$-шар с центром в точке $B_{h_2}v$ и радиусом $\psi_B(h_2,\|v\|)$,

то решение найдено. Обозначим $n(\delta,h_1,h_2)=n$, а в качестве приближенного решения уравнения (1) с априорной информацией (2), которое обозначим как $z_{n(\delta,h_1,h_2)}$, возьмем произвольное решение неравенства

$$\|A_{h_1}z-u_\delta\|\le\delta+C_1(h_1,h_2,v)C_2(h_2,v),\quad z\in Z_{n(\delta,h_1,h_2),h_2}; \qquad (8)$$

5. В противном случае изменяем n на $n+1$ и повторяем процесс.

Теорема 2.5. [13] *Для сформулированного выше алгоритма* $n(\delta,h_1,h_2)<+\infty$. *Приближенные решения* $z_{n(\delta,h_1,h_2)}$ *сходятся к точному решению уравнения (1)* $\bar{z}$ *при* $\delta,h_1,h_2\to 0$. *Существует апостериорная оценка погрешности* $\Delta(\delta,h_1,h_2,u_\delta,A_{h_1},B_{h_2})$ *такая, что* $\Delta(\delta,h_1,h_2,u_\delta,A_{h_1},B_{h_2})\to 0$ *при* $\delta,h_1,h_2\to 0$, *и* $\|z_{n(\delta,h_1,h_2)}-\bar{z}\|\le\Delta(\delta,h_1,h_2,u_\delta,A_{h_1},B_{h_2})$, *по крайней мере для достаточно малых положительных* δ,h_1,h_2.

Замечание. В доказательстве Теоремы 2.5 показано, что в качестве апостериорной оценки погрешности решения достаточно взять функционал:

$$\Delta(\delta,h_1,h_2,u_\delta,A_{h_1},B_{h_2})=\max\{\|z-z_{n(\delta,h_1,h_2)}\|:z\in Z_{n(\delta,h_1,h_2),h_2},$$
$$\|A_{h_1}z-u_\delta\|\le\delta+C_1(h_1,h_2,v_{n(\delta,h_1,h_2)})C_2(h_2,v_{n(\delta,h_1,h_2)})+C_3(h_1,h_2,v_{n(\delta,h_1,h_2)})\} \qquad (9)$$
$$+C_2(h_2,v_{n(\delta,h_1,h_2)}).$$

В третьей главе решается задача катодолюминесцентной микротомографии.

В §1 главы 3 производится анализ существующих методов 3-х мерной катодолюминесценции и отмечается необходимость разработки нового метода с повышенным пространственным разрешением.

В §2 главы 3 приводится схема установки и описание поставленной задачи. Сфокусированный электронный зонд (e.b.) при его взаимодействии с катодолюминесцентным материалом вызывает свечение в микрообъеме с характерными размерами в единицы микрометров. Эмитированное излучение из образца, расположенного в области первого фокуса F_1 полуэллипсоидального зеркала, собирается во второй фокальной точке F_2 эллипсоида вращения, где регистрируется фотодетектором P.D, рис. 1.

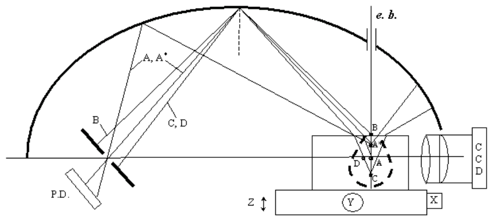

Рис. 1. Схема установки.

В §3 главы 3 приводится математическая модель для распределения неравновесных носителей и интенсивности катодолюминесцентной эмиссии.

В §4 главы 3 рассматривается фокусировка и пространственная дискретизация оптических лучей с помощью зеркального эллипсоида вращения и рассчитывается ход лучей в нем, с учетом преломления на границе объект - вакуум.

В §5 главы 3 приводятся результаты численного моделирования и их анализ, на основе которого предложена схема проведения эксперимента: предлагается механически сканировать образец относительно неподвижного электронного зонда в различных горизонтальных плоскостях, измеряя при этом интенсивность излучения, попавшего на фотодетектор, рис.2.

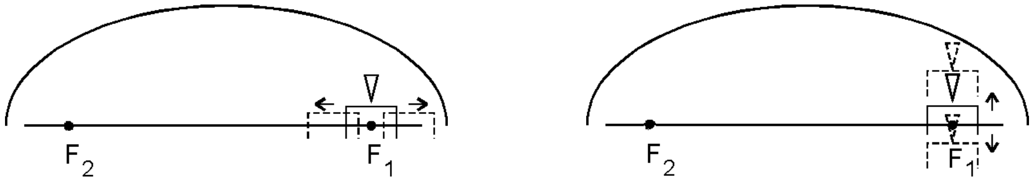

Рис. 2. Схема эксперимента.

В §6 главы 3 решается обратная задача катодолюминесцентной микротомографии.

В п. 6.1 приводится математическая постановка обратной задачи катодолюминесцентной микротомографии. Требуется определить значение квантового выхода $\eta(s), s \in [0, R_0]$ из интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$I(x) = \int_0^{R_0} K_1(x,s)\eta(s)ds, \qquad (10)$$

где x-смещение объекта по вертикальной оси по отношению к зеркалу, $I(x)$-интенсивность излучения, попавшего на фотодетектор, как функция смещения объекта по вертикальной оси, s-расстояние по вертикальной оси вглубь от поверхности объекта, R_0-максимальная глубина проникновения электронов в объект, $K_1(x,s)$-ядро интегрального уравнения, непрерывная функция своих аргументов, вычисленная при моделировании хода лучей в системе.

Целесообразно рассматривать данное уравнение в следующих функциональных пространствах:

$$I(x) \in L_2[x_{\min}, x_{\max}],\ \eta(s) \in L_2[0, R_0],$$

где $x_{\min}, x_{\max}$-минимальное и максимальное смещение объекта по вертикальной оси в процессе эксперимента.

В рассматриваемых функциональных пространствах данное уравнение является некорректно поставленной задачей. Это означает, что небольшие отклонения в измерениях интенсивности, которая измеряется с некоторой погрешностью, могут привести к сколь угодно большим отклонениям в решении уравнения.

Будем считать заданной следующую априорную информацию - решение задачи истокообразно представимо с помощью следующего интегрального оператора:

$$\eta(s) = \int_0^{R_0} K_2(s,\xi)\eta_0(\xi)d\xi,\ s \in [0, R_0], \tag{11}$$

где

$$K_2(s,\xi) = \begin{cases} \cos((s-\xi)1/2*\pi/2), |s-\xi| \le 2, \\ 0,\ \textit{в противном случае}. \end{cases} \tag{12}$$

Функция $\eta_0(s)$ рассматривается как элемент функционального пространства $L_2[0,R_0]$: $\eta_0(s) \in L_2[0,R_0]$.

В п. 6.2 описывается метод решения обратной задачи катодолюминесцентной микротомографии с помощью предложенного в главе 1 алгоритма.

В п. 6.3 приводятся результаты модельных расчетов, на основе которых анализируются возможности предложенного метода. Получено не только решение задачи, но и важная для практики апостериорная оценка погрешности решения. Полученные результаты представлены графически.

На рис.3 приводятся результаты расчета для функции $\eta_0(s) = \begin{cases} 0.4, & s \in (4,5) \\ 0.2, & \textit{в противном случае} \end{cases}$ и ошибки $\delta = 10$. Рассчитывались: радиус компакта $n(\delta)$, точное решение $\eta_e(s)$, приближенное решение $\eta_c(s)$, функции $\eta_l(s)$, $\eta_u(s)$, ограничивающие область принадлежности точного решения снизу и сверху, соответственно, апостериорная оценка погрешности $\Delta(\delta, I_\delta)$, $\|\eta_e(s)-\eta_c(s)\|_{L_2}$, (% от $\|\eta_e\|_{L_2}$), где $I_\delta : \|I_\delta(x)-I(x)\|_{L_2[x_{\min},x_{\max}]} \le \delta$. Получены результаты:

$$n(\delta)=1,\ \|\eta_e\|_{L_2}=1.5149,\ \Delta(\delta, I_\delta)=0.3722\,(24.57\%),$$
$$\|\eta_e(s)-\eta_c(s)\|_{L_2}=0.0438\,(2.89\%)\quad (\%\text{ от } \|\eta_e\|_{L_2}).$$

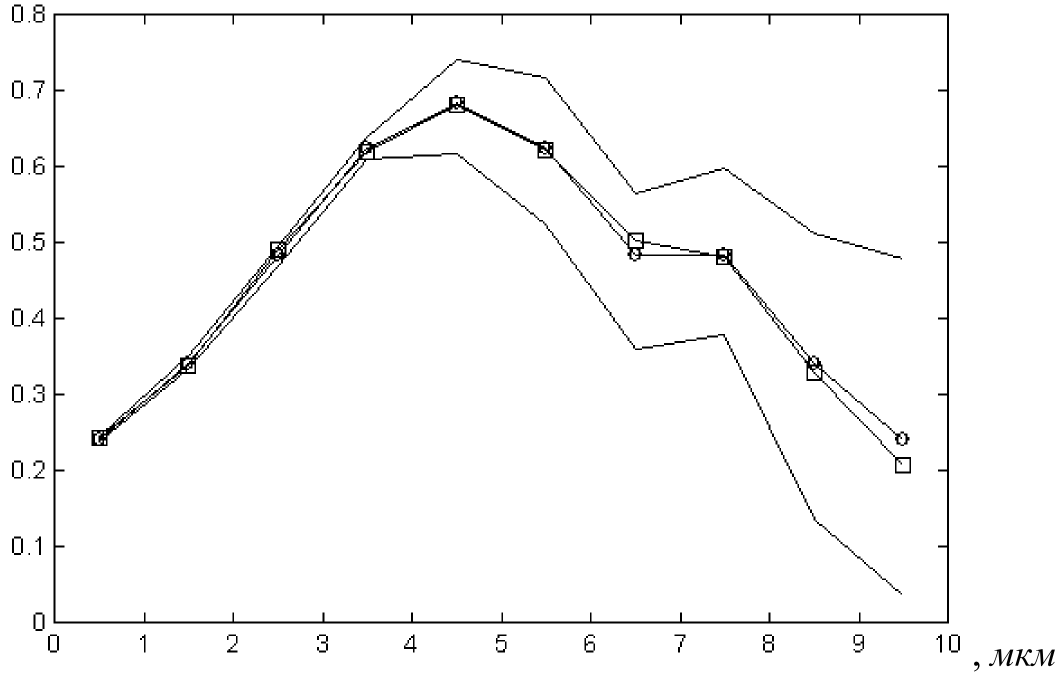

Рис. 3. Точное $\eta_e(s)$ (круги) и приближенное $\eta_c(s)$ (квадраты) решения и область, которой они принадлежат.

В п. 6.4 рассматривается вопрос о существовании апостериорной оценки погрешности в несколько иных функциональных пространствах, а именно, когда $I(x)\in C[x_{\min},x_{\max}]$, $\eta(s)\in C[0,R_0]$, $\eta_0(s)\in W_2^1[0,R_0]$. Показано, что и в этом случае при решении задачи с помощью предложенного алгоритма существует апостериорная оценка погрешности.

В приложении приводится краткое описание и тексты программного комплекса, созданного диссертантом для проведения расчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Построен алгоритм решения линейных операторных уравнений при условии истокообразной представимости точного решения с помощью вполне непрерывного оператора, как в случае точно заданных операторов, так и в случае операторов, заданных с ошибками.
- Доказано, что предложенный алгоритм является оптимальным по порядку точности методом и допускает апостериорную оценку погрешности. Получены выражения для данных оценок погрешностей.
- Полученные результаты перенесены на случай нелинейных операторов.
- Решена прямая задача катодолюминесцентной микротомографии. Смоделирован световой транспорт в конфокальной системе, с учетом преломления на границе объект - вакуум.
- На основе результатов, полученных при решении прямой задачи, с помощью предложенного алгоритма, решена обратная задача катодолюминесцентной микротомографии. Вычислена апостериорная оценка погрешности полученного решения. Для решения поставленной задачи создан программный комплекс в системе MATLAB.

В заключении автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Григорьевичу Яголе, а также доктору физико-математических наук Эдуарду Ивановичу Рау за постоянное внимание к работе и помощь.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дорофеев К.Ю. Решение некорректно поставленных задач при условии истокопредставимости. В «Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-99». Секция «Физика». Москва, физический факультет МГУ, 21 апреля 1999 года» (сборнике тезисов), Москва, 1999, с.230-232.
2. Ягола А.Г., Дорофеев К.Ю. Метод расширяющихся компактов решения некорректных задач при условии истокопредставимости // Вестн. МГУ, сер. 3. Физика. Астрономия, 1999, №2, с.64-66.
3. Yagola, A.G., Dorofeev, K.Yu. Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications (Eds. Ramm, A.G., et. al), 2000, v.25, p.543-550, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
4. Дорофеев К.Ю., Ягола А.Г. Апостериорная оценка решения некорректных задач при условии истокообразной представимости точного решения. В «Обратные и некорректно поставленные задачи (тезисы докладов конференции). Москва, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 20-21 июня 2000 года», Москва, 2000, с.26.
5. Дорофеев К.Ю., Ягола А.Г. Апостериорная оценка погрешности при решении некорректных задач методом расширяющихся компактов. В “Ill-posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis. Programme and Book of Abstracts. Samarkand, Uzbekstan, September 11-15, 2000”, Самарканд, 2000, с.33-34.

6. Dorofeev, K., Yagola, A. A posteriori error estimation for the sourcewise represented solution with application to the problem of heat conductivity. In “Proceedings of workshop on "Fast solution of discretized optimization problems" (WIAS Berlin, May 8-12, 2000)”/ Eds. K.-H. Hofmann., R.H.W. Hoppe, V. Schulz, Birkhaeuser, 2001, p.88-97.
7. Дорофеев К.Ю., Рау Э.И., Сеннов Р.А., Ягола А.Г. О возможности катодолюминисцентной микротомографии. - Вест. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия, 2002, № 2, с.73-75.
8. Dorofeev, K.Y., Nikolaeva, N.N., Titarenko, V.N., Yagola, A.G. New approaches to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity // J. of Inverse and Ill-posed Problems, 2002, v.10, N 2, p.155-170.
9. Рау Э.И., Сеннов Р.А., Дорофеев К.Ю., Ягола А.Г., Лиу Ю., Пханг Дж., Чан Д. Основные принципы катодолюминисцентной микротомографии с использованием конфокальной зеркальной оптики // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 2002, № 10, с.85-92.
10. Dorofeev, K., Yagola, A., Rau, E. About cathodoluminiscence microtomography. – In “ECMI 2002. 12th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry. Jurmala, Latvia, September 10-14, 2002. Abstracts”, 2002, p.17-18.
11. Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г. Алгоритмы построения апостериорных погрешностей для некорректных задач // ЖВМ и МФ, 2003, т.43, №1, с.12-25.
12. Dorofeev, K., Yagola, A., Rau, E. Inverse problem of cathodoluniscence microtomography. In “Abstracts. ISIP 2003. International Symposium on Inverse Problems in Engineering

Mechanics 2003. 18-21 February 2003, Nagano City. Japan”, 2003, p.11-12.

13. Dorofeev, K., Yagola A. The method of extending compacts and a posteriori error estimates for non-linear ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems (in print).