На правах рукописи

Цветков Игорь Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНО-РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И КИРАЛЬНОЙ СРЕД

01.01.03 — математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Москва, 2003

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Моденов Владимир Павлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, Елкин Николай Николаевич.
	кандидат физико–математических наук, Лопушенко Владимир Васильевич.
Ведущая организация:	Московский государственный университет электроники и математики.

Защита диссертации состоится "___" __________ 2004 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета К 501.001.17 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:

119899, г. Москва, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ауд. N ______.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан "___" __________ 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 501.001.17
доктор физико–математических наук П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы Активное освоение сверхвысокочастотного диапазона длин волн и потребности практики вызвали необходимость теоретических и экспериментальных исследований электромагнитных волноводно-резонансных процессов.

Математическое моделирование и вычислительный эксперимент представляют мощный инструмент анализа этих процессов. В прикладной электродинамике замена физического эксперимента вычислительным особенно эффективна, так как уравнения Максвелла и граничные условия дают достаточно точные модели электродинамических явлений.

Широкое внедрение численных методов решения краевых задач электродинамики, опирающееся на современную математическую базу и вычислительную технику, привело к созданию эффективных математических моделей волноводно-резонансных процессов.

Диссертация посвящена рассмотрению математических моделей, построенных с помощью строгого метода решения краевых волноводных задач - неполного метода Галеркина, и моделей эквивалентных граничных условий импедансного типа, описывающих азимутально-гофрированную и неидеально проводящую граничную поверхности.

В диссертации решаются актуальные вопросы разработки и математического обоснования созданных на основе этих моделей наиболее общих и универсальных вычислительных алгоритмов, позволяющих исследовать волноводно-резонансные процессы и физические свойства сред, описываемых материальными уравнениями, связывающими векторы электрической и магнитной индукции с векторами напряженности как электрического, так и магнитного полей.

Импедансная модель эквивалентных граничных условий оказывается весьма эффективной при исследовании высокодобротных волноводно-диэлектрических резонансов (ВДР) в направляющих системах с потерями и нерегулярной границей.

Задача уменьшения потерь в различных волноведущих и резонансных структурах является традиционно важной, актуален поиск физических явлений и эффектов, приводящих к подобному уменьшению.

Определенные возможности дает использование аномалии затухания волн H_{0n} в круглом волноводе. Выбирая радиус достаточно большим, можно получить сколь угодно малое затухание. Такой путь используется при создании линий дальней волновой связи и представляет интерес для СВЧ-энергетики. Однако он имеет один существенный недостаток: волновод используется в многомодовом режиме, то есть в условиях возможности распространения большого количества паразитных волн - в силу неизбежного наличия нерегулярностей волновода (изгибы, стыки, деформации) рабочая волна типа H_{0n} трансформируется в паразитные волны, имеющие значительное затухание. В результате общие потери возрастают и выигрыша в затухании не происходит. Поэтому возникает проблема подавления паразитных мод, иными словами - разрежения спектра собственных волн круглого волновода. Один из путей ее решения - использование кольцевых волноводов, а также мелкопериодических гофр на внутренней поверхности волновода.

Для достижения высокой добротности резонатора можно выбрать в качестве рабочего определенный тип колебаний (например, использование мод типа "шепчущей галереи").

Большое значение в плане уменьшения потерь в СВЧ-системах имеет оптимизация формы волноводов и резонаторов. Здесь можно выделить два направления поисков. Первое заключается в создании такой конфигурации, при которой электромагнитное поле "повисает" в пространстве, минимально касаясь стенок и наводя в них уменьшенные поверхностные токи. В качестве примера можно привести скругление углов прямоугольного волновода. Второе направление поисков состоит в подборе формы таким образом, чтобы обеспечивалось эффективное разрежение спектра собственных волн, в частности подавление низших типов волн.

Большого внимания заслуживает идея использования для уменьшения потерь гофрированных (гребенчатых) волноводов и резонаторов. Теоретически и экспериментально было показано, что потери HE_{11}-волны в волноводе, в котором период и глубина гофр достаточно велики (порядка четверти длины волны), уменьшаются примерно на порядок. Этот эффект получил название *эффекта аномально малого затухания*.

И, наконец, еще один путь создания волноводов и резонаторов с малыми потерями заключается в использовании диэлектрических вставок специальной формы, то есть в переходе от металлических к металлодиэлектрическим системам. Идея такого подхода состоит в том, чтобы введением диэлектрической вставки вызвать перераспределение собственного поля, приводящее к отжатию последнего от металлических стенок и уменьшению потерь в них.

Учет потерь в стенках волновода (резонатора) делает соответствующие граничные условия несамосопряженными, что обуславливает актуальность применения несамосопряженных краевых задач для расчета реальных электродинамических систем.

Как правило, такие задачи решались методами теории возмущений и, следовательно, потери учитывались приближенно. При исследовании волноводно-резонансных процессов требования к точности решения соответствующих задач Штурма-Лиувилля с несамосопряженными граничными условиями третьего рода возрастают.

Рассматриваемый в диссертации метод редукции этих задач к задаче Коши позволяет проводить их решение с заданной точностью.

В 80-е годы XX века активно начали изучаться электродинамические свойства искусственных композиционных материалов. К таким материалам относятся и киральные среды, содержащие зеркально-асимметричные элементы.

В настоящее время большой интерес представляет изучение процессов распространения и рассеяния электромагнитного поля на киральных структурах. Это связано, прежде всего, со специфическими свойствами рассеяния электромагнитных волн на объектах с киральными включениями.

Явление киральности как проявление асимметрии правого и левого наблюдается в различных областях науки, в том числе, в физике. Например, известному ученому Луи Пастеру удалось молекулярной асимметрией объяснить природу оптической активности кристаллов. Это послужило началом изучения оптических свойств гиротропных сред.

Киральная среда моделируется, чаще всего, из отрезков металлических или керамических спиралей, расположенных в изотропной среде. Одним из самых важных свойств киральной среды является оптическая активность, выражающаяся в поведении поляризации волн в такой среде. А именно, при прохождении плоско-поляризованной электромагнитной волны через киральную среду наблюдается поворот плоскости поляризации этой волны. Некоторую аналогию можно провести с магнитной оптической активностью, когда вращение плоскости поляризации вызвано внешним магнитным полем.

Главным отличием, с математической точки зрения, киральной среды от обычной изотропной является форма материальных уравнений: векторы электрической и магнитной индукций связаны как с напряженностью электрического, так и магнитного полей.

Такой вид материальных уравнений делает перспективным разработку и применение математического аппарата, хорошо себя зарекомендовавшего при изучении распространения электромагнитных колебаний в гиротропных волноводах, при исследовании физических свойств волноведущих структур с киральным заполнением.

В связи с постоянно увеличивающимся интересом к применению киральных сред в физике и технике СВЧ чрезвычайно важным представляется развитие соответствующего математического аппарата, позволяющего эффективно численно решать краевые задачи для системы уравнений Максвелла с материальными уравнениями киральной среды.

Из научных проблем, решаемых в области электродинамики и оптики киральных сред, наиболее актуальны две основные: нахождение параметров киральной среды по физическим параметрам среды - элементов частиц и по параметрам ее пространственной структуры, а также решение задач излучения, дифракции и распространения волн в киральных средах, антенных и волноведущих структурах при условии, что материальные уравнения для киральных сред известны.

Цель работы Целью настоящей работы является разработка математического аппарата и его применение для математического моделирования волноводно-резонансных свойств диэлектрических и киральных сред.

Научная значимость и новизна работы Впервые численно решена задача Штурма-Лиувилля об исследовании собственных поперечных колебаний в цилиндрическом диэлектрическом волноводе с импедансной боковой поверхностью.

Впервые выполнена математическая постановка краевой задачи для системы уравнений, описывающей волноводно-резонансные свойства киральной среды.

Для решения этой задачи предложена и обоснована модифицированная схема метода Галеркина. Решена задача о прохождении плоской волны через киральный слой.

Практическая ценность работы Практическая ценность полученных результатов связана со значительным интересом к созданию высокодобротных волноводно-диэлектрических резонаторов. Разработанные алгоритмы и программы позволяют оптимизировать создание резонаторов с гребенчатым экраном.

Применение может найти идея введения гребенчатого экрана для повышения добротности мод типа "шепчущей галереи", для которых проявляется эффект аномально малого поглощения.

Очень перспективным представляется использование киральных включений при реализации сверхбыстрых логических операций по обработке пространственно модулированных электромагнитных волн СВЧ-диапазона, а также создание на основе материалов, обладающих киральными свойствами, малоотражающих покрытий. Разработанная в диссертации схема метода Галеркина позволяет исследовать влияние кирального заполнения в волноводе на поведение электромагнитных волн. Эта схема может быть обобщена для случая биизотропной среды.

Апробация работы Результаты диссертации докладывались на Всероссийской научно-технической конференции "Инженерно-технические проблемы новой техники" (Москва, 1998), VI Международной научно-технической конференции "Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ" (Самара, 1999), VII Всероссийской школе-семинаре "Волновые явления в неоднородных средах" (Красновидово, МО, 2000), XII Всероссийской школе-конференции по дифракции и распространению волн (Москва, 2001).

Публикации Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[7].

Структура диссертации Диссертация состоит из введения, краткого содержания, трех глав и списка литературы, состоящего из 100 наименований. Общий объем диссертации — 101 страница.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** выделен круг вопросов, охваченных диссертацией; рассмотрено современное состояние рассматриваемых в диссертационной работе вопросов и обоснована их актуальность, кратко изложено содержание работы, ее цели, научная новизна и практическая ценность. Введено понятие киральной среды и рассмотрены различные методы ее описания. Производится обзор литературы по данному вопросу.

Материальные уравнения для киральных сред имеют вид:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{D} = \left(\varepsilon_a + \mu_a \xi^2\right) \overrightarrow{E} - j\mu_a \xi_{ca} \overrightarrow{H}, \\ \overrightarrow{B} = \mu_a \overrightarrow{H} + j\mu_a \xi_{ca} \overrightarrow{E}, \end{array} \tag{1}$$

где μ_a, ε_a - абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемости киральной среды ($\varepsilon_a = \varepsilon\rho_0$), ξ_{ca} – абсолютный киральный адмитанс.

Уравнения Максвелла для киральной среды в случае гармонических процессов выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{l} rot\overrightarrow{H} = jk\left(\frac{\beta(\xi)}{\rho_0}\overrightarrow{E} - j\mu\xi\overrightarrow{H}\right), \\ rot\overrightarrow{E} = -jk\left(\mu\rho_0\overrightarrow{H} + j\mu\xi\overrightarrow{E}\right), \end{array} \qquad (2)$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\beta(\xi) = \varepsilon + \mu\xi^2$, ε, μ -относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости киральной среды, $\xi = \xi_{ca}\rho_0$ - относительный киральный адмитанс.

<u>Глава 1</u> посвящена математическому моделированию процессов в волноводе с диэлектрическим заполнением.

В §1 проведена математическая постановка задач, возникающих при нахождении постоянных распространения волн вблизи частоты отсечки и собственных частот поперечного резонанса в круглом и кольцевом резонаторах.

В §2 получено дисперсионное уравнение для мод круглого цилиндрического волновода с импедансной боковой поверхностью.

Используя представление электромагнитного поля через потенциалы Герца, импедансные граничные условия и геометрию волновода, получено дисперсионное уравнение в виде:

$$\Delta(\lambda) = [M_n(\lambda a) - h_1] \cdot [M_n(\lambda a) - h_2] - f(\lambda) = 0, \qquad (3)$$

где введены следующие обозначения:

$$M_n(\lambda a) = \frac{J_n'(\lambda a)}{\lambda a J_n(\lambda a)}, \qquad f(\lambda) = \left(\frac{n\gamma}{ka\lambda^2}\right)^2, \qquad (4)$$

$$h_1 = \frac{1}{ikaZ}, \qquad h_2 = \frac{-1}{ikaY}. \qquad (5)$$

Здесь a - радиус волновода, Y, Z - граничные импедансы. Полученное дисперсионное уравнение (3) относительно функции $M_n(\lambda a)$ является квадратичным алгебраическим и, следовательно, распадается на два уравнения, описывающие "квази-H" и "квази-E" моды. Вблизи критической частоты $\gamma \to 0$ $f(\lambda) \to 0$, получаем два независимых предельных дисперсионных уравнения:

$$M_n(\lambda a) = h_1, \quad M_n(\lambda a) = h_2, \qquad (6)$$

определяющих комплексные собственные значения λ соответственно для EH-мод и HE-мод.

В §3 показано, что исследование собственных колебаний магнитного типа (НЕ-моды) вблизи критических частот круглого и коаксиального волноводов с импедансными боковыми поверхностями сводится к третьей краевой задаче на собственные значения для уравнения Бесселя в круге:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d^2R_n(\lambda r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dR_n(\lambda r)}{dr}+\left(\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n(\lambda r)=0, & r\in[0,a], \\ |R_n(0)|<\infty, & \\ -\frac{ikY}{\lambda^2}\frac{dR_n(\lambda r)}{dr}|_{r=a}=R_n(\lambda r)|_{r=a}, & \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$H_z|_{r=a}=YE_\varphi|_{r=a}, \quad (8)$$

и кольце:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d^2R_n(\lambda r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dR_n(\lambda r)}{dr}+\left(\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n(\lambda r)=0, & r\in[a,b], \\ -\frac{ikY_a}{\lambda^2}\frac{dR_n(\lambda r)}{dr}|_{r=a}=R_n(\lambda r)|_{r=a}, & \\ \frac{ikY_b}{\lambda^2}\frac{dR_n(\lambda r)}{dr}|_{r=b}=R_n(\lambda r)|_{r=b}, & \end{array}\right\} \quad (9)$$

$$H_z|_{r=a}=Y_aE_\varphi|_{r=a}, \qquad H_z|_{r=b}=Y_bE_\varphi|_{r=b}. \quad (10)$$

В §4 проведено исследование кольцевого аксиально-симметричного диэлектрического резонатора. Подобный волновод может быть заменен цилиндрическим волноводом, на боковой поверхности которого при $r=a$ ставится эквивалентное граничное условие импедансного типа с импедансом, соответствующим плоскопараллельной диэлектрической пластинке:

$$Y=\frac{Z^e}{W_0}=i\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-1}}ctg(k\delta\sqrt{\varepsilon-1}), \quad (11)$$

$\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''$ - диэлектрическая проницаемость материала, $k-$ волновое число в среде с проницаемостью ε'. Условием применимости указанных импедансных граничных условий является соотношение: $k\delta\gg 1$.

Из (7) следует, что $R_n(\lambda r)=J_n(\lambda r)$, а из граничных условий находим дисперсионное уравнение для λ:

$$M_n(\lambda a)=h_1, \quad (12)$$

где $M_n(z)=\frac{J_n'(z)}{zJ_n(z)}$, $h_1=\bar{h}+i\bar{\bar{h}}=i\frac{1}{kaY}=i\frac{1}{ka}\frac{Z^e}{W_0}$. Функция $M_n(z)$ обладает так называемым дифференциально-параметрическим свойством :

$$M_n'(z)=-[\ \lambda M_n^2(z)+\frac{2}{z}M_n(z)+\frac{1}{z}-\frac{n^2}{z^3}\ ]=P(M_n(z)), \quad (13)$$

то есть возможностью представления производной этой функции в виде некоторого полинома P от самой функции и ее аргументов. Применяя метод дифференцирования по параметру, приходим к задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\beta h}{1+2ht+(\beta ht)^2-n^2/\beta^2}, \\ \beta(0) = j'_{n,m}, \quad \beta = \lambda a, \end{cases} \tag{14}$$

$J'_n(j'_{n,m}) = 0$. Интегрируя это уравнение, находим λ и добротность поперечного резонанса по известной формуле: $Q = \frac{Re(\lambda)}{2Im(\lambda)}$.

Производя численно указанное интегрирование, найдено оптимальное значение $k\delta$, при котором величина добротности максимальна.

В §5 проведено исследование коаксиального металло- диэлектрического резонатора.

Рассмотрим двумерный коаксиальный резонатор, представляющий собой диэлектрическое кольцо $r \in [a-\delta, a]$ и аксиально- симметричный азимутально-гребенчатый экран радиуса $r = b$. Высота гребенки D, период гофра d, действительная часть поверхностного импеданса металла ReZ_s .

В приближении импедансной модели граничные условия задачи (9) запишем для импеданса:

$$Y_b = \frac{ReZ_s}{W_0}\frac{1}{cos^2(kD)}\left[1+\frac{D}{d}\left(1-\frac{sin(2kD)}{2kD}\right)\right] - i\cdot tg(kD), \tag{15}$$

где W_0 - волновое сопротивление вакуума и импеданса Y_a , определяемого по формуле (11). Метод решения этой задачи во многом аналогичен методу, используемому в предыдущем пункте.

Введем обозначения: $M_n(z) = \frac{R'_n(Z)}{R_n(Z)}$, $\Gamma_i = -\frac{1}{ikY_a}$, $\Gamma_e = \frac{1}{ikY_b}$. Заметим, что уравнение Бесселя для $R_n(z)$, записывается в терминах $M_n(z)$: $M'_n(z) = -M_n^2(z) - \frac{1}{z}M_n(z) - \left(1-n^2/z^2\right)$, то есть $M_n(z)$ обладает уже встречавшимся нам дифференциально-параметрическим свойством. Тогда (9) примет вид:

$$\begin{cases} M'_n(z) = -M_n^2(z) - \frac{1}{z}M_n(z) - \left(1-n^2/z^2\right), \quad z = \lambda r, \\ M_n(\lambda a) + \Gamma_i\lambda = 0, \\ M_n(\lambda b) + \Gamma_e\lambda = 0. \end{cases} \tag{16}$$

В полной аналогии с изложенным в предыдущем пункте, параметризуем каждое из граничных условий системы (16), например, следующим способом:

$$M_n(\lambda(t)r) + \lambda(t)t\Gamma_{i,e} = 0, \quad r = a, b. \tag{17}$$

Путем дифференцирования (17), считая известным собственное значение λ_0 задачи:

$$\begin{cases} M_n'(z) = -M_n^2(z) - \frac{1}{z}M_n(z) - \left(1 - n^2/z^2\right), \quad z = \lambda r, \\ M_n(\lambda a) = 0, \\ M_n(\lambda b) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

которая соответствует коаксиальному резонатору с бесконечно проводящими стенками, и, учитывая дифференциально-параметрическое свойство функции $M_n(z)$, приходим к следующим задачам Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{-\Gamma_i \zeta}{2\Gamma_i t - a\left[\ (\zeta\Gamma_i t)^2 + 1 - (m/ka)^2\ \right]}, \\ \zeta(0) = \lambda_0, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{-\Gamma_e \lambda}{2\Gamma_e t - b\left[\ (\lambda\Gamma_e t)^2 + 1 - (m/kb)^2\ \right]}, \\ \lambda(0) = \zeta(1), \end{cases} \tag{20}$$

последовательно решая которые, находим сначала собственное значение задачи

$$\begin{cases} M_n'(z) = -M_n^2(z) - \frac{1}{z}M_n(z) - \left(1 - n^2/z^2\right), \quad z = \lambda r, \\ M_n(\lambda a) + \Gamma_i \lambda = 0, \\ M_n(\lambda b) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

физически являющееся поперечным волновым числом коаксиала с диэлектрическим цилиндром внутри и бесконечно проводящим экраном снаружи, а затем и интересующее нас собственное значение для (16), совпадающее с собственным значением для (9).

Расчеты проводились для волн с высокими азимутальными числами (волны типа "шепчущей галереи")

Показано, что вариацией размера гофра можно добиться увеличения добротности в 10^3 раз по сравнению с гладкостенным резонатором. Это убедительно подтверждает эффективность использования гофрированной боковой поверхности, для которой при определенной ее геометрии для мод типа "шепчущей галереи" достигается эффект аномально малого поглощения в металлическом экране.

В §6 рассматривается определение параметров резонатора по его электродинамическим характеристикам.

Рассмотрен цилиндрический резонатор радиуса a, высоты l с импедансными стенками ($\frac{1}{Y} = -Z = Z_s$).

В предположении малости абсолютной величины импеданса найдена асимптотика продольного волнового числа:

$$\gamma = \gamma_0 - \tfrac{2i}{l}\tfrac{k}{\gamma_0}Z_s. \tag{22}$$

Здесь $\gamma_0 = \frac{\pi n}{l}$ соответствует продольному волновому числу цилиндрического резонатора без потерь.

Зная геометрию волновода, можно получать оценки поверхностного импеданса стенок, то есть исследовать и с высокой точностью определять физические свойства материала.

В §7 рассматривается схема метода Галеркина для расчета электромагнитного поля в волноводе, заполненном диэлектрической средой.

Считаем, что вне диэлектрического тела заполнение волновода однородно и изотропно. Целью является построение алгоритма для определения амплитуд отраженных и прошедших волн, рассеянных гиротропным включением, при падении на него произвольной волны незаполненного волновода. В качестве способа возбуждения выбрана нормальная волна бесконечно удаленного участка, распространяющаяся из $-\infty$. В такой постановке задача заключается в решении системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right] &= -ik\overrightarrow{D}, \\ \left[\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E}\right] &= ik\overrightarrow{B}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\overrightarrow{D} = \hat{\varepsilon}\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B} = \hat{\mu}\overrightarrow{H}$, $k = \frac{w}{c}$ (временная зависимость взята в виде e^{-iwt}) с однородным граничным условием на стенке волновода:

$$\left[\overrightarrow{n}_0, \overrightarrow{E}\right]\Big|_{\Sigma_{S_0}} = 0,$$

($\overrightarrow{n}_0$ - нормаль к Σ_{S_0}), и условиями сопряжения на границе диэлектрической пробки, заключающимися в требовании непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей, условиями на бесконечности:

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\overrightarrow{E}\\ \overrightarrow{H}\end{matrix}\right\}_{z\to-\infty} &= \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{-ih_m^{(1)}z}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{E}_{-m}(M)\\ \overrightarrow{H}_{-m}(M)\end{matrix}\right. + Ae^{ih_{m_0}^{(1)}z}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{E}_{m_0}(M)\\ \overrightarrow{H}_{m_0}(M),\end{matrix}\right. \\ \left.\begin{matrix}\overrightarrow{E}\\ \overrightarrow{H}\end{matrix}\right\}_{z\to+\infty} &= \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{ih_m^{(2)}z}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{E}_{m}(M)\\ \overrightarrow{H}_{m}(M),\end{matrix}\right. \end{aligned} \tag{24}$$

где $\left\{\overrightarrow{E}_m(M), \overrightarrow{H}_m(M)\right\} e^{ih_m^{(1,2)}}$ - нормальные волны пустого волновода, соответствующие бесконечно удаленным участкам волновода. Эту задачу будем называть задачей (A) .

Задача (A) методом Галеркина сведена к задаче (B) для приближенного решения $\left\{\overrightarrow{H}^N, \overrightarrow{E}^N\right\}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}_t^N(M,t) = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n^N(z)\overrightarrow{E}_{nt}(M), \quad E_z^N = -\frac{1}{ik}\left(\overrightarrow{\nabla}, \frac{\tilde{\overrightarrow{H_t}}^N}{\varepsilon_z}\right), \\ \overrightarrow{H}_t^N(M,t) = \sum\limits_{n=1}^{N} B_n^N(z)\overrightarrow{H}_{nt}(M), \quad H_z^N = \frac{1}{ik}\left(\overrightarrow{\nabla}, \frac{\tilde{\overrightarrow{E_t}}^N}{\mu_z}\right), \\ \frac{d}{dz}A_m^N(z) = \sum\limits_{n=1}^{N} b_{nm}B_n^N(z), \\ \frac{d}{dz}B_m^N(z) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_{nm}A_n^N(z), \\ A_m^N(0) + B_m^N(0) = 2A\delta_{mm_0}, \\ A_m^N(d) - B_m^N(d) = 0, \qquad m = \in [1, N], \end{cases}$$

a_{mn}, b_{mn} вычисляются через интегралы по поперечному сечению волновода от функций полей $\left\{\overrightarrow{E}_{nt}, \overrightarrow{H}_{mt}\right\}$. Приближенные коэффициенты прохождения и отражения определяются следующим образом:

$$\begin{cases} A_m^N(-\infty) = P_m^N, \\ A_m^N(+\infty) = T_m^N. \end{cases} \tag{25}$$

Показано, что коэффициенты T_m^N, P_m^N и $\overrightarrow{E}^N, \overrightarrow{H}^N$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\begin{gathered} Re\sum_{m=1}^{N}\left\{\beta_m\left|P_m^N\right|^2 + \beta_m\left|T_m^N\right|^2\right\} + k\cdot Im\int\limits_V \left(\mu_0\left|H^N\right|^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon_0\left|E^N\right|^2\right)dv + Re\beta_{m_0}\left|P_{m_0}^N - \frac{\beta_{m_0}}{Re\beta_{m_0}}A\right|^2 = \frac{\left|\beta_{m_0}\right|^2}{Re\beta_{m_0}}\left|A\right|^2, \end{gathered} \tag{26}$$

на основе которого доказывается разрешимость задачи (B) и ограниченность ее решения.

В **Главе 2** рассматриваются волноводные свойства киральной среды.

В §1 рассчитан коэффициент прохождения электромагнитной волны через киральный слой. Поля внутри слоя ищем в виде: $\overrightarrow{E}(y,z) = e^{-ikpy}\overrightarrow{E}(z)$, $\overrightarrow{H}(y,z) = e^{-ikpy}\overrightarrow{H}(z)$, где $p = sin(\vartheta)$, ϑ - угол падения плоской волны на границу раздела сред. Тогда левые части уравнений

Максвелла примут вид:

$$rot\overrightarrow{E}(y,z) = \left\{-ikpE_z(z) - \frac{dE_y(z)}{dz}, \frac{dE_x(z)}{dz}, ikpE_x(z)\right\},$$
$$rot\overrightarrow{H}(y,z) = \left\{-ikpH_z(z) - \frac{dH_y(z)}{dz}\frac{dH_x(z)}{dz}, ikpH_x(z)\right\}. \tag{27}$$

Записывая (2) покомпонентно, выражая продольные компоненты поля через поперечные и вводя обозначения: $\alpha = -2\mu\xi i\frac{p}{\varepsilon\mu-p^2}$, $\gamma = \frac{i}{k}\frac{p}{\varepsilon\mu-p^2}$, $\zeta = i\xi\alpha(p+\frac{\mu\varepsilon}{p}) + \frac{p^2}{\mu} - \mu\xi^2 - \beta(\xi)$, придадим (27) компактный вид:

$$\begin{cases} \gamma E_y'' + \alpha E_x' - ikpE_y = 0 \\ \frac{1}{k^2\mu}E_x'' + \frac{2\xi}{k}E_y' + \zeta E_x = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Граничные условия ставим исходя из парциальных условий излучения:

$$E_x'(z) + ik\cdot cos(\vartheta)E_x(z) = 2ikA\cdot cos(\vartheta),$$
$$E_y'(z) + ik\cdot cos(\vartheta)E_y(z) = 0, \qquad z\in(-\infty;0),$$

$$E_x'(z) - ik\cdot cos(\vartheta)E_x(z) = 0,$$
$$E_y'(z) - ik\cdot cos(\vartheta)E_y(z) = 0, \qquad z\in(d;\infty),$$

где A - амплитуда падающей волны. Полученная система нормализована и решена методом дифференциальной прогонки. Показано, что при определенных условиях киральная среда обеспечивает больший коэффициент прохождения плоской волны, чем аналогичная диэлектрическая среда.

§2 посвящен нахождению постоянной распространения волны в цилиндрическом волноводе с заполнением из киральной среды. Задача определения постоянной распространения сводится к краевой задаче для уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \left[\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}\right] - ik\left(\frac{\beta(\xi)}{\rho_0}\overrightarrow{E} - i\mu\xi\overrightarrow{H}\right) = 0, \\ \left[\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}\right] + ik\left(\mu\rho_0\overrightarrow{H} + i\mu\xi\overrightarrow{E}\right) = 0, \\ \left[\overrightarrow{n_0}\times\overrightarrow{E}\right]|_{C_s} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Пусть $\overrightarrow{A} = \{A_r, A_\varphi, A_z\}$- некоторый вектор. Положим $\overrightarrow{A_t} = \{A_r, A_\varphi, 0\}$, $\tilde{\overrightarrow{A_t}} = \{A_\varphi, -A_r, 0\}$. Систему (29) перепишем в виде двух систем для продольных и поперечных компонент поля; выражая продольные компоненты через поперечные и учитывая регулярность волновода вдоль оси z, имеем задачу на собственные значения:

$$
\begin{cases}
i\frac{\beta(\xi)}{k\mu\varepsilon}\frac{1}{\rho_0}\left[\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla},\tilde{\overrightarrow{E_t}}\right)\overrightarrow{i_z}\right]-\frac{\xi}{k\varepsilon}\left[\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla},\tilde{\overrightarrow{H_t}}\right)\overrightarrow{i_z}\right]+\\
+\lambda\left[H_t\times\overrightarrow{i_z}\right]-ik\left(\frac{\beta(\xi)}{\rho_0}\overrightarrow{E_t}-i\mu\xi\overrightarrow{H_t}\right)=0,\\
\\
\frac{\xi}{k\varepsilon}\left[\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla},\tilde{\overrightarrow{E_t}}\right)\overrightarrow{i_z}\right]-\frac{i\rho_0}{k\varepsilon}\left[\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla},\tilde{\overrightarrow{H_t}}\right)\overrightarrow{i_z}\right]-\\
-\lambda\left[\overrightarrow{E_t}\times\overrightarrow{i_z}\right]-ik\left(\mu\rho_0\overrightarrow{H_t}+i\mu\xi\overrightarrow{E_t}\right)=0.
\end{cases}
\tag{30}
$$

Применительно к этой системе построена модифицированная схема неполного метода Галеркина; проведены вычисления комплексных значений постоянных распространения некоторых мод для волноводов прямоугольного и кругового поперечного сечения. Интересным оказалось поведение второй невырожденной моды в прямоугольном волноводе с увеличением кирального адмитанса. При $\xi = 0$ данная мода соответствует волне H_{10}. Параметры счета были подобраны так, чтобы для рассматриваемой моды волновод был запредельным. Показано, что при некотором значении кирального адмитанса затухающая мода становится распространяющейся.

Глава 3 посвящена математическому моделированию волноводно-резонансных свойств киральной среды.

§1 посвящен исследованию волноводно-резонансных свойств киральной среды, заполняющей круглый волновод на конечном участке его длины.

Задача об определении постоянной распространения сводится к краевой задаче для уравнений Максвелла (29) с однородным граничным условием на стенке волновода и условиями сопряжения на границе киральной пробки, заключающимися в требовании непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей, условиями на бесконечности.

Введены в рассмотрение задачи, аналогичные задачам (A), (B) главы 1, § 7. Сформулирована основная теорема.

Теорема. *Пусть задача (A) разрешима и компоненты ее решения* $\left\{\overrightarrow{E},\overrightarrow{H}\right\}$ *вместе с первыми производными принадлежат пространству* $L_2(\Omega)$. *Тогда, решение задачи (B) сходится в среднем к решению задачи (A).*

Показано, что для аналога задачи (B) справедливо соотношение:

$$\sum_{m=1}^{N}\left\{Re\beta_m\left|P_m^N\right|^2+Re\beta_m\left|T_m^N\right|^2\right\}+k\cdot Im\int_V\left(\mu\rho_0\left|H^N\right|^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta(\xi)}{\rho_0}\left|E^N\right|^2\right)dv+Re\beta_{m_0}\left|P_{m_0}^N-\frac{\beta_{m_0}}{Re\beta_{m_0}}A\right|^2=\frac{\left|\beta_{m_0}\right|^2}{Re\beta_{m_0}}\left|A\right|^2, \tag{31}$$

являющееся основным для определения свойств решения задачи (B); из этого соотношения следует:

1. Однородная задача (B) имеет только тривиальное решение. Отсюда, в силу общих свойств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что неоднородная система разрешима и ее решение единственно.

2. Решение задачи (B) - поле $\left\{\overrightarrow{E}^N,\overrightarrow{H}^N\right\}$ - удовлетворяет условиям ограниченности, равномерным по N:

$$Re\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\left|P_m^N\right|^2<C,\quad Re\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\left|T_m^N\right|^2<C, \tag{32}$$

$$\int_V\left|\overrightarrow{E}^N\right|^2dv<C,\quad \int_V\left|\overrightarrow{H}^N\right|^2dv<C, \tag{33}$$

причем константа C не зависит от номера N, а определяется лишь способом возбуждения среды.

Показано, что вектор-функции:

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathcal{E}}^N=\overrightarrow{E}-\overrightarrow{E}^N,\\ \overrightarrow{\mathcal{H}}^N=\overrightarrow{H}-\overrightarrow{H}^N,\end{cases} \tag{34}$$

определенные как разность между соответствующими векторами решений задач (A) и (B) , удовлетворяют соотношению:

$$Re\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left|\hat{P}_m\right|^2+\left|\hat{T}_m\right|^2\right\}+kIm\int_V\left(\mu\rho_0\left|\overrightarrow{\mathcal{H}}_t^N\right|^2+\frac{\beta(\xi)}{\rho_0}\left|\overrightarrow{\mathcal{E}}_t^N\right|^2\right)dv=$$
$$=-kIm\left(\int_{z_1}^{z_2}\sum_{m=N+1}^{\infty}\left(D_mA_m^*-C_m^*B_m\right)dz+i\mu\xi\overrightarrow{H}_t^N\overrightarrow{E}_t^{*R_N}+\right.$$
$$\left.+\left(\mu\rho_0\right)^*\overrightarrow{H}_t^{*N}\overrightarrow{H}_t^{R_N}-\frac{\beta(\xi)}{\rho_0}\overrightarrow{E}_t^N\overrightarrow{E}_t^{*R_N}-\left(i\mu\xi\right)^*\overrightarrow{E}_t^{*N}\overrightarrow{H}_t^{R_N}\right), \tag{35}$$

здесь:

$$\hat{P}_m=\begin{cases}P_m-P_m^N,\ \ m\in[1,N],\\ P_m,\ \ m\in[N+1,\infty),\end{cases}\qquad \hat{T}_m=\begin{cases}T_m-T_m^N,\ \ m\in[1,N],\\ T_m,\ \ m\in[N+1,\infty),\end{cases} \tag{36}$$

$$\overrightarrow{E}_t^{R_N} = \sum_{m=N+1}^{\infty} \hat{A}_m \overrightarrow{E}_{mt}(M), \;\; \overrightarrow{H}_t^{R_N} = \sum_{m=N+1}^{\infty} \hat{B}_m \overrightarrow{H}_{mt}(M).$$

Доказано, что при $N \to \infty$ правая часть (35) может быть сделана сколь угодно малой, что влечет сходимость в среднем решения задачи (B) к решению задачи (A) .

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Выполнена математическая постановка краевой задачи для системы уравнений Максвелла с материальными уравнениями диэлектрической и киральной сред в цилиндрической области с граничными условиями первого рода.

2. Предложен и математически обоснован численный алгоритм решения этой краевой задачи, основанный на модифицированной схеме неполного метода Галеркина. Доказана теорема о сходимости в среднем приближенного численного решения к точному решению рассматриваемой краевой задачи.

3. С помощью данного вычислительного алгоритма решена задача на собственные значения в теории цилиндрического волновода, заполненного киральной средой.

4. Численно решена задача о прохождении плоской электромагнитной волны через слой киральной среды. Обнаружено, что при определенных условиях киральная среда обеспечивает больший коэффициент прохождения волны, чем аналогичная диэлектрическая.

5. На основе импедансной модели произведена математическая постановка задачи Штурма-Лиувилля с несамосопряженным граничным условием третьего рода, описывающей поперечный резонанс в круглом диэлектрическом волноводе с азимутально-гребенчатым неидеально проводящим экраном. Дано решение этой задачи методом редукции к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и численно исследованы ее комплексные собственные значения. Изучены волноводно-диэлектрические резонансы.

6. Численно показано, что использование эффекта аномально малого затухания мод типа "шепчущей галереи" диэлектрического волновода с азимутально гребенчатым экраном позволяет повысить добротность поперечного резонанса на несколько порядков.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Моденов В.П., Цветков И.В.* Резонансные свойства аксиально-симметричных волноводов. // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ.-1998.-Т6,N1-2(21).-С.73-80.

2. *Моденов В.П., Цветков И.В.* Математическое моделирование высокодобротных СВЧ-резонаторов. // В Кн.: Инженерно-физические проблемы новой техники. Тез. докл. М: Изд-во МГТУ.-1998.-С.244-245.

3. *Моденов В.П., Цветков И.В.* О прохождении электромагнитной волны через киральный слой. // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ.-1999.-Т7,N3.-С.10.

4. *Моденов В.П., Цветков И.В.* Электродинамика волновода, заполненного киральной средой. // Тр. VII Всероссийской школы-семинара "Волновые явления в неоднородных средах". М: Изд-во физ. ф-та МГУ.-2000.-Т2.-С.4-5.

5. *Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В.* Расчет волноводов, заполненных киральной средой. // Тр. XII Всероссийской школы-конференции по дифракции и распространению волн. М: Изд-во Моск. физ.тех. ун-та.-2001.-Т2.-С.405-406.

6. *Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В.* Расчет цилиндрических волноводов, заполненных киральной средой. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы.-2002.-Т5,N2.-С.56-58.

7. *Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В.* Электродинамический расчет волноводов, заполненных киральной средой.
// Электродинамика СВЧ, КВЧ и оптических частот.-2002.-Т10, N2(34).-С.66-70.