

На правах рукописи

Клещевская Светлана Викторовна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПО ОТНОШЕНИЮ МАСС  
ЧАСТИЦ ПОПРАВOK К ТОНКОМУ СДВИГУ  $S$ -УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ  
ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2004

Работа выполнена на кафедре теоретической и ядерной физики Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского

**Научные руководители:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Фаустов Рудольф Николаевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Тюхтяев Юрий Николаевич**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Борисов Анатолий Викторович**

кандидат физико-математических наук  
**Галкин Владимир Олегович**

**Ведущая организация:** Институт Ядерных Исследований РАН,  
г. Москва

Защита состоится “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2004 года в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета К 501.001.17 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (119992, г. Москва, ГСП-2, Ленинские горы, дом 1, строение 2).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2004 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д. ф.-м. н., профессор

Поляков П. А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Исследование связанных состояний системы двух частиц принадлежат к тем фундаментальным научным направлениям, которые сохраняют актуальность на протяжении всего развития квантовой теории.

Существуют важные побудительные мотивы к расчету уровней энергии водородоподобных (ВП) атомов с возрастающей точностью.

Для прогресса фундаментальных исследований в физике элементарных частиц необходимы сведения о точных значениях важнейших физических констант – так называемых универсальных постоянных. Одним из важнейших критериев истинности новых моделей взаимодействий является использование в них установленных на настоящий момент параметров элементарных частиц – их массы, заряда и т.п.

Актуальность исследований спектров энергии водородоподобных (ВП) атомов определяется еще двумя обстоятельствами.

Задача двух тел, имеющая фундаментальное значение для описания процессов взаимодействия, полностью не решена в релятивистской механике и, как следствие, в теории квантовых полей.

Важнейший момент в выборе объекта исследований – возможность согласования результатов теории и эксперимента. ВП атом – простейшая замкнутая система двух частиц – наиболее доступен как теоретическому изучению, так и прецизионным измерениям параметров на практике.

За последнее десятилетие было опубликовано около десятка обзоров с анализом и систематизацией результатов исследований ВП атомов. Одно из главных направлений, привлечших внимание авторов обзоров, – проблема тонкого сдвига уровней энергии ВП атомов.

К началу 90-х годов появились убедительные свидетельства подготовки эксперимента по прецизионному измерению величины тонкого сдвига  $1S-2S$  уровней энергии в атоме мюония. В это же время были предприняты попытки, чтобы уточнить теоретическое значение величины тонкого сдвига  $S$ -уровней

энергии ВП атомов.

Заметный интерес вызвали сообщения о логарифмическом вкладе  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}$  в известную величину сдвига ( $\alpha$  – постоянная тонкой структуры,  $\mu$  – приведенная масса,  $m_1$  и  $m_2$  – массы легкой и тяжелой частиц соответственно). Такая поправка действительно была обнаружена при анализе взаимодействий в аннигиляционном канале атома позитрония.

Большая величина логарифмических вкладов заставляет обратить на их исследование особое внимание. В случае логарифмической зависимости имеем:

$$\ln \alpha^{-1} \approx 4.92,$$

для мюония  $\ln \beta^{-1} \approx 5.33,$

для водорода  $\ln \beta^{-1} \approx 7.52,$

где  $\beta = m_1/m_2$ .

Об актуальности темы, заявленной в диссертации, свидетельствуют интенсивные экспериментальные и теоретические исследования уровней энергии водородоподобных атомов.

В последние годы стало ясно, что повышение точности измерений величин сдвигов уровней энергии водородоподобных атомов с помощью радиочастотных методов наталкивается на серьезные препятствия.

Новые перспективы уменьшения экспериментальных ошибок открывают методы бездоплеровской двухфотонной лазерной спектроскопии. Эти эксперименты позволяют с рекордной точностью определить значение такой фундаментальной величины как постоянная Ридберга.

Интервал  $1S_{1/2} - 2S_{1/2}$  измерен в настоящее время в атоме водорода с точностью до десятка кГц:

$$\nu_{1S-2S}^L = 2\,466\,061\,413\,187.34 \text{ (84) кГц} \quad (1997 \text{ г.}),$$

$$\nu_{1S-2S}^L = 2\,466\,061\,413\,187\,103 \text{ (46) Гц} \quad (2000 \text{ г.}).$$

Прогресс, достигнутый в последних экспериментальных работах, стиму-

лирует развитие теоретических методов по прецизионному определению поправок к известным значениям величины сдвигов уровней энергии.

Об актуальности данной работы также свидетельствует тот факт, что поправки к  $P$ -уровням, известны сейчас с большей точностью, чем поправки к  $S$ -уровням.

**Целью** данной работы является анализ предыдущих результатов и расчет новых вкладов в сдвиг  $1S-2S$  уровней энергии ВП атомов, пропорциональных  $\ln[m_2/m_1]$ .

Для достижения этих целей решались следующие **задачи**:

- Анализ математического аппарата, используемого в исходных задачах на связанные состояния системы двух частиц в квазипотенциальном подходе.
- Выявление условий, при которых получаются новые логарифмические по  $m_1/m_2$  поправки к  $S$ -уровням энергии водородоподобного атома.
- Развитие принципа разложения по степеням  $m_1/m_2$  при исследовании поправок, содержащих  $\ln m_2/m_1$ .
- Расчет тонкой структуры и поправок к тонкому сдвигу уровней энергии с точностью до четвертого порядка по константе тонкой структуры  $\alpha$ .
- Исследование специфических эффектов отдачи в системе двух частиц с неравными массами.
- Анализ простейших однофотонных обменов.
- Исследование влияния движения ядра на величину тонкого сдвига уровней энергии водородоподобного атома.

### **Научная новизна работы**

1. В рамках метода квазипотенциала в диссертации разработана и применена техника расчетов логарифмических по  $m_2/m_1$  вкладов в тонкий сдвиг уровней энергии водородоподобных атомов.
2. Выяснен предел применимости  $\delta$ -приближения для волновых функций уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом при вычислении вкладов пропорциональных  $\ln m_2/m_1$ . Установлено, что все новые поправ-

ки такого рода получаются при использовании точных значений волновых функций  $S$ -состояний.

3. Впервые вычислена логарифмическая по параметру  $\beta = m_1/m_2$  поправка  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$  аналогичная вкладу, полученному еще в работе Фултона, Мартина 1954 года.
4. Впервые доказано существование логарифмических по параметру отношения масс частиц вкладов в тонкий сдвиг  $S$ -уровней энергии от простейшего взаимодействия частиц путем обмена одним кулоновским фотоном.
5. Впервые показано, что при обмене одним поперечным фотоном компенсируются вклады типа  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \beta^{-1}$ ,  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ ,  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$ .
6. Проанализирован эффект запаздывания и его влияние на величину логарифмического вклада по параметру  $\beta = m_1/m_2$ .
7. При анализе логарифмических по  $m_2/m_1$  поправок в шестом порядке по  $\alpha$  получены новые вклады порядка  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ .

### **Научная и практическая значимость работы**

Работа носит теоретический характер. Ее необходимость связана с потребностью интерпретации новых экспериментальных данных. Сравнение теории с новейшими экспериментальными данными спектроскопии сверхвысокого разрешения водородоподобных атомов позволит уточнить значение постоянной тонкой структуры, выражающейся через универсальные мировые константы.

Прогресс, достигнутый в последних экспериментальных работах, стимулирует развитие теоретических методов по прецизионному определению поправок к известным значениям величины сдвигов уровней энергии. Исследование спектров водородоподобных атомов одна из тех областей, где фундаментальные и прикладные вопросы переплетаются чрезвычайно тесно. Так известно, что величина тонкого сдвига уровней энергии зависит от фундаментальной фи-

зической константы – постоянной Ридберга. Сравнение теоретического и экспериментального значения этой величины позволяет установить величину этой постоянной с наибольшей возможной на данный период времени точностью. Работавшая под руководством специальной международной комиссии по установлению стандартных значений основных физических величин группа учёных (Mohr и др.) опубликовала свои заключения в 2000 г. Среди работ, на которые ссылались учёные при обосновании своих рекомендаций по принятию современного значения постоянной Ридберга, значится и наша работа 1998 года.

В свою очередь эта постоянная даёт сведения о константе электромагнитного действия. Известно, что в электрослабой теории константа слабого взаимодействия выражается через постоянную тонкой структуры, как и константа сильного взаимодействия в теориях великого объединения. Выбор теоретических моделей сильных взаимодействий во многом определяется значением константы электромагнитного взаимодействия.

Ожидаемые результаты важны для практических приложений, например в метрологии.

**Достоверность результатов диссертации** обеспечивается использованием строгих математических методов для расчета, обработки и анализа полученных данных. Достоверность также подтверждается согласием полученных результатов с экспериментальными данными.

### **Основные результаты и положения, выносимые на защиту**

1. Существование логарифмических по параметру отношения масс частиц вкладов в тонкий сдвиг  $S$ -уровней энергии от простейшего взаимодействия частиц путём обмена кулоновским фотоном.
2. Новые логарифмические по параметру отношения масс частиц вклады порядка  $\alpha^5$ .
3. Компенсация вкладов порядка  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$  при однофотонном обмене.
4. Возникновение логарифмических по параметру  $\beta$  вкладов в случае использования при вычислениях  $\delta$ -приближения кулоновских волновых

функций.

5. Численные оценки обнаруженных логарифмических вкладов и сравнение полученных величин сдвигов с последними данными теории и эксперимента.

#### **Личный вклад соискателя**

Все основные результаты диссертации получены автором лично или в соавторстве. Большая часть задач, решенных в диссертации, была предложена научными руководителями д.ф.-м. н., проф. Ю.Н. Тюхтяевым и д.ф.-м. н., проф. Р.Н. Фаустовым. Большая часть из представленных в работе сложных математических расчетов также получена самостоятельно.

#### **Апробация работы**

Основные материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих, в том числе и международных, научных конференциях: Saratov Fall Meeting: Workshop on Spectroscopy and Molecular Modeling II, Saratov, Russia (October, 2001, 2003); Сессия-конференция "Физика фундаментальных взаимодействий", Москва, Россия (2–6 декабря, 2002); International Seminar "Selected Problems of Modern Physics", Saratov, Russia (June 16–18, 2003); XVIIth International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Samara-Saratov, Russia (September 4–11, 2003).

#### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 10 работ, из них 5 в реферируемых изданиях.

#### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения и двух приложений. Работа изложена на 121 странице, содержит 17 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 51 наименования.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертации, её



новизна и практическая значимость, определена цель работы, описан и выбран как наиболее эффективный для прецизионных расчётов уровней энергии водородоподобных атомов квазипотенциальный подход.

Известно, что в нерелятивистской квантовой механике задача двух тел сводится к двум более простым: о равномерном движении центра масс и движении частицы с приведённой массой в потенциальном поле. В релятивистском случае явное отделение движения центра масс и введение потенциала невозможно, так как само определение координат центра масс носит нерелятивистский характер. Поэтому задачи о связанных состояниях двух тел и о связанных состояниях частицы во внешнем поле оказываются различными, не сводимыми друг к другу.

Несмотря на то, что уравнение Дирака для теории связанных состояний имело этапный характер (одно лишь предсказание существования тонкой структуры уровней энергии говорит о многом), оказалось, что с его помощью можно решать только задачи о частице, движущейся во внешнем поле.

Дираковская теория получила важное развитие с введением понятия о полной одночастичной функции Грина

$$G(z, y) = S^c(z - y) - e\gamma^k \int dx U_k(x) S^c(z - x) G(x, y) + \int dx dx' S^c(z - x) M'(x, x') G(x', y), \quad (1)$$

где  $U_k$  представляет собой потенциал внешнего поля  $A^{\text{ext}}$ , сложенный с эффективным средним потенциалом поля, «индуцированного» в вакууме,  $S^c$  – функция Грина свободного электрона,  $M'$  – массовый оператор,  $D$  – фотонная функция Грина

$$D_{mn}(z, y) = g^{mn} D_0^c(z - y) - \int dx d\xi D_0^c(z - x) P_m^k(x, \xi) D_{kn}(\xi, y), \quad (2)$$

$D_0^c$  – функция Грина свободного фотона,  $P$  – оператор поляризации.

Определения массы и функции распространения оказались дополненными и обобщёнными в результате описания взаимодействия частиц с собственными полями с помощью массового и поляризационных операторов.

Использование полной одночастичной функции Грина позволяет записать уравнение Дирака с радиационными поправками

$$\begin{aligned} & \left( i \frac{\widehat{\partial}}{\partial x} + e \widehat{A}^{\text{ext}}(x) - m \right) \varphi(x) - \\ & - i e^2 \gamma^k \varphi(x) \int dy d\tau D_{kn}^c(x-y) \text{Sp}[S^c(y-\tau) \gamma^m S^c(\tau-y) \gamma^n] e A_m^{\text{ext}}(\tau) + \\ & + i e^2 \int dy \gamma^k S^c(x, y | A^{\text{ext}}) \gamma^l D_{lk}^c(y-x) \varphi(y) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $S^c(x, y | A^{\text{ext}})$  – функция Грина классического электрона, движущегося в заданном внешнем поле  $A^{\text{ext}}$ , которая представляется суммой диаграмм с двумя внешними электронными линиями и любым числом внешних фотонных линий, соответствующих заданному полю  $A^{\text{ext}}$ .

На основе уравнения Дирака (3) можно поставить задачу о тонком сдвиге уровней энергии и вычислить радиационные поправки, отвечающих взаимодействию частицы с собственным электромагнитным полем.

Подходы, основанные на использовании полной одночастичной функции Грина, позволяют, также как и метод эффективного уравнения Дирака, решать задачу о связанных состояниях двух частиц в приближении внешнего поля. Однако для полного решения релятивистской задачи об уровнях энергии водородоподобных атомов необходимо оперировать с полной двухчастичной функцией Грина, в которую кроме поляризационного и массового операторов входит оператор взаимодействия частиц.

Уравнение для полной двухчастичной функции Грина было впервые предложено Бете и Солпитером. Несмотря на фундаментальность основанного на этом уравнении метода решения задач на связанные состояния двух частиц, существует ряд недостатков, затрудняющих его использование, и, прежде всего, наличие лишённого физического смысла относительного времени.

В этой связи более оправданным является применение в релятивистской теории связанных состояний формализма трёхмерных уравнений, среди которых особое место занимает квазипотенциальный подход.

Этот метод позволяет совмещать простоту и наглядность трёхмерного опи-

сания нерелятивистской квантовой механики с ковариантным аппаратом квантовой теории поля.

Квазипотенциальный подход универсален и одинаково точно описывает как системы частиц с одинаковыми, так и с различными массами.

**В первой главе** анализируется квазипотенциальное уравнение и его простейшие применения.

В первом параграфе первой главы ставится задача об уровнях энергии в квазипотенциальном подходе. Для системы двух заряженных частиц со спином одна вторая имеем

$$(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})\Psi_E(\vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int V(\vec{p}, \vec{q}; E)\Psi_E(\vec{q})d^3q, \quad (4)$$

где  $E$  – собственное значение полной энергии,  $\Psi_E(\vec{p})$  – соответствующая собственная функция,  $\varepsilon_{ip} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$ ,  $m_i$  – масса  $i$ -й частицы водородоподобного атома.

Квазипотенциал  $V(\vec{p}, \vec{q}; E)$  в большинстве задач может быть выражен через амплитуду рассеяния  $T_+$

$$V = T_+ (1 + FT_+)^{-1}, \quad (5)$$

где  $F = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q})(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^{-1}$ , операция  $(\dots)_+ = u_1^* u_2^* \gamma_{10} \gamma_{20} (\dots) u_1 u_2$  означает проектирование на состояния с положительными энергиями,

$$T(\vec{p}, \vec{q}; E) = T(\vec{p}, \vec{q}, p_0, q_0; E) \Big|_{p_0=q_0=0}.$$

В случае разложения амплитуды рассеяния  $T_+$  в ряд теории возмущений по степеням постоянной тонкой структуры  $\alpha$

$$T_+ = T_+^{(2)} + T_+^{(4)}. \quad (6)$$

Подставив (5) в выражение (4), получаем

$$V = T_+^{(2)} + T_+^{(4)} - T_+^{(2)} F T_+^{(2)} + \dots$$

Обычно для связанных состояний полагают  $\vec{p}^2 \ll m_i^2$ ,  $\vec{q}^2 \ll m_i^2$ . В этих условиях основное квазипотенциальное уравнение (4) переходит в уравнение типа Шредингера

$$\left(W - \frac{\vec{p}^2}{2\mu}\right)\Psi(\vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int V(\vec{p}, \vec{q}; E)\Psi(\vec{q})d^3q, \quad (7)$$

где  $W = E - m_1 - m_2$  – энергия связи системы,  $\mu$  – приведённая масса.

Выделяя кулоновское взаимодействие, как основное при электромагнитных взаимодействиях частиц, и решая (7) по теории возмущений, находим

$$\Delta E_n = \langle n | \Delta V^{(2)} + V^{(4)} + \sum_{m \neq n} \left\{ \Delta V^{(2)} \frac{|m\rangle\langle m|}{E_n - E_m} \Delta V^{(2)} \right\} | n \rangle, \quad (8)$$

где  $\Delta V^{(2)} = T_+^{(2)} - v_C$ ,  $|n\rangle$ ,  $|m\rangle$  – собственные функции уравнения (8) с кулоновским потенциалом, соответствующие значениям энергии  $E_n$  и  $E_m$ .

Анализ решения задачи о сверхтонком расщеплении приводит к выводу о возможности построения квазипотенциала  $V(\vec{p}, \vec{q}; E)$  через амплитуду рассеяния  $T$  на массовой поверхности. Это связано с тем, что в специфическом случае  $\vec{p} \cong 0$ ,  $\vec{q} \cong 0$  условие

$$\sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{q}^2 + m_2^2} = E$$

выполняется.

В самом деле, можно показать, что с точностью до  $\alpha^5$  можно использовать  $\delta$ -приближения кулоновских волновых функций

$$\Psi_C(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} \Psi_C(0) \delta(\vec{p})$$

при расчётах сверхтонкого расщепления и тонкого сдвига уровней энергии в высокочастотной области виртуального импульса.

Однако при прецизионных вычислениях амплитуду  $T(0, 0; m_1, m_2)$  использовать нельзя.

Во втором параграфе первой главы показано, что вычисление тонкой структуры уровней энергии возможно лишь при построении квазипотенциала через амплитуду рассеяния  $T(\vec{p}, \vec{q}; E)$ , где  $\vec{p} \neq 0$ ,  $\vec{q} \neq 0$ .

При этом квазипотенциал в низшем приближении и кулоновской калибровке имеет вид

$$V = (T_2)_+ = (K_C)_+ + (K_T)_+ \quad (9)$$

и соответствует диаграмме однофотонного обмена. Индексы  $S$  и  $T$  означают обмен кулоновским и поперечным фотоном соответственно.

Во втором параграфе первой главы идёт речь о двух способах вычисления тонкой структуры уровней энергии водородоподобных атомов, приводящих к одному и тому же результату.

В первом способе, выделяя ядро Брейта из квазипотенциала  $V$  путём разложения по степеням величины  $\vec{p}^2/m_i^2$  и преобразуя соответствующим образом радикалы в левой части уравнения (4), находим

$$V_{\text{fs}} = V_{\text{kin}} + V_{\mu} + V_{p\mu}, \quad (10)$$

$$\text{где } V_{\text{kin}} = -\left(\frac{\vec{p}^4}{8\mu^3} - \frac{3\vec{p}^4}{8m_1^2 m_2}\right) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \quad (11)$$

$$V_{\mu} = \frac{e^2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right), \quad (12)$$

$$V_{p\mu} = -\frac{e^2}{m_1 m_2} \frac{q^2 p^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}{(\vec{p} - \vec{q})^4}. \quad (13)$$

Решение квазипотенциального уравнения (4) с учётом (10) даёт поправку к уровням энергии, зависящую от отношения масс частиц, порядка  $(Z\alpha)^4$

$$E_{nj} = (m_1 + m_2) - \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} + \frac{\mu}{4n(m_1 + m_2)} \right), \quad (14)$$

где  $Z$  – заряд ядра,  $j$  – внутреннее квантовое число,  $n$  – главное квантовое число.

В диссертации предлагается отказаться от разложения радикалов  $\varepsilon_{ip}$  и нормировочных множителей  $N_{m_i p}$  по степеням  $\vec{p}^2/m_i^2$ :

$$\varepsilon_{ip} \approx m_i \left( 1 + \frac{p^2}{2m_i^2} - \frac{p^4}{8m_i^4} + \dots \right), \quad N_{m_i p} \approx 1 - \frac{p^2}{8m_i^2} + \frac{p^4}{128m_i^4} - \dots \quad (15)$$

Применимость разложения (15) ограничена, поскольку на определённом этапе возникают расходимости при больших значениях импульсов.

Исходя из этого, необходимо при прецизионных расчётах использовать не

разложения величин  $\varepsilon_{ip}$  и  $N_{m_i p}$ , а их представления в виде тождеств типа

$$\varepsilon_{ip} = m_i \left( 1 + \frac{p^2}{m_i(\varepsilon_{ip} + m_i)} \right), \quad N_{m_i p} = 1 - \frac{p^2}{2\varepsilon_{ip}(\varepsilon_{ip} + m_i)(1 + N_{m_i p})}.$$

Следует отметить, что при вычислении вклада, имеющего порядок  $\alpha^4$ , оба подхода приводят к одинаковым результатам. Но в предложенном в диссертации способе появляются дополнительные слагаемые, исчезающие при использовании как разложения по степеням  $\vec{p}^2/m_i^2$ , так и  $\delta$ -приближения кулоновских волновых функций.

**Вторая глава** посвящена исследованию эффектов отдачи в системе двух частиц с неравными массами.

В первом параграфе обсуждается вопрос о различии подходов к обнаружению поправок  $\ln \alpha^{-1}$  с одной стороны и  $\ln \beta^{-1}$  с другой. Показано, что при расчёте вкладов, содержащих  $\ln \alpha^{-1}$ , возможно использование приближений  $\varepsilon_{ip} \approx m_i$ ,  $\varepsilon_{iq} \approx m_i$ ,  $i = 1, 2$ . В то же время, для появления величин  $\ln \beta^{-1}$  в рассчитываемых интегралах, отвечающих взаимодействиям частиц, должны удерживаться оба радикала  $\varepsilon_{ip} \neq m_i$ ,  $\varepsilon_{iq} \neq m_i$ .

В статье Бодвина и Йенни<sup>1</sup> приведены в общем виде интегралы, исследуемые при расчёте вкладов пропорциональных  $\ln \alpha^{-1}$ ,

$$\int d^3 p d^3 p' \frac{[\vec{p}^2 \vec{p}'^2; p^4; p^2(\vec{p} - \vec{p}')^2; (\vec{p} - \vec{p}')^4]}{(p^2 + \gamma^2)^2 (\vec{p} - \vec{p}')^2 (p'^2 + \gamma^2)^2}, \quad \gamma = \alpha \mu. \quad (16)$$

Важно, что оговаривается возможная расходимость этих интегралов, поскольку опущены факторы, не зависящие от параметра  $\gamma$ .

Показано, что логарифмический по  $\alpha$  вклад в структуру уровней энергии обуславливает единственный из группы интегралов (16), который более точно выписан и исследован в статье Бойковой и др.<sup>2</sup>,

<sup>1</sup> Bodwin G.T., Yenie D.R. Hyperfine Splitting in Positronium and Muonium // Physics Reports (Section C of Physics Letters). – 1978. Vol. 43. – P. 267–303.

<sup>2</sup> Бойкова Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. Поправки к сверхтонкому расщеплению основного уровня мюония относительного порядка  $(m_e/m_\mu)\alpha^2 \ln \alpha$  // Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. – Протвино. – 1983. Т. 1. – С. 116–127.

$$\int \frac{d^3 p}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int \frac{d^3 p'}{(p'^2 + \alpha^2 \mu^2) (\vec{p} - \vec{p}')^2} \cong \frac{4\pi^4}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}. \quad (17)$$

Бодвин и Йенни в своей статье<sup>1</sup> справедливо указывают, что точный вид опущенных в (16) факторов, обеспечивающих сходимость, не изменяет величины логарифмического по константе тонкой структуры вклада.

Действительно,

$$\int \frac{dp p}{\varepsilon_{2p}^3 (p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \sim \int \frac{dp p}{\varepsilon_{1p}^3 (p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \sim \ln \alpha^{-1}$$

и не содержит  $\ln \beta^{-1}$ .

В то же время доскональный учёт подынтегральных функций, зависящих от  $m_1$  и  $m_2$ , необходим при расчёте логарифмического вклада, пропорционального  $\ln \beta^{-1}$ .

В этой связи необходимо отметить, что другой интеграл из группы (16) при восстановлении точных значений радикалов может быть записан в виде

$$J = \int \frac{d^3 p'}{(p'^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 \varepsilon_{1p'} \varepsilon_{2p'}} \int \frac{d^3 p p^2}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 \varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}}. \quad (18)$$

Поправок к уровням энергии, пропорциональных  $\ln \alpha^{-1}$ , он не вносит, но даёт вклады порядка  $\alpha^5$  и содержит величину

$$J_\beta = \frac{4\pi^3}{\alpha \mu} \frac{1}{m_1 m_2} \int_0^\infty \frac{dp p^4}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \cong \frac{4\pi^3}{\alpha \mu} \frac{1}{m_1 m_2} \ln \beta^{-1}.$$

Таким образом, радикалы можно опускать только в том случае, когда ведётся расчёт поправок  $\ln \alpha^{-1}$ , и необходимо сохранять при расчёте  $\ln \beta^{-1}$ .

Отметим в заключение, что ни один из интегралов (16) не может быть решён с помощью  $\delta$ -приближения кулоновских волновых функций.

Кроме того, приведённый выше анализ интегралов показывает, что новые логарифмические вклады по параметру  $\beta = m_1/m_2$  появляются при исследованиях связанных состояний любыми известными методами. Квазипотенциальный метод не является в этом смысле исключением.

Учёт радикалов означает релятивистский характер поправок  $\ln \beta^{-1}$ . Поэтому необходимо обратиться к общим релятивистским методам исследования спектров водородоподобных атомов.

Введение двухвременной функции Грина двух частиц позволяет записать для состояния с собственным значением энергии  $E$  уравнение

$$(\overline{G}_E^+)^{-1} \Psi_E = 0. \quad (19)$$

Поскольку из уравнения Швингера следует разнообразные представления полной функции Грина двух частиц, то можно использовать равенства

$$G = G_0 + G_0 K_{BS} G \quad (20)$$

или 
$$G = G_C + G_C \tilde{K} G, \quad (21)$$

где 
$$G_C = G_0 + G_0 K_C G_C, \quad (22)$$

$\tilde{K} = K_{BS} - K_C$ ,  $K_C = v_C \gamma_{10} \gamma_{20}$ ,  $v_C$  – кулоновский потенциал.

Построение квазипотенциала на основе (20) приводит к выражению

$$V = \frac{\tau_0}{1 + F \tau_0}, \quad \tau_0 = F^{-1} \overline{G_0 T G_0^+} F^{-1}, \quad (23)$$

используемому в (4).

Уравнение же (22) даёт возможность выразить потенциал через амплитуду  $\tau_C$

$$V = \frac{\tau_C}{1 + \overline{G_C^+} \tau_C}, \quad \tau_C = (\overline{G_C^+})^{-1} \overline{G_C T G_C^+} (\overline{G_C^+})^{-1}.$$

В теории возмущений, основанной на использовании амплитуды  $T$ , квазипотенциал принимает вид

$$V = V^{(2)} + V^{(4)}, \quad (24)$$

где  $V^{(2)} = (K_T)_{0F}^+$ ,

$$V^{(4)} = (K_C G_0 K_T)_{0F}^+ - (K_C)_{0F}^+ F (K_T)_{0F}^+ + (K_T G_0 K_C)_{0F}^+ - (K_T)_{0F}^+ F (K_C)_{0F}^+.$$

Таким образом, итерации, улучшающие сходимость ряда теории возмущений, возникают во втором порядке разложения квазипотенциала.

При построении квазипотенциала с помощью амплитуды  $\tau_C$  уже в первом



порядке каждая приводимая диаграмма входит с соответствующей итерацией. Это позволяет учитывать многократный обмен кулоновскими фотонами в неприводимых диаграммах.

Во втором параграфе второй главы продолжается анализ выражения квази-потенциала, соответствующего однофотонному взаимодействию частиц.

Вначале рассматривается кулоновскую часть взаимодействия (слагаемые, отвечающие за сверхтонкий сдвиг, опущены).

$$\begin{aligned} \Delta E_C = \langle \varphi_C(\vec{p}) | (K_C)_+ - v_C | \varphi_C(\vec{q}) \rangle = \langle \varphi_C(\vec{p}) | v_C N_p N_q \left( 1 + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M_{1p}M_{1q}} + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M_{2p}M_{2q}} + \right. \\ \left. + \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{M_{1p}M_{1q}M_{2p}M_{2q}} \right) - v_C | \varphi_C(\vec{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $M_{ir} = \varepsilon_{ir} + m_i$ ,

$$N_r = N_{m_1 r} N_{m_2 r} = \sqrt{\frac{\sqrt{\vec{r}^2 + m_1^2} + m_1}{2\sqrt{\vec{r}^2 + m_1^2}}} \sqrt{\frac{\sqrt{\vec{r}^2 + m_2^2} + m_2}{2\sqrt{\vec{r}^2 + m_2^2}}} - \text{произведение норми-}$$

ровочных множителей дираковских биспиноров,  $\vec{r} = \vec{p}, \vec{q}$ .

Для простоты  $\varphi_C(\vec{p})$  – кулоновская волновая функция, отвечающая  $1S$  состоянию,

$$\varphi_C(\vec{p}) = \frac{8\pi\alpha\mu\varphi_C(0)}{(\vec{p}^2 + \alpha^2\mu^2)^2} (2\pi)^{-3/2}, \quad |\varphi_C(0)|^2 = \frac{\alpha^3\mu^3}{\pi}, \quad (26)$$

для состояний  $nS$  величина тонкого сдвига уменьшается в  $n^3$  раз.

Остановимся более подробно на первом и последнем слагаемых (25), которое представим в виде

$$\begin{aligned} \langle \varphi_C(\vec{p}) | v_C N_p N_q - v_C | \varphi_C(\vec{q}) \rangle = \langle \varphi_C(\vec{p}) | v_C [1 - (1 - N_p)][1 - (1 - N_q)] | \varphi_C(\vec{q}) \rangle = \\ = \langle \varphi_C(\vec{p}) | -v_C(1 - N_p) - v_C(1 - N_q) + v_C(1 - N_p)(1 - N_q) | \varphi_C(\vec{q}) \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценка последнего слагаемого в (27) приводит нас к стандартному интегралу (17). Согласно последним данным такого рода поправки компенсируются в сумме диаграмм, и это слагаемое можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

После этого в выражении (27) можно использовать симметрию по переменным  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$

$$\langle \varphi_C(\vec{p}) | v_C N_p N_q - v_C | \varphi_C(\vec{q}) \rangle \cong \langle \varphi_C(\vec{p}) | -2v_C(1 - N_p) | \varphi_C(\vec{q}) \rangle. \quad (28)$$

Перейдём в рассматриваемом нами выражении (28) к безразмерным величинам, т.е. посредством замен  $p = p'm_2$ ,  $q = q'm_2$ , тогда

$$\begin{aligned} -2\langle \varphi_C(\vec{p}) | v_C(1 - N_p) | \varphi_C(\vec{q}) \rangle &= \frac{8}{\pi^4} \frac{\alpha^6 \mu^5}{m_2^4} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \gamma^2)^2} \int \frac{d^3 p}{(p^2 + \gamma^2)^2 (\vec{p} - \vec{q})^2} \times \\ &\times [(1 - N_{1p}) + (1 - N_{\beta p}) - (1 - N_{1p})(1 - N_{\beta p})] = \\ &= \frac{32}{\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{\beta^2}{1 + \beta} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(p^2 + \gamma^2)^3} [(1 - N_{1p}) + (1 - N_{\beta p}) - (1 - N_{1p})(1 - N_{\beta p})], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{где } \gamma = \alpha\beta/(1 + \beta), \quad N_{\beta p} = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + \beta^2} + \beta}{2\sqrt{p^2 + \beta^2}}}, \quad N_{1p} = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + 1} + 1}{2\sqrt{p^2 + 1}}}. \quad (30)$$

Преобразуя подынтегральную функцию с помощью тождества

$$\begin{aligned} 1 - N_{1p} &= \frac{p^2}{4\sqrt{p^2 + 1}(\sqrt{p^2 + 1} + 1)} + \frac{p^4}{32(p^2 + 1)(\sqrt{p^2 + 1} + 1)^2} + \\ &+ \frac{p^6(3 + N_{1p})}{64(p^2 + 1)^{3/2}(\sqrt{p^2 + 1} + 1)^3(1 + N_{1p})^3}, \end{aligned} \quad (31)$$

легко прийти к следующим выводам.

1) Первые два слагаемых из (29) имеют лидирующий порядок  $\alpha^4$  и вкладов, содержащих  $\ln \beta^{-1}$ , в тонкий сдвиг не вносят.

2) Используя в этих интегралах разложения (15) и возвращаясь к размерным импульсам, вновь получаем следующий результат

$$\Delta \tilde{E}_C(\alpha^4) = \langle \varphi_C(\vec{p}) | (K_C)_+ - v_C | \varphi_C(\vec{q}) \rangle = \langle \varphi_C(\vec{p}) | \frac{e^2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) | \varphi_C(\vec{q}) \rangle = \frac{\alpha^4 \mu^3}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right).$$

Отметим только, что при использовании точных значений этих слагаемых возникают дополнительные поправки, содержащие целочисленные степени параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Содержащие  $\ln m_2/m_1$  поправки к тонкой структуре уровней энергии могут

быть выделены только из следующего интеграла

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_C^{\ln} &= \langle \varphi_C(\vec{p}) | 2v_C (1 - N_{m_1 p})(1 - N_{m_2 p}) | \varphi_C(\vec{q}) \rangle = \\ &= -\frac{32}{\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{\beta^2}{1 + \beta} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(p^2 + \gamma^2)^3} (1 - N_{\beta p})(1 - N_{1p}). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставив вместо величины  $1 - N_{1p}$  её представление (31) и вычислив полученные интегралы, получаем, что новый логарифмический по отношению масс частиц вклад от обмена одним кулоновским фотоном равен

$$\Delta \tilde{E}_C^{\ln} = -\frac{11}{8\sqrt{2}\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{\beta^3}{1 + \beta} \ln \beta^{-1}. \quad (33)$$

Наиболее вероятная возможность компенсации этой поправки, связанная с анализом обмена одним поперечным фотоном, не реализуется.

Рассмотренные нами вычисления указывают на достоверность вывода об окончательном характере полученного в данном параграфе сдвига

$$\Delta \tilde{E}_C^{\ln} \sim \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{\beta^3}{1 + \beta} \ln \beta^{-1}.$$

**В третьей главе** посредством модифицированной амплитуды рассеяния изучается взаимодействие частиц при обмене одним поперечным фотоном. В первом параграфе третьей главы вклад в сдвиг  $S$ -уровней энергии от обмена одним поперечным фотоном, вычисляемый с помощью амплитуды рассеяния  $\tau_0$ , записан с учетом релятивистскую модификацию кулоновской волновой функции

$$\Delta E_T = \langle \Psi'_C | (K_T)_{0F}^+ | \Psi'_C \rangle. \quad (34)$$

В этом параграфе показано, что эффект запаздывания в данной диаграмме уменьшает величину логарифмического по отношению масс частиц вклада в пятом порядке по константе тонкой структуры в два раза, т.е. можно использовать при расчетах поправок порядка  $\alpha^5 \ln \beta^{-1}$  приближение

$$\frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}| + \varepsilon_{1p} - E_1 + \varepsilon_{2q} - E_2} \sim \frac{1}{2|\vec{p} - \vec{q}|}. \quad (35)$$

Таким образом, прецизионный расчет величины (34) и учет приближения (35) позволяет нам записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta E_T = & \frac{1}{\pi^4} \alpha^6 \mu^5 \int \frac{d^3 p \Omega_p N_p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 q \Omega_q N_q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \left\{ -\frac{4(\vec{p}\vec{q})}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left( \frac{1}{M_{1q} M_{2q}} + \frac{1}{M_{1q} M_{2p}} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{M_{1q} M_{2q}} \left( -1 + \frac{(p^2 - q^2)^2}{(\vec{p} - \vec{q})^4} \frac{p^4}{(\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q}) M_{1p} M_{2p}} \right) - \frac{1}{M_{1q} M_{2p}} + \\ & + \frac{(p^2 - q^2)^2}{(\vec{p} - \vec{q})^4} \left( 2 + 2q^2 \left( \frac{1}{M_{1p} M_{1q}} + \frac{1}{M_{2p} M_{2q}} \right) + \frac{p^2 q^2}{M_{1p} M_{1q} M_{2p} M_{2q}} \right) \times \\ & \left. \times \frac{1}{(\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q})} \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\Omega_p = M_{1p} M_{2p} / (M_{1p} + M_{2p})$ .

Поправки типа  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \beta^{-1}$ ,  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ ,  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$ , возникающие

при прецизионном расчете выражения (36), выписаны в таблице 1.

Таблица 1.

Диаграмма	$\Delta E_T$						$\Sigma$
$\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \beta^{-1}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}$	0	$\frac{2}{\sqrt{2}\pi}$	0	0
$\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$	0	$\frac{9}{4\sqrt{2}\pi}$	$\frac{9}{4\sqrt{2}\pi}$	$-\frac{4}{\sqrt{2}\pi}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}$	0	0
$\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$	0	$-\frac{145}{64\sqrt{2}\pi}$	$-\frac{145}{64\sqrt{2}\pi}$	$\frac{4}{\sqrt{2}\pi}$	$\frac{1}{32\sqrt{2}\pi}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}$	0

Итак, из таблицы 1 следует, что никаких новых логарифмических по отношению масс частиц вкладов, имеющих порядок  $\alpha^5$ , от обмена одним поперечным фотоном не найдено.

Во втором параграфе третьей главы продолжен анализ обмена одним поперечным фотоном. Оказывается, что новые логарифмические по отношению

масс частиц поправки возникают лишь в шестом порядке по константе тонкой структуры.

В этом параграфе проведен детальный расчет поправок, имеющих порядок  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln^2 \beta^{-1}$  и  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ . Получены новые вклады порядка  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ , подтвержден результат  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln^2 \beta^{-1}$ , который был известен ранее. При расче-

тах было выяснено, что эффект запаздывания не влияет на величину поправки  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln^2 \beta^{-1}$  и уменьшает величину вклада  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$  на  $\frac{4 \ln 2}{\pi^2}$ .

Величина сдвига  $1S-2S$  уровня энергии водородоподобного атома, определенная в этом параграфе, равна

$$\begin{aligned} \Delta E_T(1S - 2S) = \\ = \frac{7 \alpha^6 \mu^3}{8 m_1 m_2} \frac{\beta}{(1 + \beta)^3} \frac{1}{\pi^2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} (1 + 2\sqrt{2}) \ln(1 + \sqrt{2}) + 2 \ln 2 + \ln \beta^{-1} \right] \ln \beta^{-1}. \end{aligned}$$

**В четвертой главе** анализируется влияние движения ядра на величину тонкого сдвига уровней энергии водородоподобного атома.

В первом параграфе четвертой главы исследованы последовательные обмены кулоновским и поперечным фотонами между частицами водородоподобного атома.

Лидирующий вклад от фейнмановской диаграммы с параллельными фотонными линиями, отвечающей обмену одним кулоновским и поперечным фотонами, может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{par}}^{++} = & -\frac{\alpha^7 \mu^5}{2\pi^6} \int \frac{d^3 p \Omega_p N_p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 q \Omega_q N_q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 k}{k_p^2} \frac{1}{k_q (k_q + \varepsilon_{1k} - E_1 + \varepsilon_{2q} - E_2)} \times \\ & \times \frac{1}{k_q + \varepsilon_{2k} - E_2 + \varepsilon_{1q} - E_1} \left\{ k^2 - \frac{(k^2 - q^2)^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \frac{M_{1k} M_{2k}}{(\varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2q})} + q^2 \frac{M_{1k} M_{2k}}{M_{1q} M_{2q}} + \right. \\ & \left. + (\vec{k}\vec{q}) \left[ \frac{M_{1k}}{M_{1q}} + \frac{M_{2k}}{M_{2q}} - \frac{(k^2 - q^2)^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \frac{M_{1k}}{M_{2q}} \frac{1}{(\varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2q})} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{(k^2 - q^2)^2 M_{2k}}{(\vec{k} - \vec{q})^2 M_{1q}} \frac{1}{(\varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2q})} \right] + \Re \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k}} \right\}. \quad (37)$$

Интегрирование величины

$$\Re = (\vec{p}\vec{k}) \left( \frac{k^2}{M_{1p} M_{1k}} + \frac{k^2}{M_{2p} M_{2k}} - \frac{(k^2 - q^2)^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \frac{1}{(\varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2q})} \left( \frac{M_{1k}}{M_{2p}} + \frac{M_{2k}}{M_{1p}} \right) \right) + \frac{p^2 k^4}{M_{1p} M_{2p} M_{1k} M_{2k}}$$

к появлению искомым логарифмических вкладов не приводит.

В таблицу 2, суммирующую результаты проведённых в этом параграфе вычислений, включена вся необходимая для анализа совокупность интегралов (37) независимо от того, содержат или не содержат они логарифмические по  $\beta$  вклады.

В таблице 2 приводятся поправки от процесса последовательного обмена кулоновским и поперечным фотонами в обобщённом виде, полученные в приближении мгновенного взаимодействия частиц. Отличные от нуля в  $\delta$ -приближении волновых функций вклады в таблице 2 помечены звёздочкой.

Таблица 2

Диаграмма	$\Delta E_{\text{par}}^{++}$								$\Sigma$
	$\frac{2^*}{\pi}$	$-\frac{2^*}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	0	0	0	0	0	
$\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$	$\frac{2^*}{\pi}$	$-\frac{2^*}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta$	$-\frac{1^*}{\pi}$	$\frac{1^*}{\pi} + \frac{7\sqrt{2}}{4\pi}$	$-\frac{7\sqrt{2}}{4\pi}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8\pi}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8\pi}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$

Эффект запаздывания, как показано далее в этом параграфе, уменьшает значение найденной новой логарифмической по отношению масс частиц поправки в 3/4 раза.

Следовательно, при расчёте фейнмановской диаграммы с параллельными

фотонными линиями, отвечающей обмену одним кулоновским и поперечным фотонами, возникает вклад

$$\Delta E_{\text{par}} = -\frac{3\sqrt{2}}{16\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}.$$

Во втором параграфе четвертой главы анализируются более подробно вклады от двухфотонных диаграмм с обменом одним поперечным фотоном в низшем приближении. Рассматриваются логарифмические по константе тонкой структуры вклады в тонкий сдвиг уровней энергии, исчезающие в пределе  $m_2 \rightarrow m_1$ .

Показано, что логарифмические по отношению масс частиц  $\beta$  вклады, являющиеся основной задачей нашего исследования, при анализе диаграммы с перекрестными кулоновской и поперечной фотонными линиями возникают лишь в шестом порядке по константе тонкой структуры и пропорциональны  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln^2 \beta^{-1}$ .

**В заключении** диссертации перечислены основные результаты и выводы.

**В приложениях 1 и 2** вычислена матричная структура для диаграмм с параллельными и перекрестными кулоновской и поперечной фотонными линиями соответственно.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В рамках метода квазипотенциала в диссертации разработана и применена техника расчетов логарифмических по  $m_2/m_1$  вкладов в тонкий сдвиг уровней энергии водородоподобных атомов.
2. Выяснен предел применимости  $\delta$ -приближения для волновых функций уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом при вычислении вкладов пропорциональных  $\ln m_2/m_1$ . Все новые поправки такого рода получаются при использовании точных значений волновых функций  $S$ -состояний.
3. Вычисление вкладов от однофотонных обменов даже в низших порядках

по  $\alpha$  невозможно без использования точных значений функций  $\Psi_{C_n}(\bar{p})$ . При прецизионном исследовании обмена одним кулоновским фотоном между частицами установлено новое значение величины вклада порядка  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^3 \ln \beta^{-1}$ .

4. Исследование обмена поперечным фотоном показало взаимное уничтожение поправок  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \beta^{-1}$ ,  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ ,  $\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$ . Это обстоятельство с учетом вклада от обмена одним кулоновским фотоном приводит к достоверности вывода о существовании новых вкладов  $\ln m_2/m_1$  в пятом порядке по константе тонкой структуры.

5. Проанализировано влияние эффекта запаздывания на величину вклада. Установлено, что для пятого порядка по константе тонкой структуры величина вклада уменьшается в однофотонной диаграмме в два раза, в параллельной двухфотонной – в  $3/4$  раза. Результат  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln^2 \beta^{-1}$  в однофотонной диаграмме остается без изменений, а поправка  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$

уменьшается на величину  $\frac{4 \ln 2}{\pi^2 n^3}$ .

6. При анализе логарифмических по  $m_2/m_1$  поправок в шестом порядке по  $\alpha$  получены новые вклады порядка  $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}$ .

### Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. Бойкова Н.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н. О влиянии эффектов отдачи на тонкую структуру уровней энергии мюония // Проблемы современной физики. К 90-летию Саратовского государственного университета и 40-летию сотрудничества ОИЯИ-СГУ. ОИЯИ, D2-99-263, Дубна, 1999. –



- С. 96–104.
2. Бойкова Н.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. Логарифмические по  $m_1/m_2$  поправки к величине тонкого сдвига  $S$ -уровней энергии в атоме мюония // ЯФ. – 2001. № 8. – С. 1437–1441.
  3. Boikova N.A, Kleshchevskaya S.V., Tyukhtyaev Yu.N., Faustov R.N. Logarithmic corrections in  $m_1/m_2$  to the fine shift of the  $S$ -wave energy levels in the muonium atom // Phys. At. Nucl. – 2001. Vol. 64. №8. – P. 1359–1363.
  4. Boikova N.A, Kleshchevskaya S.V., Tyukhtyaev Yu.N. Precision calculations to the fine shift of  $S$ -levels in the muonium atom // Saratov Fall Meeting'2001. Laser Physics and Photonics, Spectroscopy and Molecular Modeling II / Editors: Vladimir L. Derbov, Leonid A. Melnikov, Lev M. Babkov. Proc. SPIE. – 2002. Vol. 4706. – P. 150–154.
  5. Boikova N.A., Kleshchevskaya S.V., Nyun'ko N.E, Tyukhtyaev Yu.N. New approach to the investigation of logarithmic in  $m_1/m_2$  corrections to the fine shift of energy levels in hydrogen-like atoms // Saratov Fall Meeting'2001. Laser Physics and Photonics, Spectroscopy and Molecular Modeling II / Editors: Vladimir L. Derbov, Leonid A. Melnikov, Lev M. Babkov. Proc. SPIE. – 2002. Vol. 4706. – P. 187–191.
  6. Бойкова Н.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н. Прецизионные расчёты величины тонкого сдвига  $S$ -уровней атома мюония // Проблемы оптической физики. Материалы 5-й Международной молодежной научной школы по оптике, лазерной физике и биофизике, Саратов, 2–5 октября 2001, под ред. Л. М. Бабкова (ГосУНЦ «Колледж», Саратов, 2002). – Саратов. – 2002. – С. 98–105.
  7. Бойкова Н.А., Клещевская С.В., Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н. Новый подход к исследованию логарифмических по  $m_1/m_2$  поправок в тонкий сдвиг уровней энергии водородоподобных атомов // Проблемы оптической физики. Материалы 5-й Международной молодежной научной школы по оптике, лазерной физике и биофизике, Саратов, 2–5 октября 2001, под ред. Л.

- М. Бабкова (ГосУНЦ «Колледж», Саратов, 2002). – Саратов. – 2002. – С. 105–111.
8. Бойкова Н.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. Исследование логарифмических по отношению масс электрона и мюона вкладов в сдвиг  $S$  уровней энергии мюония // ЯФ. – 2003. №5. – С. 925–933.
9. Boikova N.A., Kleshchevskaya S.V., Tyukhtyaev Yu.N., Faustov R.N. Investigation of logarithmic contributions in the electron-to-muon mass ratio to the shift of the  $S$  energy levels in the muonium atom // Phys. At. Nucl. – 2003. Vol. 66. №5. – P. 893–901.
10. Бойкова Н.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. К вопросу о логарифмических по отношению масс частиц вкладов в тонкий сдвиг  $S$  уровней энергии водородоподобных атомов в пятом порядке по константе тонкой структуры // ЯФ. – 2004. №3. – С. 548–556.