

**Трошина Ирина Кирилловна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И ТЕПЛООВОГО ПОЛЕЙ ПРИ  
ВОЛНОВОДНОМ ЗОНДИРОВАНИИ БИООБЪЕКТОВ**

01.01.03 - математическая физика

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук**

Москва 2003

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета  
Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор В.П. Моденов,

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Ю.А. Пирогов,  
доктор физико-математических наук,  
профессор А.Б. Самохин,

Ведущая организация: Московский государственный технический  
университет им. Н.Э. Баумана.

Защита диссертации состоится "20" января 2004г. в 15 час. 00 мин. на  
заседании Диссертационного совета К 501.001.17 в Московском государ-  
ственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва,  
ГСП-2, Ленинские горы д.1, стр. 2, МГУ, Физический факультет, ауди-  
тория СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факуль-  
тета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан " 20 " декабря 2003г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

П.А. Поляков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Внимание к проблеме взаимодействия электромагнитного и теплового полей в диэлектрических средах продиктовано возможностями применения процессов, связанных с поглощением и преобразованием энергии электромагнитного поля. При нагреве диэлектрической среды за счет поглощения электромагнитного поля повышение температуры происходит по всему объему материала, поскольку распределение теплового поля в этом случае обусловлено распределением электромагнитного. Поэтому в ряде приложений, таких как, спекание керамики, сушка древесины, при создании высококачественной полимерной оптики и других такой способ нагрева может иметь преимущество перед традиционным конвективным способом. Такой подход позволяет также осуществлять равномерный и быстрый прогрев для размораживания законсервированных биологических тканей, не разрушая при этом клетки. Кроме того, в случае диэлектрика с существенно неоднородной структурой существует возможность местного прогрева. Так один из методов лечения онкологических заболеваний – гипертермия основан на локальном повышении температуры поврежденной ткани. Требуемый температурный режим может быть осуществлен с помощью электромагнитных волн сантиметрового диапазона. Этим объясняется интерес к математическому моделированию электромагнитного и теплового полей в неоднородных поглощающих средах.

При моделировании электромагнитного поля актуальным является применение метода волноводного электромагнитного зондирования, предложенного как способ изучения свойств диэлектрических сред по характеристикам рассеянного электромагнитного поля. Используя возможность создания в волноводе направленного электромагнитного излучения относительно низкой интенсивности, метод может служить основой для решения целого ряда проблем, связанных с диагностикой неоднородной среды, как для медицинских, так и для радиофизических при-

ложений. Применение этого метода приводит к необходимости решения задачи дифракции электромагнитного поля на неоднородности в волноводах в строгой математической постановке.

Исследованию задачи дифракции в волноводе посвящено большое количество работ. Для численного решения были предложены различные методы. Весьма широкое применение получил предложенный А.Г. Свешниковым неполный метод Галеркина. Большой круг задач теории волноводов был решен на основе этого метода и ряда его модификаций в работах А.С. Ильинского, В.П. Моденова и других авторов. Несмотря на большую общность методов типа метода Галеркина, их использование требует рассматривать в качестве расчетной области часть волновода, заключенную между двумя его поперечными сечениями, в которой помещается рассеиватель. Однако, когда размеры рассеивателя малы по сравнению с размерами сечения волновода применение таких методов может быть не экономичным. Отметим, что в ряде приложений особый интерес представляет случай, когда размеры изучаемого объекта значительно меньше размеров волновода, в котором проводится исследование. Кроме того, в качестве рассеивателя могут рассматриваться существенно неоднородные среды, характеризующиеся большим поглощением. Это привлекает внимание к методу интегральных уравнений, который позволяет рассматривать задачу только в области рассеивателя.

Применяются различные методы сведения исходной задачи к интегральному уравнению. В настоящей работе в связи с задачей расчета электромагнитного и теплового поля в неоднородном диэлектрическом теле применяется метод объемных интегральных уравнений.

Эффективное решение задачи рассеяния становится особенно актуальным при решении обратных задач, в частности, в диэлектromетрии – определении диэлектрических характеристик среды по характеристикам рассеянного поля, а также различных задач синтеза, требующих многократного решения прямой задачи. При этом возрастают требования к точности и времени решения прямой задачи.

Для моделирования нагрева диэлектриков, в том числе биообъектов,

под действием электромагнитного поля необходима разработка алгоритмов эффективного вычисления теплового поля при поглощении электромагнитной энергии в неоднородных средах. Это требует строгой математической постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Предложены различные подходы к решению этого класса задач, в том числе – конечно-разностные методы. Основным требованием к применяемому методу является его экономичность, т.е. условие пропорциональности числа операций, выполняемых при переходе с одного временного слоя на другой, числу узлов сетки. При этом, необходимо сохранение устойчивости метода. Подобными свойствами обладают различные разностные схемы расщепления, которые могут быть использованы при исследовании температурного поля в неоднородности под действием электромагнитного поля.

### **Цель работы**

- Математическая постановка задачи о волноводном электромагнитном зондировании локально-неоднородной поглощающей диэлектрической среды и о тепловом воздействии на нее электромагнитного поля.
- Разработка алгоритма расчета распределения электромагнитного поля методом интегральных уравнений, двумерного (двумерная модель) и трехмерного (трехмерная модель).
- Разработка алгоритма расчета распределения теплового поля конечно-разностным методом при решении уравнения теплопроводности.
- Применение построенных алгоритмов при решении конкретных задач медицинской физики (при исследовании поглощения СВЧ энергии в биологических средах при СВЧ нагреве) и радиофизики (при исследовании диэлектриков и полупроводников).

**Научная новизна.** Поставлена и решена математическая задача определения электромагнитного и связанного с ним теплового поля при волноводном рассеянии на поглощающих неоднородных диэлектрических телах. Для вычисления электромагнитного поля применен метод инте-

гральных уравнений. На его основе предложен и теоретически обоснован эффективный численный алгоритм, позволивший свести решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца к равносильной задаче решения интегрального уравнения Фредгольма в области рассеивателя. С помощью экономичной схемы расщепления Годунова решено уравнение теплопроводности и найдено тепловое поле, возникающее вследствие поглощения электромагнитного поля при рассеянии на диэлектрических телах, в том числе биообъектах.

**Практическая ценность.** Построенные алгоритмы решения интегрального уравнения и уравнения теплопроводности реализованы в виде ЭВМ программ. Эти программы позволяют изучать тепловой эффект электромагнитного излучения, что актуально в ряде медицинских приложений, таких как гипертермия, в производстве высококачественной полимерной оптики, керамики и в других технических приложениях. Разработанные в работе алгоритмы и созданные на их основе программы могут быть использованы при проектировании различных радиотехнических устройств, таких как волноводные фильтры, трансформаторы, переходники, а также при исследовании диэлектриков, полупроводников и биообъектов со сложной структурой.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на международных и всероссийских конференциях и школах-семинарах

- Второй всероссийской научной конференции. "Физические проблемы экологии (Физическая экология)". Москва. Январь 1999.
- VII всероссийской школе-семинаре "Физика и применение микроволн" Красновиново. Моск. область. Май 1999.
- VIII всероссийской школе-семинаре "Волновые явления в неоднородных средах". Красновиново. Моск. область. Май 2000.
- Международной научно-технической конференции. "Физика и технические приложения волновых процессов". Тула. Сентябрь 2001.

- X Международной школе-семинаре "Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот". Фрязино. Август. 2002.
- Второй всероссийской конференции. "Необратимые процессы в природе и технике". Москва. Январь 2003.
- IX Всероссийской школе-семинаре "Физика и применение микроволн". Звенигород. Моск. область. Май 2003.
- International seminar "Day on Diffraction". S.-Petersburg. June 2003.

Результаты работы докладывались на научных семинарах:

- Семинаре "Численные методы электродинамики" МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессоров А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского.
- Семинаре кафедры математики физического ф-та МГУ под руководством профессора В.Ф. Бутузова.

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из 3 глав, введения и заключения. Объем работы составляет 91 страницу, включая 35 рисунков и список литературы, содержащий 81 работу.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена математической постановке задачи о волноводном электромагнитом зондировании локально-неоднородной поглощающей диэлектрической среды. Задача рассматривается для заполнения специального вида (двумерная модель). В первом параграфе показано, что в этом случае проблема сводится к решению краевой задачи для двумерного уравнения Гельмгольца.

Итак, проблема состоит в отыскании функции  $u(z, x)$ , где под  $u(z, x)$  понимается  $E_y(z, x)$  – компонента электромагнитного поля, являющейся решением уравнения

$$\Delta_{z,x}u + k^2\varepsilon(z, x)u = 0, \quad (1)$$

$$(z, x) \in \Omega = \{(z, x) : -\infty < z < \infty; 0 \leq x \leq a\}$$

где  $\varepsilon(z, x)$  – кусочно-непрерывная функция, отличная от 1 в области  $V \subset D = \{(z, x) : z_1 \leq z \leq z_2; 0 \leq x \leq a\}$ , занятой диэлектриком. Функция  $u(z, x)$  удовлетворяет условиям Дирихле при  $x = 0, x = a$ :

$$u|_{x=0, x=a} = 0, \quad (2)$$

условиям сопряжения

$$[u(z, x)]\Big|_{\partial V} = 0, \quad \left[\frac{\partial u(z, x)}{\partial n}\right]\Big|_{\partial V} = 0, \quad \text{при } 0 < x < a. \quad (3)$$

В окрестности угловых точек на функцию  $u(z, x)$  накладывается условие ограниченности энергии, эквивалентное условиям Мейкснера

$$\int_{V_\varepsilon} (|\nabla u(z, x)|^2 + |u(z, x)|^2) dV < \infty, \quad (4)$$

где  $V_\varepsilon$  – любая окрестность угловой точки.

Кроме того, решение должно удовлетворять парциальным условиям излучения и возбуждения

$$u = e^{i\gamma_1 z} \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n z} \sin \frac{\pi n x}{a} \quad \text{при } z < z_1, \quad (5)$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n z} \sin \frac{\pi n x}{a} \quad \text{при } z > z_2, \quad (6)$$

где  $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$ . При этом требуется возможность почленного дифференцирования по  $z$  рядов, входящих в (5), (6). Поле возбуждается, падающей из  $-\infty$  волной  $\sin \frac{\pi x}{a} e^{i\gamma_1 z}$ .



Во втором параграфе краевая задача (1) – (6) сводится к эквивалентному интегральному уравнению, в котором интегрирование ведется по всей области в волноводе, занятой диэлектриком.

Для полого волновода, т.е. в случае  $\varepsilon \equiv 1$ , функция Грина  $G(z, x; z', x')$  задачи (1) – (6) была построена в работе А.Н. Тихонова и А.А. Самарского 1947 года, где было доказано, что функция Грина представима в виде ряда по собственным функциям поперечного сечения:

$$G(z, x; z', x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\gamma_n|z-z'|}}{2i\gamma_n} \psi_n(x) \psi_n(x'), \quad (7)$$

где  $\psi_n(x), \psi_n(x')$  - ортонормированные собственные функции поперечного сечения, в случае плоского волновода равные:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}.$$

Интегральное уравнение имеет вид

$$u(z, x) = e^{i\gamma_1 z} \sin \frac{\pi n x}{a} - k^2 \int_V (\varepsilon(z', x') - 1) G(z, x; z', x') u(z', x') dv, \quad (8)$$

$$(z, x) \in \Omega.$$

Вопрос определения электромагнитного поля сводится к исследованию интегрального уравнения (8) в ограниченной области  $V$ .

В третьем параграфе осуществлена дискретизация интегрального уравнения (8) и сведение его к системе линейных алгебраических уравнений. Область  $D$  ( $V \subset D$ ) разбивается прямоугольной сеткой размером  $N \times M$  с ячейками  $v_{ij}$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $j = 1 \dots M$ ).

$$U(z_t, x_s) = U_0(z_t, x_s) - k^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\varepsilon(z_j, x_i) - 1) I(z_t, x_s; z_j, x_i) U(x_i, z_j), \quad (9)$$

$$I(z_t, x_s; z_j, x_i) = \int_{v_{ij}} G_{\tilde{N}}(z_t, x_s; z_j, x_i) dz_j dx_i$$

где  $U_0$ - столбец правой части, представляющий собой значения падающего поля,  $U$  - искомый столбец значений  $u(z, x)$  в узлах сетки,  $s =$

$1 \dots N$ ,  $t = 1 \dots M$ . Система (9) решается методом Гаусса. Ее решение позволяет определить значения искомой составляющей вектора напряженности электрического поля ( $E_y = u(z, x)$ ) в узлах сетки.

В четвертом параграфе даны результаты расчетов, выполненных с помощью рассмотренного алгоритма. Типичный размер сетки составлял  $30 \times 30$  узлов. Приводятся результаты тестирования на основе решения задачи, допускающей аналитическое решение. Точность расчетов в нерезонансной области составила десятые процента. Проведено сравнение результатов с экспериментальными и полученными с помощью неполного метода Галеркина. Кроме того, приведены новые результаты расчетов электромагнитного поля на модельных биологических объектах. Типичные картины распределения линий уровня  $|E_y|^2$  показаны на рис. 1 для случая рассеяния волны  $H_{10}$  с частотой 12.204 ГГц в волноводе шириной 2 см на биообъекте. В качестве биообъекта рассматривается слой, моделирующий костную ткань ( $\epsilon = 8 + i0.01$ ), внутри которого расположено прямоугольное включение размером  $6.6(6) \times 1.6(6)$  мм с диэлектрической проницаемостью, характерной для воды  $\epsilon = 61.45 + i10.00$ . На рисунке показано влияние расположения включения в костной ткани на распределение линий уровня  $|E_y|^2$  в волноводе.

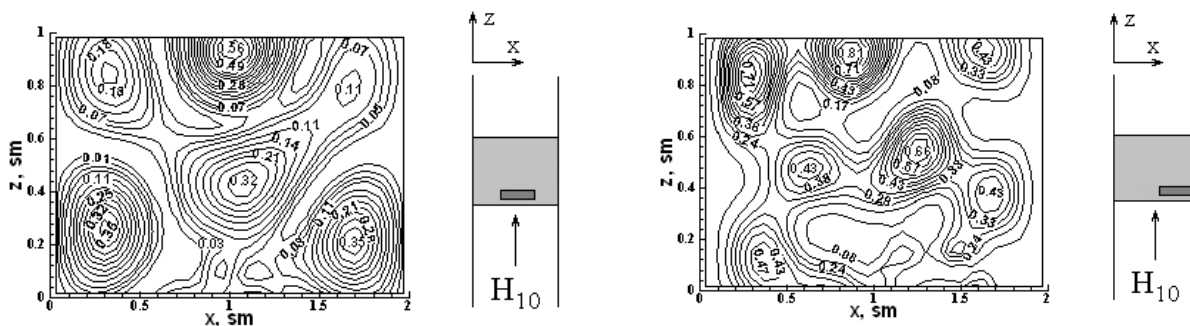


Рис. 1: Распределение линий уровня  $|E_y|^2$ . Прямоугольное включение размером  $6,6(6) \times 1,6(6)$  мм расположено симметрично относительно оси волновода – левый рисунок, смещено – правый рисунок.

Во второй главе рассматривается скалярная задача дифракции на не-

однородности в волноводе в трехмерном случае (трехмерная модель). В первом параграфе дана постановка задачи. Во втором параграфе методом, аналогичным главе 1 задача сводится к интегральному уравнению. Здесь же доказана эквивалентность интегрального уравнения исходной краевой задаче.

**Утверждение 1.** *Функция  $\bar{y}$ , являющаяся решением уравнения (8) удовлетворяет уравнению (1) в  $\Omega$ , краевым условиям (2) при  $\vec{r} \in \partial\Omega$ , условиям излучения (5, 6) при  $z < z_1$ ,  $z > z_2$ , условиям сопряжения (3) на границе области  $V$  и линиях разрыва  $q$  и условию Мейкснера (4).*

**Утверждение 2.** *Существует единственное решение интегрального уравнения (8).*

В третьем параграфе приведена дискретизация интегрального уравнения для его численного решения. В четвертом параграфе доказана сходимость приближенного решения к точному по норме пространства  $L_2$ .

**Утверждение 3.** *Решение дискретной задачи (9) сходится к решению интегрального уравнения (8) в  $L_2$ .*

В пятом параграфе обсуждаются результаты расчетов, выполненных на основе трехмерной модели и, в связи с этим, границы применимости модели двумерной.

Третья глава посвящена математической постановке и численному решению задачи о тепловом воздействии волноводного электромагнитного поля на локально-неоднородную поглощающую диэлектрическую среду.

В первом параграфе дана математическая постановка начально-краевой задачи. Распределение теплового поля при рассеянии волноводного электромагнитного поля на поглощающем неоднородном теле описывается уравнением теплопроводности

$$c(z, x)\rho(z, x)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi(z, x)\operatorname{grad}T) + F(z, x), \quad (z, x) \in D \quad (V \subset D), \quad (10)$$

где  $\kappa(z, x)$  - коэффициент температуропроводности, кусочно - непрерывная функция координат,  $F(z, x)$  - плотность источников наведенного теплового поля. Нагрев объекта за счет облучения СВЧ полем учитывается функцией  $F(z, x) = \sigma |E_y(z, x)|^2$ , где  $E_y(z, x)$  - амплитуда  $E_y$  компоненты электрического поля созданного в объекте СВЧ облучением,  $c(z, x)$  - коэффициент теплопроводности,  $\rho(z, x)$  - плотность среды.

Кроме того, температурное поле должно удовлетворять начальному условию:

$$T|_{t=0} = \Theta(z, x), \quad (11)$$

где  $\Theta(z, x)$  - заданное распределение температуры в объекте в начальный момент времени.

В общем случае, если область  $V$ , занятая объектом, ограничена поверхностью  $\partial V$ , то для учета теплообмена со средой по закону Ньютона ставим условие третьего рода:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \lambda(T - \Theta_0), \quad \forall (z, x) \in \partial V, \quad (12)$$

где  $\Theta_0$  - температура окружающей среды

Если объект полностью заполняет поперечное сечение прямоугольного волновода вдоль его узкой стенки, то на тех участках границы, которые совпадают со стенками волновода, будем считать температуру постоянной, т.е.

$$T(z, x)|_{x=0, x=a} = \Theta_{\text{ст}}, \quad (13)$$

где  $\Theta_{\text{ст}}$  - температура стенок волновода (поддерживается постоянной).

Кроме того, поскольку мы считаем  $\kappa(z, x)$  - кусочно-непрерывной, необходимо выполнение условий сопряжения (непрерывности теплового поля) на линиях разрыва этой функции:

$$\begin{aligned} [T(z, x, t)] &= 0, \\ \left[ \kappa(z, x) \frac{\partial T(z, x, t)}{\partial n} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

и условий ограниченности энергии в угловых точках.

Описанию алгоритма численного решения поставленной начально-краевой задачи посвящен второй параграф. Для расчета теплового поля применена экономичная схема расщепления Годунова. Краевой задаче (10) – (14) ставится в соответствие разностная схема

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (15)$$

где разностный оператор  $L_h$  определяется выражением

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{mn}^{p+1} - \tilde{u}_{mn}}{\tau} - \Lambda_{xx} u_{mn}^{p+1} & m = 0, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ \frac{u_{m0}^{p+1} - u_{m1}^{p+1}}{\Delta x} - \lambda u_{m0}^{p+1}, & m = 0, \dots, N, \quad n = 0, \\ \frac{u_{mN}^{p+1} - u_{mN-1}^{p+1}}{\Delta x} - \lambda u_{mN}^{p+1}, & m = 0, \dots, N, \quad n = N, \\ u_{mn}^0, & m, n = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (16)$$

а правая часть уравнения  $f^{(h)}$ :

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} F_{mn}; & m = 0, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ -\lambda \Theta_0; & m = 0, \dots, N \quad n = 0 \\ -\lambda \Theta_0; & m = 0, \dots, N \quad n = N \\ \Theta_{mn} \end{cases} \quad (17)$$

Вектор  $\tilde{u}_{mn}$  определяется как решение вспомогательной задачи

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}_{mn} - u_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{zz} \tilde{u}_{mn} & m = 1, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, N, \\ \frac{\tilde{u}_{0n} - \tilde{u}_{1n}}{\Delta z} - \lambda \tilde{u}_{0n} = -\lambda \Theta_0, & m = 0, \quad n = 0, \dots, N, \\ \frac{\tilde{u}_{Mn} - \tilde{u}_{M-1n}}{\Delta z} - \lambda \tilde{u}_{Mn} = -\lambda \Theta_0 & m = N, \quad n = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (18)$$

Разностный оператор  $\Lambda_{xx}$  соответствует оператору  $\frac{\partial}{\partial x} \varkappa \frac{\partial}{\partial x}$ , а оператор  $\Lambda_{zz}$  – оператору  $\frac{\partial}{\partial z} \varkappa \frac{\partial}{\partial z}$ . Отметим, что в принятой модели правая часть уравнения не зависит от времени.

В разностной схеме (16-18) исходная двумерная по пространственным переменным задача разбивается на две одномерные по пространственным переменным разностные схемы (15), (18).

Третий параграф посвящен описанию результатов расчетов, проведенных на основе предложенного алгоритма. Приведены результаты тестирования на основе численного решения задачи, допускающей аналитическое решение. Погрешность расчетов не превышает 3%. Распределение теплового поля, соответствующее электромагнитному на рис. 1 представлено на рис. 2. Качественно поведение теплового поля согласуется с поведением электромагнитного. В то же время наблюдается выделение тепла в области со средой, мнимая часть диэлектрической проницаемости которой относительно велика. Заметим, что энергия электрического поля в этой области близка к нулю, что свидетельствует о преобразовании энергии электромагнитного поля в тепловую.

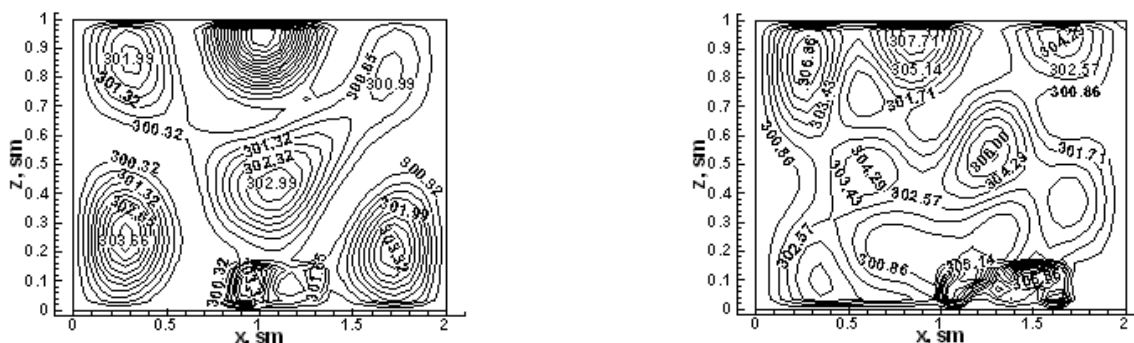


Рис. 2: Распределение теплового поля.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе.

### Основные результаты.

1. Математически поставлена и решена задача о волноводном электромагнитом зондировании локально-неоднородной поглощающей ди-

электрической среды и о тепловом воздействии на нее электромагнитного поля.

2. Предложен, обоснован и численно реализован алгоритм, основанный на методе интегральных уравнений и позволивший свести краевую задачу для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области к интегральному уравнению Фредгольма в конечной области, занятой диэлектриком.

Доказана равносильность интегрального уравнения исходной краевой задаче.

Доказана сходимость алгоритма численного решения этого интегрального уравнения.

Получено распределение электромагнитного поля в диэлектрической среде.

Проведено сравнение результатов вычислений с экспериментальными данными, показавшее адекватность применяемой математической модели физическому эксперименту.

3. Получено распределение теплового поля конечно - разностным методом с использованием схемы расщепления при решении начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.
4. Решение поставленной задачи применено при математическом моделировании теплового и электромагнитного полей при волноводном электромагнитном зондировании биообъектов.

### **Основные публикации**

1. Моденов В.П., Трошина И.К. Метод интегральных уравнений в задаче волноводного электромагнитного зондирования биообъектов// Вестник новых медицинских технологий. - 1998, т.5, N 3-4, с.106-108.

2. Моденов В.П., Трошина И.К. Математическое моделирование волноводного электромагнитного зондирования биообъектов // Труды VII Всероссийской школы-семинара "Физика и применение микроволн" - 1999, т.1, с.10-11.
3. Моденов В.П., Трошина И.К. Математическое моделирование в волноводном методе исследования биообъектов // Вторая всероссийская научная конференция. "Физические проблемы экологии (Физическая экология)" Тезисы докладов. - 1999, с. 111.
4. Моденов В.П., Трошина И.К. Метод интегральных уравнений в задачах волноводной биоинформатики // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 2000, N5, с.17-21.
5. Моденов В.П., Трошина И.К. Расчет электромагнитного поля волновода с биосредой // Труды VIII Всероссийской школы-семинара "Волновые явления в неоднородных средах" - 2000, т.2, с. 3-4.
6. Моденов В.П., Трошина И.К. Математическое моделирование электромагнитного и теплового полей волновода с биообъектом // Международная научно-техническая конференция. "Физика и технические приложения волновых процессов" Тезисы докладов и сообщений. - 2001, т.2, с. 111.
7. Моденов В.П., Трошина И.К., Конюшенко В.В. Математическое моделирование волноводного электромагнитного зондирования биологических объектов // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника - 2002, N 5-6, с. 67-72.
8. Моденов В.П., Трошина И.К. Математическое моделирование электромагнитного и теплового полей при волноводном зондировании биообъектов // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот - 2002, т.10, N3(35), 92-96.
9. Моденов В.П., Трошина И.К. Математическое моделирование теплового воздействия волноводного электромагнитного поля на биообъект



ект //Вторая всероссийская конференция. "Необратимые процессы в природе и технике". Тезисы докладов и сообщений. - 2003, с. 127.

10. Моденов В.П., Трошина И.К. Тепловое воздействие электромагнитного поля в волноводе на поглощающие диэлектрические среды // Труды IX Всероссийской школы-семинара "Физика и применение микроволн"- 2003, с. 63-64.
11. I.K. Troshina Mathematical simulation of electromagnetic field heat effect on bio-object. // Proceedings of the 7th Conference on electromagnetic and light scattering by nonspherical particles: theory, measurements and applications - 2003, p. 358-361.