

На правах рукописи

Солошенко Алексей Александрович

АНАЛИЗ КВАНТОВЫХ ПОПРАВOK И ПРОБЛЕМА АНОМАЛИЙ  
В  $N = 1$  СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ,  
РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2004

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук  
доцент П.И.Пронин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук  
В.А.Ильин,  
кандидат физико-математических наук  
А.М.Сунчалин

Ведущая организация: Ярославский Государственный Университет,  
г.Ярославль

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2004 г. в \_\_\_\_\_ час. на заседании Диссертационного Совета К 501.001.17 при Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова (119992, г. Москва, Ленинские горы, физический факультет МГУ, ауд. \_\_\_\_\_ ).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2004 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного Совета К 501.001.17  
доктор физико-математических наук

П.А. Поляков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Исследование квантовых поправок в суперсимметричных теориях представляет собой интересную и, вообще говоря, весьма нетривиальную задачу. Важной проблемой, требующей своего решения, является выбор способа регуляризации суперсимметричных теорий. Желательно, чтобы введенная регуляризация не нарушала не только калибровочную, но и суперсимметричную инвариантность теории (использование неинвариантных регуляризаций конечно допустимо, но является достаточно неудобным). Широко применяющаяся при вычислениях в обычной квантовой теории поля размерная регуляризация в этом смысле оказывается неприменимой в суперсимметричных теориях, так как она явным образом нарушает суперсимметрию. Поэтому для регуляризации суперсимметричных теорий обычно используют модифицированный вариант размерной регуляризации, который сохраняет суперсимметрию, – регуляризацию методом размерной редукции. Данный метод позволяет довольно просто проводить петлевые вычисления, в том числе и в теориях с расширенной суперсимметрией. Однако, как оказалось, размерная редукция является математически противоречивой, вследствие чего возникает необходимость тщательного анализа корректности получаемых в данной регуляризации результатов. Кроме того, в  $N = 1$  суперсимметричных теориях использование размерной редукции приводит к так называемой проблеме аномалий: с одной стороны, известно, что в суперсимметричных теориях аксиальная аномалия и аномалия следа тензора энергии-импульса являются компонентами одного супермультиплета; при этом в соответствии с теоремой Адлера-Бардина аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, тогда как аномалия следа пропорциональна  $\beta$ -функции во всех порядках теории возмущений; отсюда следует, что в суперсимметричных теориях  $\beta$ -функция должна полностью определяться однопетлевым приближением; с другой стороны явные вычисления по теории возмущений показали, что при использовании регуляризации размерной редукцией существуют вклады высших петель в  $\beta$ -функцию. Это противоречие и получило название проблемы аномалий.

Указанную выше проблему, по всей видимости, можно решить, если для регуляризации суперсимметричных теорий использовать математически непротиворечивый метод. Наиболее подходящим при этом представляется метод высших ковариантных производных (дополненный регуляризацией Паули-Вилларса для устранения остаточных однопетлевых расходимостей). Этот метод является математически непротиворечивым и

не нарушает ни калибровочную, ни суперсимметричную инвариантность. Однако, регуляризация высшими производными является технически гораздо более сложной, нежели регуляризация размерной редукцией, и до сих пор для явных вычислений в суперсимметричных теориях не применялась.

Таким образом исследование проблемы аномалий и вычисления квантовых поправок в суперсимметричных теориях, регуляризованных непротиворечивым способом, на сегодняшний день являются актуальными задачами.

**Целью диссертационного исследования** является анализ петлевых вкладов в эффективное действие  $N = 1$  суперсимметричной безмассовой электродинамики, регуляризованной высшими производными, а также исследование проблемы аномалий в рассматриваемой модели.

**Научная новизна.** В диссертационной работе впервые регуляризация методом высших производных применена для вычисления квантовых поправок в суперсимметричных теориях; впервые непротиворечивым образом проведены трехпетлевые вычисления ренормгрупповых функций в  $N = 1$  суперсимметричной электродинамике.

**Научная и практическая ценность работы.** Полученные результаты могут быть использованы для исследования структуры квантовых поправок в различных суперсимметричных теориях. Результаты данной работы могут быть также применены при проведении вычислений вне суперсимметричных моделей теории поля при использовании регуляризации высшими производными.

Результаты могут быть использованы в НИИЯФ МГУ, ИЯИ, ЛТФ ОИЯИ, ФИАН, ИТЭФ, МИАН, МГПУ им. Ленина.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на научной конференции Ломоносовские чтения-2002 (Москва), сессии-конференции "Физика фундаментальных взаимодействий" (Москва – 2002), научной конференции Ломоносовские чтения-2003 (Москва), Международной конференции SQS-03 (Дубна), а также на семинарах в ИТЭФ, МИАН, ОИЯИ и на кафедре теоретической физики МГУ.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 4 работы.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, пяти приложений, заключения и списка цитируемой

литературы. Объем диссертации составляет 113 страниц текста, набранного в издательской системе LATEX.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** формулируются цели исследования и описывается построение диссертационной работы.

В **главе 1** приведены основные сведения о  $N = 1$  суперсимметричной электродинамике, проведено квантование модели, а также определены ренормгрупповые функции: аномальная размерность суперполей материи,  $\beta$ -функция и функция Гелл-Манна-Лоу.

В параграфе 1 в суперполево-формализме описывается действие  $N = 1$  суперсимметричной электродинамики, дается компонентное представление суперполей теории, а также вид их суперсимметричных калибровочных преобразований, оставляющих действие инвариантным. Здесь же получены уравнения движения для суперполей теории.

Параграф 2 посвящен рассмотрению супермультиплета токов теории на классическом уровне. Здесь приводится явный вид супертока  $J_\mu$  – векторного вещественного суперполя, содержащего в качестве своих компонент аксиальный ток, спинорный суперток и тензор энергии-импульса. Из закона сохранения этого супертока следует, что на уравнениях движения выполняются классические законы сохранения указанных величин: обращаются в нуль дивергенция аксиального тока, след тензора энергии-импульса и свертка спинорного супертока с матрицами  $\gamma^\mu$ . При этом известно, что перечисленные соотношения нарушаются квантовыми поправками.

Квантование рассматриваемой модели проводится в параграфе 3. Сначала вводится регуляризация высшими производными (подпараграф 3.1), причем в силу абелевости модели мы можем использовать для этого обычные, а не ковариантные производные. Из вида регуляризующего слагаемого очевидно, что введенная регуляризация не нарушила ни суперсимметричную, ни калибровочную инвариантность. Последняя фиксируется добавлением к действию некоторых интегралов по всему суперпространству от вещественных суперполей, так что суперинвариантность фиксацией калибровки не нарушается (подпараграф 3.2). Более того, вид слагаемых, фиксирующих калибровку, подобран таким образом, чтобы кинетический член калибровочного поля (а значит впоследствии и соответствующий пропагатор) имел бы наиболее простой вид. Производящий функционал для функций Грина

и эффективное действие определяются в подпараграфе 3.3. При этом перенормированное действие записывается в голоморфной нормировке суперполей материи. Необходимо особо подчеркнуть, что квантование проводится в суперполевым формализме, что позволяет при вычислении квантовых поправок использовать технику суперграфов. Это в свою очередь означает явное сохранение суперсимметрии также и на стадии вычислений. Соответствующие правила Фейнмана для суперграфов приведены в подпараграфе 3.4.

Индекс расходимости произвольного суперграфа в  $N = 1$  суперсимметричной электродинамике, регуляризованной высшими производными, найден в параграфе 4. Из полученного результата следует, что вне зависимости от формы регуляризирующего слагаемого, в теории присутствуют остаточные однопетлевые расходимости. Для их устранения необходимо воспользоваться какой-либо вспомогательной регуляризацией.

В качестве таковой была выбрана регуляризация Паули-Вилларса. В параграфе 5 детерминанты Паули-Вилларса включаются в производящий функционал, что позволяет при соответствующем выборе кинетического члена полей Паули-Вилларса регуляризовать все однопетлевые диаграммы, включая диаграммы с контрчленными вставками на линиях суперполей материи. При этом важно иметь в виду, что хотя расходимости могут присутствовать в отдельных диаграммах с петлями полей Паули-Вилларса, данная регуляризация подразумевает сокращение расходимостей после суммирования всех диаграмм (в соответствующем разделе будет показано, что так оно и есть), поэтому нет необходимости в какой-либо еще дополнительной регуляризации. Суперсимметрия такой вспомогательной регуляризацией не нарушается. Наконец, в заключении параграфа 5 формулируются правила Фейнмана для полей Паули-Вилларса.

Определение ренормгрупповых функций, интересующих нас при исследовании проблемы аномалий, вынесено в параграф 6. Вначале дается определение аномальной размерности суперполей материи. Затем определяется  $\beta$ -функция, пропорциональная аномалии следа тензора энергии-импульса. Из рассмотрения дивергенции супертока  $J_\mu$ , а также из того, что в силу теоремы Адлера-Бардина аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, следует, что такая  $\beta$ -функция должна полностью определяться однопетлевым приближением (аномалия следа и аномалия аксиального тока входят в один супермультиплет). В конце параграфа 6 определяется функция Гелл-Манна-Лоу. Показывается, что в случае, если производящий функционал не зависит от точки нормировки, ее определение эквивалентно определению  $\beta$ -функции (для безмассовой теории, которая исследуется в диссертации).

Вычисления ренормгрупповых функций проводятся в **главе 2**. Основным ее результатом являются выражения для двухпетлевой функции Грина суперполей материи и трехпетлевой функции Грина калибровочного поля, по которым затем строятся выражения для аномальной размерности и  $\beta$ -функции.

В параграфе 1 подробно рассмотрены однопетлевые вычисления этих величин, что позволяет проиллюстрировать весьма нетривиальную технику суперграфов. Найдены однопетлевые контрчлены, необходимые для устранения расходимостей в эффективном действии.

Параграф 2 посвящен вычислению двухпетлевой функции Грина суперполей материи. Установлено (подпараграф 2.1), что если в однопетлевые контрчлены добавлять слагаемое с высшими производными, аномальная размерность оказывается независимой от формы регуляризующего слагаемого, однако зависит от отношения масс полей Паули-Вилларса  $M_i$  к параметру регуляризации  $\Lambda$  (имеется в виду регуляризация высшими производными). Устранить эту зависимость можно, добавив в действие некоторые конечные контрчлены, зависящие от отношения  $M_i/\Lambda$ . Использовать такую схему вычитаний (когда аномальная размерность не зависит ни от одного из параметров регуляризации) удобно, но не обязательно; никакого существенного влияния на дальнейшие вычисления это оказывать не будет. Проверка правильности полученного результата для аномальной размерности осуществлена при помощи метода ренормгруппы в подпараграфе 2.2. Возможность такой проверки связана с тем, что в перенормируемых теориях дважды логарифмические расходимости полностью определяются однопетлевыми контрчленами, которые нам уже известны.

Один из главных результатов данной работы получен в параграфе 3: здесь вычислена трехпетлевая функция Грина калибровочного суперполя при использовании регуляризации высшими производными. Показано, что двух- и трехпетлевой вклады в  $\beta$ -функцию, пропорциональную аномалии следа, равны нулю, что находится в полном соответствии со структурой супермультиплета аномалий и не приводит к проблеме аномалий (в отличие от аналогичного результата, полученного при использовании регуляризации методом размерной редукции). При этом сумма диаграмм, не содержащих контрчленных вставок на линиях суперполей материи, дает в  $\beta$ -функцию вклад, представляющий собой точную  $\beta$ -функцию Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова. Однако этот вклад полностью сокращается диаграммами с контрчленными вставками, и результат оказывается чисто однопетлевым. В качестве одной из проверок правильности полученного результата использовалось сокращение всех

неинвариантных вкладов в эффективное действие.

В главе 3 анализируются причины различия результатов для схемнонезависимой двухпетлевой  $\beta$ -функции, полученных при использовании регуляризации высшими производными и размерной редукцией. Дается решение проблемы аномалий в  $N = 1$  суперсимметричной электродинамике, регуляризованной высшими производными.

Параграф 1 посвящен описанию регуляризации методом размерной редукции. Здесь рассматриваются проблемы, возникающие из-за математической противоречивости данного метода, и возможные способы их решения. Показывается, что в рамках размерной редукции аномалия аксиального тока не может быть вычислена непротиворечивым образом. Это указывает на неприменимость метода к исследованию проблемы аномалий в суперсимметричных теориях.

В параграфе 2 указывается на то, что регуляризация высшими производными свободна от противоречий, присущих методу размерной редукции, и позволяет правильно вычислить аномальный вклад в  $\beta$ -функцию, который на диаграммном языке представляет собой сумму контрчленных диаграмм со вставками на линиях суперполей материи.

Оказывается, что сумма указанных диаграмм в методе размерной редукции равна нулю, в то время как при регуляризации высшими производными она отлична от нуля и сокращает вклад остальных диаграмм. В параграфе 3 показывается, что сумма контрчленных диаграмм на самом деле тесно связана с аномалией Кониши, которая не может быть корректно вычислена в методе размерной редукции. Здесь проиллюстрирована связь между аномалией Кониши и аксиальной аномалией, а именно установлена справедливость утверждения: если в суперсимметричной теории аксиальная аномалия равна нулю, то с необходимостью равна нулю и аномалия Кониши (а значит и сумма диаграмм с контрчленными вставками). Но именно это и имеет место в методе размерной редукции: в силу математической противоречивости этого метода вычисления аксиальной аномалии приводят к неправильному нулевому результату (если не накладывать никаких дополнительных условий типа  $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(BA)$  и т.п.) Таким образом, внутренняя противоречивость размерной редукции не позволяет правильно вычислить аномальный вклад в  $\beta$ -функцию и приводит к проблеме аномалий.

Наконец, в параграфе 4 предлагается решение проблемы аномалий. Пропорциональная аномалии следа  $\beta$ -функция при использовании непротиворечивой регуляризации высшими производными оказалась чисто однопетлевой, что находится в соответствии со структурой

супермультиплета аномалий. В то же время  $\beta$ -функция Гелл-Манна-Лоу, связанная с перенормированным эффективным действием, как здесь показано, имеет поправки во всех порядках теории возмущений. Однако это не противоречит структуре супермультиплета аномалий, так как производящий функционал, использованный при вычислениях, зависит от точки нормировки в силу наличия в теории аномалии масштабирования. Это означает, что данные две  $\beta$ -функции не эквивалентны друг другу, поэтому структура петлевых вкладов в функцию Гелл-Манна-Лоу не противоречит теореме Адлера-Бардина. Затем в этой главе указывается на две возможности определить независимый от точки нормировки производящий функционал. При этом оказывается, что в этом случае либо ни одна из бета-функций не является пропорциональной аномалии следа тензора энергии-импульса, либо нарушается структура супермультиплета аномалий. Поэтому в обоих случаях проблемы аномалий не возникает, так как бета-функция больше не должна быть однопетлевой. В заключение параграфа 4 рассматривается связь данного решения проблемы аномалий с решениями, предлагавшимися ранее в литературе.

**В приложения** вынесены технические детали вычислений.

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработан метод вычисления квантовых поправок в  $N = 1$  суперсимметричных теориях с использованием регуляризации высшими ковариантными производными. Этот метод является внутренне непротиворечивым, не нарушает суперсимметричную инвариантность (в том числе и в высших петлях), а также позволяет самосогласованным образом вычислять аномалии в суперсимметричных теориях.
2. С помощью вышеуказанного метода впервые были вычислены двухпетлевая аномальная размерность и трехпетлевая  $\beta$ -функция в  $N = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике, регуляризованной высшими производными.
3. Доказано, что в трехпетлевом приближении вклад в  $\beta$ -функцию, пропорциональную аномалии следа тензора энергии-импульса, в

используемой регуляризации является чисто однопетлевым, тогда как функция Гелл-Манна-Лоу совпадает с точной  $\beta$ -функцией Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова.

4. Показано, что в рамках предложенного метода вычисления квантовых поправок в суперсимметричных теориях, регуляризованных высшими производными, структура супермультиплетов аномалий не противоречит структуре вкладов высших петель в  $\beta$ -функцию.
5. На основе полученных результатов решена проблема аномалий в  $N = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамике.

## ПУБЛИКАЦИИ

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. А.А.Солошенко и К.В.Степаньянц, Двухпетлевая  $\beta$ -функция  $N = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных // ТМФ, 2002, т. 131, с. 135 – 147.
2. А.А.Солошенко и К.В.Степаньянц, Двухпетлевая аномальная размерность  $N = 1$  суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных // ТМФ, 2003, т. 134, с. 430 – 446.
3. А.А.Солошенко и К.В.Степаньянц, Трехпетлевая  $\beta$ -функция  $N = 1$  суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными // ТМФ, 2004, т. 140, с. 437 – 459.
4. А.А.Солошенко и К.В.Степаньянц, Квантовые поправки в  $N = 1$  суперсимметричной электродинамике, регуляризованной высшими производными // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия, 2004, № 4, с. 17 – 20.