

На правах рукописи

КОНЮШЕНКО Валерий Вячеславович

**МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ТЕОРИИ
ПЛОСКОГО НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА**

01.01.03 – математическая физика

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва 2004

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор В.П. Моденов.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А. Б. Самохин,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник В.В. Лопушенко

Ведущая организация: Московская государственная академия
приборостроения и информатики (МГАПИ)

Защита состоится "___" _____ 2004 г. в ___ ч ___ мин. на заседании
Диссертационного совета К 501.001.17 при Московском государственном университете
им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, ГСП-2, Ленинские горы д.1, МГУ,
Физический факультет, аудитория _____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ им. М.В.
Ломоносова.

Автореферат разослан "___" _____ 2004г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

П.А. Поляков.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Исследование коротковолновой части сантиметрового и миллиметрового диапазона привело к изучению новых волноводных явлений, в частности резонансных. В этом диапазоне волн очень важным является требование к точности проводимых расчетов. Размеры волноводных неоднородностей становятся сравнимы с длиной волны, вследствие чего важную роль играет анализ высших типов волн и их взаимодействий, что не может быть описано достаточно точно с помощью асимптотических методов. Поэтому на первый план выходит разработка и обоснование методов решения волноводных задач в строгой электродинамической постановке. Математическая модель часто гораздо глубже эксперимента позволяет раскрыть и исследовать свойства физического объекта, получить количественные характеристики, что позволяет практически полностью исключить проектное экспериментирование и снизить время разработок.

Не умаляя роли и значения физического эксперимента, следует отметить, что информация, полученная в результате расчетов на ЭВМ, как решение строгой электродинамической задачи, часто оказывается значительно полнее соответствующих данных физического эксперимента.

В последнее время теория волноводов интенсивно развивается, о чем, в частности, свидетельствует огромное количество научных работ по исследованию различных волноведущих систем и разработке методов расчета этих систем.

Ряд важнейших вопросов математической теории волноводов был разработан А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским, Г.В. Кисунько, П.Е. Краснушкиным, Л.А. Вайнштейном, Б.З. Каценеленбаумом, А.Г. Свешниковым и др.

Типичная математическая постановка краевых задач теории волноводов заключается в нахождении решения дифференциальных уравнений в частных производных, удовлетворяющего граничным условиям и условиям излучения на бесконечности. В общем случае все три оператора, определяющие уравнение, граничные условия и условия излучения, могут быть несамосопряженными.

В случае если оператор, задающий граничные условия является самосопряженным, то и спектральная задача, как правило, тоже является самосопряженной, её собственные функции ортогональны и образуют базис в соответствующем данной задаче функциональном пространстве.

Если оператор, задающий граничные условия в исходной электродинамической краевой задаче является несамосопряженным, то и соответствующая спектральная задача также является несамосопряженной.

Граничное условие третьего рода с малым по модулю комплексным параметром называется "слабо несамосопряженным" граничным условием.

Одним из примеров такой модели является модель импедансного волновода. Она позволяет с единых позиций исследовать самые различные неконсервативные волноведущие системы (волноводы с неидеальной проводимостью стенок, спиральные, гофрированные и гребенчатые волноводы и т.д.). Наряду с классическими импедансными граничными условиями Шукина-Леонтовича существуют и условия, заменяющие электродинамические условия на моделируемых поверхностях. Эти импедансные условия в общем случае являются несамосопряженными.

Математическое моделирование волноводов на основе эквивалентных граничных импедансных условий потребовало создания и разработки эффективных математических методов решения возникающих при этом несамосопряженных краевых задач.

Повышенный интерес к частично заполненным волноводам объясняется тем, что, изменяя вид заполнения и диэлектрическую или магнитную проницаемость заполняемого материала, можно в широких пределах управлять различными характеристиками волноведущей системы (постоянной распространения, критическими длинами волн, распределением потока энергии и т.д.). Данная возможность является принципиальной основой для конструирования миниатюрных и широкополосных устройств СВЧ диапазона.

В тоже время наиболее интересная с физической точки зрения область исследования находится вблизи резонансной частоты, где наиболее сильно сказывается неоднородность заполнения и потери, возникающие в неоднородности и стенках волновода. Все это требует строгого, с учетом потерь, решения соответствующей электродинамической задачи.

В данной работе рассматривалась задача дифракции в плоском волноводе с нерегулярностями двух видов: неоднородным диэлектрическим заполнением и импедансными разрывными граничными условиями на поверхности волновода.

Таким образом, актуальным является разработка математических методов решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с разрывными "слабо несамосопряженными" граничными условиями третьего рода и переменными коэффициентами.

Цель диссертационной работы является исследование:

- математическими методами краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с разрывными несамосопряженными граничными условиями и переменными коэффициентами;
- постоянных распространения плоского градиентного волновода;

- импедансной модели сверхпроводников на примере открытого конфокального резонатора с цилиндрическими зеркалами.

Основные положения, выносимые на защиту:

- модифицированные, с учетом условия Мейкснера, схемы метода Галеркина, ориентированные на решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с разрывными несамосопряженными граничными условиями третьего рода и с переменными коэффициентами;
- математическое обоснование, численное исследование и практическая реализация на примере рассмотренной краевой задачи предложенных схем метода Галеркина;
- применение решения данной краевой задачи при математическом моделировании электромагнитных колебаний в плоском волноводе с неоднородным диэлектрическим заполнением и импедансными граничными условиями;
- схема ортогонального метода Галеркина и импедансная модель сверхпроводников в решении задачи на собственные значения для плоского градиентного волновода со сверхпроводящей стенкой;
- исследование импедансной модели сверхпроводящих пленок в задаче расчета открытых резонаторов, образованных цилиндрическими зеркалами прямоугольной формы из материалов конечной проводимости.

Научная и практическая значимость данной работы вытекает из актуальности темы и полученных результатов. Поставлена и решена математическая задача дифракции электромагнитного поля в плоском нерегулярном волноводе с импедансной границей и диэлектрическим заполнением. Для решения этой задачи предложены и обоснованы модифицированные схемы неполного и ортогонального методов Галеркина с учетом условия Мейкснера в точках разрыва граничных условий.

Впервые рассмотрена схема ортогонального метода Галеркина при решении задачи на собственные значения плоского градиентного волновода с импедансной стенкой.

Приведенные в диссертации модифицированные схемы метода Галеркина могут быть применены на практике для решения задач дифракции в плоском волноводе с неоднородным заполнением и импедансными граничными условиями. Численные результаты математического моделирования представляют физический интерес и позволяют сделать вывод как о возможности изучения свойств различных физических объектов, таких как биообъекты, полупроводники, сверхпроводники в волноводах, так и о возможности изменения выходных характеристик таких устройств путем изменения свойств соответствующих физических объектов. Работа может найти применение в теории

импедансной модели плоского волновода с диэлектрическим заполнением, которая описывает широкий класс физических явлений (волноводно-резонансных, диссипативно-резонансных, аномально малого поглощения, переходного излучения, фазовой коррекции и др.).

Достоверность и обоснованность результатов. Предлагаемые в диссертации вычислительные методы математически строго обосновываются. При практической реализации этих методов точность вычислений контролировалась. Некоторые из полученных результатов сравнивались с экспериментальными и численными данными, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных и Всероссийских конференциях и семинарах:

- IV Всероссийская научно-техническая конференция "Состояние и проблемы технических измерений". Москва. Декабрь. 1997.
- Пятая Всероссийская Научная Конференция студентов-физиков и молодых ученых ВНКСФ-5. Екатеринбург. Апрель 1999.
- VI Международная научно-техническая конференция "Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ". Самара. Сентябрь. 1999.

а также на семинарах кафедры математики.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 102 страниц, список литературы из 126 наименований и 34 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ

Первая глава диссертации посвящена исследованию модифицированной схемы неполного метода Галеркина¹ в теории плоского нерегулярного волновода.

В первом параграфе этой главы рассмотрена строгая постановка задачи дифракции электромагнитных волн в плоском нерегулярном волноводе, с импедансными граничными условиями и диэлектрической неоднородностью, с учетом выполнения проекционных условий сшивания, обеспечивающих как непрерывность полей, так и выполнение условия Мейкснера (ограниченности поля вблизи особой точки).

Математическая задача заключается в нахождении решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta_{x,z}u + k^2 \varepsilon(x,z)u = 0, (k = \frac{\omega}{c}) \quad (1)$$

в полосе $\{-\infty < z < +\infty, 0 < x < l\}$, $\varepsilon(x,z)$ – в общем случае, комплекснозначная кусочно-непрерывная функция координат, равная 1 вне участка $0 \leq z \leq d$.

Это решение должно удовлетворять:

- граничным условиям Дирихле на верхней и нижней границах за исключением конечного участка $x = l; 0 < z < d$:

$$u_{x=0} = u_{x=l}; \quad = 0, \quad z < 0; z > d \quad (2)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + u \Big|_{x=l} = 0, \quad 0 < z < d, \quad (|\alpha| \ll 1),$$

где $\alpha = -\frac{Z}{ik}$ – приведенный импеданс (заданная комплекснозначная функция координаты z),

- условиям сопряжения, заключающимся в требовании непрерывности функции $u(x,z)$ и её нормальной производной $(\frac{\partial}{\partial n})$ на линиях разрыва $\varepsilon(x,z)$ и на границах нерегулярного участка

$$[u]_{z=0; z=d} = 0, \quad (3)$$
$$[\frac{\partial u}{\partial z}]_{z=0; z=d} = 0, \quad 0 < x < l,$$

- условиям Мейкснера в особых точках

¹ Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина // ДАН СССР. – 1977. – Т.236, №5. – С.1076-1079.

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{C_\rho} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dl = 0$, где C_ρ – например, окружность радиуса ρ с центром в особой

точке,

- условиям на бесконечности:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= A \exp(i\gamma_{n0}z) \varphi_{n0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \exp(-i\gamma_n z) \varphi_n(x), \quad z < 0; \\ u(x, z) &= B \exp(-i\gamma_{n0}z) \varphi_{n0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \exp(i\gamma_n z) \varphi_n(x), \quad z > d, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ – система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \varphi_n''(x) + \mu_n^2 \varphi_n(x) = 0, \\ \varphi_n(0) = 0, \\ \varphi_n(l) = 0; \end{cases}$$

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \mu_n^2}.$$

R_n, T_n – коэффициенты отражения и прохождения нормальных волн.

При этом условия Мейкснера эквивалентны следующим условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} u^* dx \Big|_{z=-0} &= \operatorname{Im} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} u^* dx \Big|_{z=+0}, \\ \operatorname{Im} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} u^* dx \Big|_{z=d-0} &= \operatorname{Im} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} u^* dx \Big|_{z=d+0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, математическая задача сводится к нахождению решения $u(x, z)$ уравнения Гельмгольца (1) в прямоугольнике $\{0 < x < l, 0 < z < d\}$ с условиями (2-5).

При этом приближенное решение ищется в виде

$$u^N(x, z) = \sum_{n=1}^N S_n^N(z) \varphi_n(x). \quad (6)$$

При этом коэффициенты $S_n^N(z)$ удовлетворяют следующему уравнению

$$\int_0^l (\Delta_{x,z} u^N + k^2 \varepsilon(x, z) u^N) \varphi_n(x) dx = -(u^N + \alpha \frac{\partial u^N}{\partial n}) \cdot \varphi_n' \Big|_{x=l; 0 \leq z \leq d} \quad (7)$$

Условия проекционного сшивания, обеспечивающие выполнение условий Мейкснера, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l (u^{N*}|_{z=-0} - u^{N*}|_{z=+0}) \varphi_n(x) dx = 0, \\
& \int_0^l \left(\frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=-0} - \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=+0} \right) \varphi_n(x) dx = 0, \\
& \int_0^l (u^{N*}|_{z=d-0} - u^{N*}|_{z=d+0}) \varphi_n(x) dx = 0, \\
& \int_0^l \left(\frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=d-0} - \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=d+0} \right) \varphi_n(x) dx = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Тогда условия проекционного сшивания переходят в парциальные условия в сечениях $z = 0$ и $z = d$.

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(\frac{\partial u^N}{\partial z} + i\gamma_n u^N \right) \varphi_n(x) dx = 2i\gamma_{n0} A \frac{l}{2} \delta_{n,n0}, \quad z = 0, \\
& \int_0^l \left(\frac{\partial u^N}{\partial z} - i\gamma_n u^N \right) \varphi_n(x) dx = -2i\gamma_{n0} B \frac{l}{2} \delta_{n,n0}, \quad z = d.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для коэффициентов $S_n^N(x)$ получаем краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{d^2}{dz^2} S_m^N(z) = \sum_{n=1}^N \alpha_{mn}(z) S_n^N(z); \\
& \frac{d}{dz} S_m^N(0) + i\gamma_m S_m^N(0) = 2i\gamma_m A \delta_{m1}; \\
& \frac{d}{dz} S_m^N(d) - i\gamma_m S_m^N(d) = -2i\gamma_m B \delta_{m1}; \\
& (m = 1, \dots, N),
\end{aligned} \right\} \tag{10}$$

где

$$\alpha_{mn}(z) = \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \delta_{mn} - k^2 \frac{2}{l} \int_0^l \varepsilon(x, z) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \alpha \frac{2}{l} (-1)^n \frac{n\pi}{l} (-1)^m \frac{m\pi}{l}.$$

Обсуждение условий Мейкснера проводится впервые. Следуя логике работ А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского² получаем энергетическое соотношение для точного и приближенного решений:

² Ильинский А.С., Свешников А.Г. Метод исследования нерегулярных волноводов с импедансными граничными условиями // ДАН СССР. – 1967. – Т. 176, №2. – С. 255-258.

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_n^N \{ \gamma_n |S_n(0)|^2 + \gamma_n |S_n(d)|^2 \} + \gamma_{n0} |S_{n0}(0) - 2A|^2 + \gamma_{n0} |S_{n0}(d) - 2B|^2 + \\
& + \gamma_{n0} |S_{n0}(0)|^2 + \gamma_{n0} |S_{n0}(d)|^2 + 2k^2 \frac{2}{l} \int_D \text{Im} \varepsilon |u^N|^2 dV + 2 \text{Im} \alpha \frac{2d}{l} \int_0^l \left| \frac{\partial u^N}{\partial x} \right|^2 dz \Big|_{x=l} \quad (11) \\
& = 4\gamma_{n0} |A|^2 + 4\gamma_{n0} |B|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом имеет место следующая теорема.

Теорема. Решение задачи (1-5) существует и единственно, при этом приближенное решение, построенное по модифицированной схеме неполного метода Галеркина (6-10), сходится к точному в пространстве L_2 .

Отличительная особенность модифицированной схемы неполного метода Галеркина заключается в разложении решения по собственным функциям волновода с идеальными стенками.

В третьем параграфе на примере задачи с неоднородным заполнением проведено сравнение с экспериментальными и численными данными, полученными другими методами (метод интегральных уравнений, метод нормальных волн). В ходе численного эксперимента изучалось влияние поглощения в диэлектрике на распределение поля внутри и вне его, а также влияние поглощения на резонансные свойства таких систем.

На Рис.1 представлен график зависимости коэффициента пропускания $Z_{\text{прош}} = 10 \lg |T_1|^2$ (в дБ) от частоты при различных значениях мнимой части диэлектрической проницаемости кремния (0, 0.01, 0.1) для плоского волновода ($l = 20$ мм) с включением из кремния ($\varepsilon = 9.6$) в виде квадрата ($10 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$), находящегося на расстоянии 4 мм от стенки.

Было изучено влияние потерь в полупроводнике на частотную резонансную кривую коэффициентов отражения и прохождения. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности модуляции сигнала на заданной резонансной частоте путем изменения электродинамической характеристики полупроводника – мнимой части диэлектрической проницаемости, например, фотовоздействием.

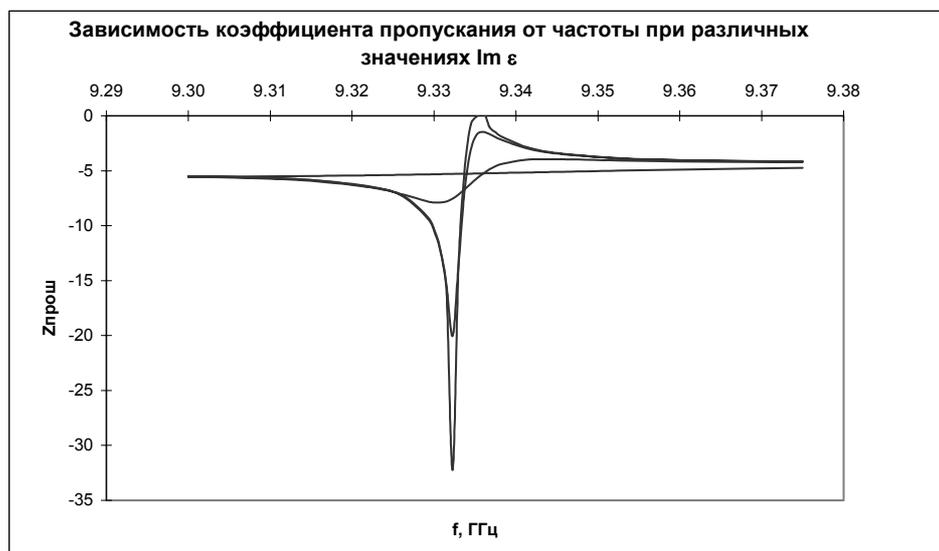


Рис. 1

Другая часть численного моделирования была посвящена волноводному электромагнитному зондированию биообъектов. Проблемы, связанные с исследованием взаимодействия электромагнитного поля с биообъектами, являются актуальными как для биоэнергоинформатики, так и для современной практики биомедицинских исследований и лечебно-диагностических технологий.

Метод волноводного электромагнитного зондирования (ВЭМЗ) биообъекта использует принцип аэродинамической трубы (волновода) и основан на анализе различной способности биологических тканей поглощать и рассеивать электромагнитное поле, определяемой основной физической величиной биообъекта - комплексной диэлектрической проницаемостью.

Диэлектрическая проницаемость является, в общем случае, кусочно-гладкой комплекснозначной функцией координат. Каждой такой функции соответствует определенная картина электромагнитного поля (линий уровня) внутри и вне биообъекта. И наоборот: по рассчитанному или измеренному электромагнитному полю вблизи биообъекта можно, например, найти распределение диэлектрической проницаемости биообъекта и сравнить с функциональной нормой.

Таким образом, результаты исследования методом ВЭМЗ позволяют изучить пространственное распределение диэлектрической проницаемости биообъекта, а также сделать вывод о степени поглощения мощности СВЧ поля облучения в биологических тканях и другой диагностической информации, содержащейся в характеристиках рассеянного электромагнитного поля.

В данной работе метод ВЭМЗ применялся для волноводов прямоугольного поперечного сечения миллиметрового диапазона. Рассматривался случай диэлектрического

включения в форме цилиндра с образующей, параллельной узким стенкам волновода, и высотой, равной расстоянию между широкими стенками волновода.

Для численного решения на ПЭВМ соответствующей краевой задачи использовался проекционный метод Галеркина, позволяющий проводить расчеты для произвольной переменной диэлектрической проницаемости в сечении, перпендикулярном оси цилиндрического заполнения.

При анализе биообъекта рассматривался плоский волновод ($l = 20\text{mm}$), заполненный на конечном участке его длины ($0 < z < d = 10\text{mm}$) биологической средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 7 + 0.01i$ (что соответствует диэлектрической проницаемости костной ткани). Внутри данной среды помещалось однородное тело с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 61.45 + 25.53i$, равной диэлектрической проницаемости воды, в форме прямоугольника (размером 6.67 на 1.67 mm), большая сторона которого совпадает с границей $z = 0$.

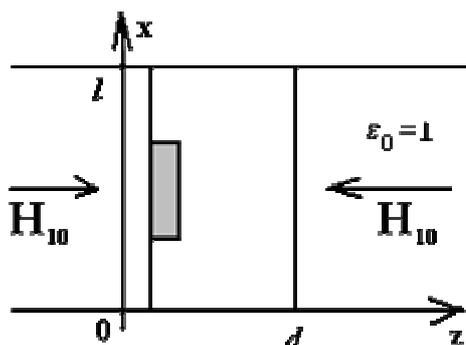


Рис. 2

Зондирование рассматриваемого биообъекта проводилось нормальными волнами H_{10} с частотой 12.204 ГГц.

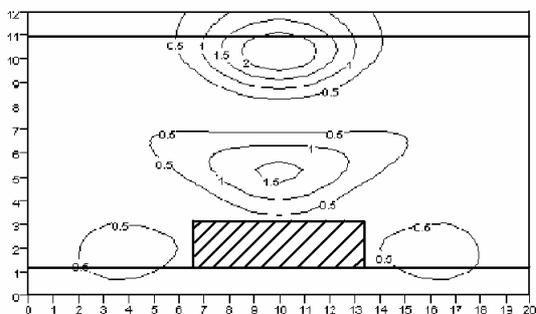


Рис. 3

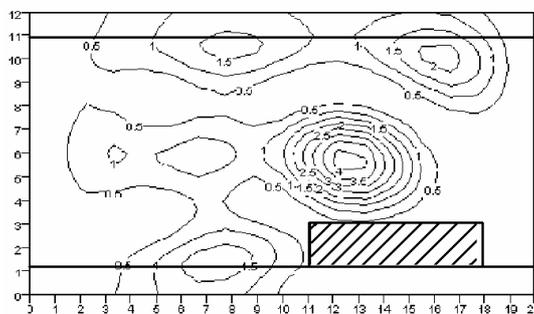


Рис. 4

На рис. 3, 4 приведены линии уровня функции $|u(x,z)|^2$, определяющие мощность СВЧ поля, соответственно для случаев симметричного и асимметричного расположения диэлектрического тела, что позволяет исследовать влияние положения диэлектрического тела на распределение мощности электромагнитного поля внутри и вне биообъекта.

Рис. 4, 5, 6 характеризуют влияние $\text{Im} \varepsilon_2$ на характер распределения поля внутри и вне биообъекта при асимметричном расположении.

На рис. 5, 6 приводятся кривые распределения мощности СВЧ поля вне биообъекта, для диэлектрических тел с $\text{Im} \varepsilon_2 = 25.53$ и $\text{Im} \varepsilon_2 = 10$ соответственно.

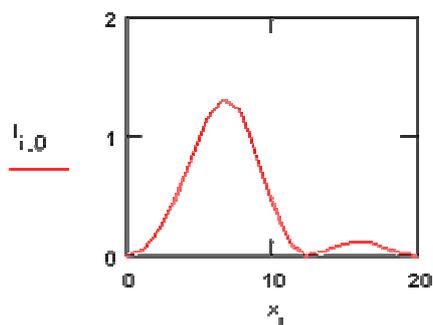


Рис. 5

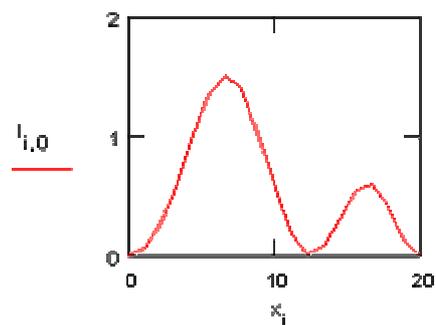


Рис. 6

Как видно из этих рисунков с уменьшением $\text{Im} \varepsilon_2$ величина максимумов кривых увеличивается, а относительная величина этих максимумов уменьшается.

Результаты данного математического моделирования были подтверждены численными данными, полученными методом интегральных уравнений.

Математическим моделированием установлена возможность исследования свойств биологического объекта по распределению электромагнитного поля внутри и вне биообъекта, помещенного в волновод.

Метод ВЭМЗ может найти применение при изучении гидратации широкого класса биообъектов и органических веществ, при диагностике заболеваний внутренних органов методом компьютерной электроструктурографии, в гипертермии, СВЧ-терапии и т.п.

Изучение свойств таких объектов, как биообъекты и полупроводники, представляющих повышенный интерес для физических приложений, показало возможность их эффективного изучения волноводно-резонансными методами, рассмотренными в диссертации.

Вторая глава посвящена применению ортогонального метода Галеркина³ для решения задачи на собственные значения плоского градиентного волновода с импедансной границей.

³ Моденов В.П. Метод Галеркина в несамосопряженных краевых задачах теории волноводов // ЖВММФ. – 1987. – Т.27, №1 – С.144-149.

Первый параграф этой главы посвящен использованию ортогонального метода Галеркина для решения краевых задач теории волноводов с несамосопряженными граничными условиями. Исследуются свойства собственных функций краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля с несамосопряженным граничным условиям третьего рода:

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0, & x \in (0, l) \\ X_n(0) = 0, \\ \alpha \cdot X_n'(l) + X_n(l) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

При выполнении условия невырожденности спектра собственных значений $(l + l\alpha^2 \lambda_n^2 + \alpha \neq 0)$ в комплексном пространстве с псевдоскалярным произведением имеют место следующие свойства собственных функций: ортогональность, отличие от нуля

квадрата псевдо нормы $(\|X_n\|^2 = \langle X_n, X_n \rangle = \int_0^l X_n^2 dx = \frac{l + l\alpha^2 \lambda_n^2 + \alpha}{2 \cdot (1 + \alpha^2 \lambda_n^2)})$, базисность,

равносходимость. В силу базисности собственных функций каждая функция $f(x) \in L_2(0, l)$ единственным образом разлагается в ряд по собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n(x). \quad (13)$$

Этот ряд является равномерно равносходящимся с рядом Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям $\varphi_n(x)$ соответствующей (при $\alpha = 0$) самосопряженной краевой задачи⁴

$$\begin{cases} \varphi_n''(x) + \mu_n^2 \varphi_n(x) = 0, & x \in (0, l) \\ \varphi_n(0) = 0, \\ \varphi_n(l) = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq l} \left| \sum_{n=1}^N \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n(x) - \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n(x) \right| = 0. \quad (14)$$

Условие невырожденности спектра собственных значений определяет класс рассматриваемых задач, которые мы будем называть "слабо несамосопряженными".

Для нахождения собственных значений используется ДП-метод⁵, предложенный и развитый В.П. Моденовым. Этот метод основан на идее введения параметра и дифференцирования по этому параметру. При этом задача нахождения собственных

⁴ Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. Думка. – 1977. – 329с.

⁵ Моденов В.П. Дифференциально—параметрический метод // ДАН СССР. – 1987. – Т. 296, №3. – С.536-538.

значений сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью.

Второй параграф второй главы посвящен построению схемы ортогонального метода Галеркина в задаче на собственные значения в теории плоского градиентного диэлектрического волновода с импедансной границей.

Постоянная распространения является одной из важнейших характеристик волноведущих электродинамических устройств. Поэтому, разработке методов её расчета уделяется повышенное внимание. В основе многих методов лежит решение трансцендентного уравнения, что для сложных волноведущих систем связано с определенными трудностями. Поэтому, весьма перспективным оказывается использование различных проекционных методов. В данной работе применяется ортогональный метод Галеркина. Математическая задача заключается в нахождении собственных значений краевой задачи для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом в полосе, с условием первого рода на ее нижней границе и "слабо несамосопряженным" условием третьего рода на верхней границе этой полосы.

Решение краевой задачи проводилось ортогональным методом Галеркина. Приближенное решение искалось в виде конечного разложения по системе N собственных функций несамосопряженной краевой задачи Штурма-Лиувилля, собственные значения которой находились дифференциально-параметрическим методом (ДП-метод). Задача сводилась СЛАУ и к нахождению собственных значений матрицы размером $N \times N$ (где N – число учитываемых мод).

$$-\gamma_m^2 C_m = \sum_{n=1}^N (\lambda_m^2 \delta_{mn} - \frac{k^2}{\|X_m\|^2} \int_0^l \varepsilon(x) X_n(x) X_m(x) dx) C_n$$

или $\Lambda C = AC$, (15)

где C – столбец неопределенных коэффициентов размерности N , A – заданная матрица размером $N \times N$, а $\Lambda = -\gamma^2$ – столбец искомых собственных значений.

Решение по методу Галеркина сравнивалось с решением дисперсионного уравнения методом Ньютона для волновода со слоем из поликора и сверхпроводящей стенкой.

Таблица 1

Постоянные распространения	Метод Ньютона	Метод Галеркина
γ_1	$1.0181+1.0071 \cdot 10^{-5}i$	$1.0215+1.0015 \cdot 10^{-5}i$
γ_2	$1.5038 \cdot 10^{-5}+3.1802i$	$1.5042 \cdot 10^{-5}+3.1778i$
γ_3	$2.1582 \cdot 10^{-5}+5.5127i$	$2.1590 \cdot 10^{-5}+5.5112i$

Численный эксперимент показал, как хорошую внутреннюю сходимость ортогонального метода Галеркина, так и совпадение, с высокой точностью, полученных этим методом численных результатов с решением дисперсионного уравнения. В тоже время необходимо отметить, что в отличие от схем решения дисперсионных уравнений, применение схемы ортогонального метода Галеркина дает возможность рассчитывать постоянные распространения в волноводах с кусочно-непрерывным заполнением. Это позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования ортогонального метода Галеркина для расчета импедансных волноводов с диэлектрическим или иным заполнением, где сверхпроводящая стенка представлена через поверхностный импеданс сверхпроводника.

Третий параграф второй главы посвящен исследованию импедансной модели сверхпроводников на примере задачи о собственных значениях открытого конфокального резонатора с цилиндрическими зеркалами конечной проводимости. Данная работа была проведена совместно с В.Ф. Кравченко и Д.Г. Афониним [10]. Автор участвовал в теоретическом решении поставленной задачи, численной реализации и моделировании, анализе полученных результатов, а также частично в проведении физического эксперимента.

Сверхпроводящие волноводы и открытые резонаторы широко применяются в целом ряде приборов СВЧ техники. Использование СП систем позволяет осуществлять передачу энергии практически без потерь и искажений на значительные расстояния, конструировать микроволновые стандарты частоты на основе твердотельных и вакуумных генераторов⁶. Важной задачей является отыскание параметров и характеристик реальных волноводов, открытых резонансных структур, имеющих стенки, изготовленные из нормально проводящего материала с напыленным слоем сверхпроводника, сверхпроводящие стенки конечной толщины с учетом просачивания поля и сравнение полученных результатов с результатами для волноводов, резонаторов, имеющих массивные СП стенки и зеркала.

В работе рассмотрены колебания в открытых резонаторах, образованных софокусными цилиндрическими зеркалами прямоугольной формы из материалов с конечной

⁶ Кравченко В.Ф., Казаров А.Б. Поверхностный импеданс сверхпроводников и его применение в физике и технике // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи зарубежной радиоэлектроники. – 1997, №11. – С. 59-78.

проводимостью; для резонаторов с одно- и многослойными зеркальными покрытиями из нормально, низко- и высокотемпературных сверхпроводящих материалов получены и рассчитаны соотношения для спектра, добротности резонатора, распределения поля в резонансном объеме и плотности квазиповерхностного тока на зеркалах. Численные результаты для нормально проводящего металла сравнивались с экспериментом, выполненным на Физическом факультете МГУ (на кафедре радиофизики), и показали адекватность рассматриваемой модели.

Третья глава посвящена модифицированной схеме ортогонального метода Галеркина для решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с разрывными несамосопряженными граничными условиями третьего рода и переменными коэффициентами.

Постановка данной задачи эквивалента задаче, поставленной при рассмотрении схемы неполного метода Галеркина (1-5), для которой доказаны теоремы существования и единственности. Особенностью данной схемы является, с одной стороны, разложение решения по собственным функциям "слабо несамосопряженной" краевой задачи Штурма-Лиувилля (удовлетворяющим граничным условиям)

$$u^N(x, z) = \sum_{n=1}^N C_n^N(z) X_n(x),$$

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0, & x \in (0, l) \\ X_n(0) = 0, \\ \alpha \cdot X_n'(l) + X_n(l) = 0. & (|\alpha| \ll 1) \end{cases}, \quad (16)$$

а с другой стороны, строгий учет условий Мейкснера в особых точках. Последние следуют из выполнения условий проекционного сшивания:

$$\begin{aligned} \int_0^l (u^{N*} \Big|_{z=-0} - u^{N*} \Big|_{z=+0}) \varphi_n(x) dx &= 0 \\ \int_0^l \left(\frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=-0} - \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=+0} \right) X_n(x) dx &= 0 \\ \int_0^l (u^{N*} \Big|_{z=d-0} - u^{N*} \Big|_{z=d+0}) X_n(x) dx &= 0 \\ \int_0^l \left(\frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=d-0} - \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=d+0} \right) \varphi_n(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом для коэффициентов разложения $C_n(x)$ получаем краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2} C_m^N(z) &= \sum_{n=1}^N P_{mn}(z) C_n^N(z); \\
\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{d}{dz} C_n^N(0) \beta_{nm} + C_n^N(0) T_{nm} \right\} &= 2i\gamma_1 A \alpha_{1m}; \\
\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{d}{dz} C_n^N(d) M_{nm} + C_n^N(d) \beta_{nm} \right\} &= 2B e^{-i\gamma_1 d} \alpha_{1m} \\
(m = 1, \dots, N), &
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
P_{mn}(z) &= (\lambda_m)^2 \delta_{mn} - k^2 \frac{1}{\|X_m\|^2} \int_0^l \varepsilon(x, z) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx, \\
\alpha_{pm} &= \int_0^l \varphi_p(x) X_m(x) dx, \quad \beta_{nm} = \int_0^l X_n(x) X_m^*(x) dx, \\
T_{nm} &= \sum_{p=1}^N i\gamma_p \alpha_{pn}^* \alpha_{pm}, \quad M_{nm} = \sum_{p=1}^N \frac{-1}{i\gamma_p} \alpha_{pn}^* \alpha_{pm}.
\end{aligned} \quad (19)$$

В силу базисности системы функций "слабо несамосопряженной" краевой задачи Штурма-Лиувилля, существования и единственности решения данной задачи имеет место следующая теорема.

Теорема. Решение задачи (1-5), построенное по схеме ортогонального метода Галеркина, $u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z) X_n(x)$, существует, единственно и является равномерно сходящимся⁴ с решением, построенным по схеме неполного метода Галеркина,

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) \varphi_n(x):$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq l} \left| \sum_{n=1}^N C_n(z) X_n(x) - \sum_{n=1}^N S_n(z) \varphi_n(x) \right| = 0. \quad (20)$$

В третьем параграфе этой главы проведены численные эксперименты. Данные, рассчитанные по схеме неполного метода Галеркина, сравнивались с данными, полученными по схеме ортогонального метода Галеркина. Наличие импеданса (рассматривался импеданс сверхпроводника) заметно сказывается в области резонанса. При этом значения, полученные двумя различными методами, совпадают с высокой точностью, что свидетельствует о достоверности результатов.

Рассматривался плоский волновод ($l = 20 \text{ мм}$) с включением из поликора ($\varepsilon = 9.6$) в виде квадрата ($10 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$), находящегося на расстоянии 4 мм от идеально проводящей стенки. На верхней стенке волновода на конечном участке длины, соответствующем

включению, заданы импедансные граничные условия $\alpha = -1.30 \cdot 10^{-4} + i \cdot 5.92 \cdot 10^{-4}$. На рис.7 приведен график функции (кривая 1), представляющей зависимость коэффициента пропускания $Z_{прош} = 10 \cdot \log(|T|^2)$ от частоты для случая идеальной стенки в области резонансной частоты. Эта функция имеет локальный экстремум при $f \cong 9.33 ГГц$.

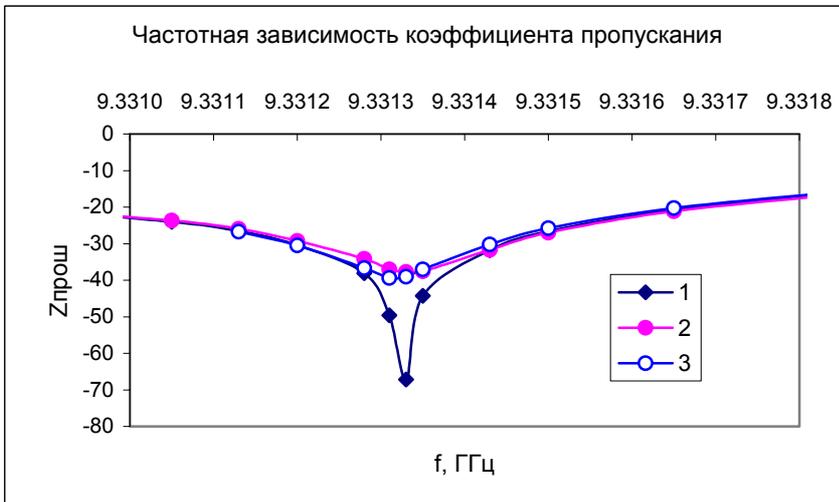


Рис.7

Вместе с кривой 1, соответствующей волноводу с идеальными стенками, приведены кривые для случая импедансной стенки. Наличие импеданса заметно сказывается в области резонанса и приводит к сглаживанию резонансной кривой. Кривая 2 получена с помощью модифицированной схемы неполного метода Галеркина, а кривая 3 представляет расчет по модифицированной схеме ортогонального метода Галеркина. Кривые 2 и 3 совпадают с высокой точностью.

Далее, рассмотрены резонансные свойства плоского волновода со сверхпроводящей стенкой. Изучалось влияние поверхностного импеданса сверхпроводника на резонансную частотную кривую коэффициента пропускания при дифракции на диэлектрической неоднородности.

Исследованные резонансные свойства плоского волновода со сверхпроводящей боковой поверхностью позволяют сделать вывод о возможности модуляции сигнала на резонансной частоте путем изменения характеристик сверхпроводника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации, полученные автором лично:

- предложены модифицированные (с учетом выполнения условий Мейкснера) схемы неполного и ортогонального методов Галеркина, ориентированные на решение краевых задач для уравнения Гельмгольца в полосе с разрывными несамосопряженными граничными условиями и с переменными коэффициентами.
- предложенные схемы математически обоснованы: доказано существование, единственность и сходимости приближенного решения, полученного по модифицированной схеме неполного метода Галеркина, к точному, а также равносходимость решений, построенных по двум модифицированным схемам метода Галеркина.
- на основе этих схем разработаны и реализованы, в виде ЭВМ программ, алгоритмы численного решения рассматриваемой краевой задачи.
- используя результаты решения данной задачи, исследованы некоторые физические свойства полупроводников, диэлектриков, биообъектов и сверхпроводников.
- схема ортогонального метода Галеркина применена при решении задачи на собственные значения для плоского градиентного волновода с несамосопряженным граничным условием импедансного вида, моделирующим сверхпроводящую стенку волновода, на основе импедансной модели сверхпроводников.

и совместно:

- проведено исследование импедансной модели сверхпроводников на примере задачи расчета открытых резонаторов, образованных цилиндрическими зеркалами прямоугольной формы из материалов конечной проводимости и проиллюстрирована адекватность математической модели реальному физическому эксперименту.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Моденов В.П., Конюшенко В.В. Метод Галеркина в задаче волноводного электромагнитного зондирования биообъектов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т.3, №4. – С.43-46.
2. V.P. Modenov, V.V. Konyushenko. Galerkin's Method in the Problem of Waveguide Electromagnetic Probing of Bioobjects // Electromagnetic Waves & Electronic Systems. – 1997. – Vol.2, No.6. – pp.51-54.
3. Моденов В.П., Конюшенко В.В. Ортогональный метод Галеркина в теории плоского импедансного волновода с кусочно-непрерывным заполнением // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. – 1999. – Т.7, №2. – С.16-17.
4. Конюшенко В.В., Моденов В.П. Метод расчета плоского нерегулярного волновода с импедансным разрывным граничным условием // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптического диапазона. – 2002. – №1. – С. 21-25.
5. Моденов В.П., Конюшенко В.В. Резонансные свойства плоского волновода со сверхпроводящей стенкой // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1999. – Т.4, №2. – С.66-69.
6. Конюшенко В.В., Моденов В.П. Вычисление постоянных распространения волн плоского градиентного диэлектрического волновода с импедансной границей // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2000. – №4. – С.36-37.
7. Моденов В.П., Конюшенко В.В. Математическое моделирование в волноводном методе диэлектromетрии биообъектов // в кн.: Состояние и проблемы технических измерений. Тезисы докл. IV Всероссийской научно-технической конференции. М.: МГТУ. – 1997. – С.92-93.
8. Конюшенко В.В. Волноводный метод в исследовании свойств биообъектов и сверхпроводников // в кн. Пятая Всероссийская Научная Конференция студентов-физиков и молодых ученых ВНКСФ-5. Сб. тезисов. Екатеринбург: УрГУ. – 1999. – С.318-320.
9. Моденов В.П., Трошина И.К., Конюшенко В.В. Математическое моделирование волноводного электромагнитного зондирования биологических объектов // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. – 2002. – №5-6. – С.67-72.
10. Афонин Д.Г., Кравченко В.Ф., Конюшенко В.В. Открытые конфокальные резонаторы с цилиндрическими зеркалами и конечной проводимостью // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 2000. – №4. – С.48-60.

11. Колюшенко В.В., Моденов В.П. Ортогональный метод Галеркина для решения уравнения Гельмгольца в полосе с разрывным несамосопряженным граничным условием // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2003. – №1. – С.19-21.