

**МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**на правах рукописи
УДК 551.466**

КРАВЦОВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УЕДИНЁННЫХ
ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ**

25.00.29 – Физика атмосферы и гидросферы

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук**

МОСКВА – 2004

Работа выполнена на кафедре Физики моря и вод суши физического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

**доктор физико-математических наук,
профессор Шелковников Николай Константинович**

Официальные оппоненты:

**доктор физико-математических наук,
профессор Боголюбов Александр Николаевич
кандидат физико-математических наук
Калиниченко Владимир Анатольевич**

Ведущая организация:

Институт Водных проблем РАН

Защита состоится «_____» _____ 2004 г. в _____ часов на заседании Диссертационного совета Д 501.001.63 по геофизике в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Ленинские горы, физический факультет, аудитория _____ .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «_____» _____ 2004 г.

Учёный секретарь

**Диссертационного совета Д 501.001.63
кандидат физико-математических наук**

В.Б. Смирнов

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Известно, что изменение метеорологических условий над поверхностью океана может привести к образованию длинных гравитационных волн, называемых анемобарическими [1]. Долгое время значение этих волн недооценивалось. В странах Европы и в США интерес к данному типу длинных гравитационных волн возник только после Второй мировой войны и первоначально был связан с проблемой цунами. Было замечено, что в некоторых случаях (которые встречаются сравнительно редко) колебания атмосферного давления над поверхностью океана приводят к генерации сильных длинноволновых колебаний уровня океана. В отечественной литературе такие волны получили название *метеоцунами*, так как по разрушительному воздействию на побережье, длинам и периодам они сходны с сейсмическими морскими волнами цунами [1], [2]. Поэтому эти два явления иногда оказываются трудно различимыми, если отсутствует соответствующая сейсмическая информация. Однако возбуждение метеоцунами – действительно довольно редкое явление, поскольку далеко не каждый глубокий циклон, фронт или цуг атмосферных волн приводит к образованию заметных поверхностных волн в океане. При каких условиях это всё же происходит? Источники [1] и [2], обобщая многочисленные статистические данные, указывают на *резонансный* механизм возбуждения: скорость распространения атмосферных возмущений совпадает (хотя бы приближённо) со скоростью длинных гравитационных волн. Этот тип резонанса геофизики называют резонансом Праудмена по имени исследователя, впервые подробно его описавшего.

При математическом описании явления генерации метеоцунами, вызываемого движущимися атмосферными возмущениями (например движущимся тайфуном) в случае двумерных волновых движений приходится отказываться от длинноволновой модели и учитывать нелинейные эффекты вследствие резонансного механизма возбуждения. Из теоретических и экспериментальных исследований известно, что на больших расстояниях практически при любых начальных возмущениях любая волна в отсутствие внешнего воздействия должна описываться нелинейно-дисперсионной теорией. Другими словами, на значительных расстояниях волна может приближённо рассматриваться как уединённая. А это в свою очередь означает, что в резонансном случае возможно усиление уединённой волны движущимся атмосферным возмущением, возникшим на более поздней стадии (при условии одномерности распространения). Таким образом, из приведённых рассуждений однозначно следует, что в реальных условиях явление генерации метеоцунами в форме *уединённой волны* представляется вполне возможным.

Определение параметров, характеризующих зарождение и распространение метеоцунами, имеет огромное значение для попыток предсказания рассматриваемого явления, поскольку при набегании на берег такая волна представляет собой серьёзное стихийное бедствие. Опасности подвергаются также морские нефтедобывающие вышки, расположенные на шельфе.

С учётом практической важности проблемы метеоцунами возникла необходимость исследования процесса генерации и эволюции анемобарических уединённых волн в лабораторных условиях. В качестве экспериментальной установки был выбран кольцевой аэрогидроканал.

С целью подтверждения эффекта генерации уединённой волны в кольцевом канале, а также для более детального изучения наблюдаемого явления, была поставлена задача численного моделирования возникающих уединённых волн. Лабораторные эксперименты во многом стимулировали проведение дальнейших численных экспериментов по моделированию уединённых волн, распространяющихся в отсутствие внешнего воздействия и испытывающих нелинейные взаимодействия (столкновения) между собой.

С научной и практической точек зрения крайне интересным и важным представляется изучение влияния на параметры генерируемых уединённых волн весомых частиц, плавающих на свободной поверхности. Наличие на свободной поверхности жидкости таких частиц (не взаимодействующих между собой) называется флотацией, а сама жидкость – флотирующей. В геофизике подобная ситуация встречается при исследовании гравитационных волн в той части мирового океана, где некоторые области поверхности покрыты плавающей ледовой крошкой. Влияние флотации на параметры уединённых волн первоначально было исследовано в лабораторных условиях (кольцевой аэрогидроканал), а затем – численно.

Цель работы.

- Показать при помощи численных расчётов возможность образования в кольцевом канале уединённых волн, возбуждаемых атмосферными возмущениями и тем самым на качественном уровне подтвердить эффект, ранее обнаруженный в лабораторных условиях.
- При проведении численного эксперимента изучить влияние флотации на параметры генерируемых уединённых волн и провести качественное сравнение результатов вычислений с данными лабораторных наблюдений.
- Численно исследовать процессы образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся в одном направлении и на встречных курсах в узком кольцевом канале и – на встречных курсах – в узком прямоугольном канале в отсутствие внешнего воздействия.

Научная новизна диссертации заключается в следующем.

1. Впервые численно решена двумерная задача о генерации уединённой волны движущейся областью переменного давления в узком *кольцевом канале* в приближении мелкой воды.
2. Решение указанной двумерной задачи приведено для случая *флотирующей жидкости*.
3. Впервые численно решена *трёхмерная задача* о генерации уединённой волны движущейся областью переменного давления в *кольцевом канале произвольной ширины* в приближении мелкой воды.
4. Трёхмерная задача решена для случая *флотирующей жидкости*.
5. Впервые поставлен численный эксперимент с *уравнением Буссинеска* по

моделированию процессов образования и взаимодействия уединённых волн в достаточно узких кольцевом и прямоугольном каналах в отсутствии внешнего воздействия.

(а) Проведено численное исследование процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся в одном направлении в узком кольцевом канале.

(б) Проведено численное исследование процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся на встречных курсах в кольцевом и прямоугольном каналах малой ширины.

Достоверность результатов диссертации обеспечена корректностью постановок математических задач, использованием обоснованных методов численных расчётов, а также качественным совпадением результатов вычислений с данными лабораторных экспериментов.

Практическая ценность. На основании численных расчётов показана принципиальная возможность генерации уединённой волны в кольцевом аэрогидроканале под действием метеорологических факторов с учётом флотации. При проведении численных экспериментов с уравнением Буссинеска показана тонкая структура процессов образования и взаимодействия уединённых волн в отсутствии внешнего воздействия, почти недоступная наблюдению в лабораторных условиях. Результаты подобных экспериментов могут быть использованы при исследовании нелинейных волн в других областях физики.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Решение двумерной нелинейной задачи о волнах на поверхности флотирующей жидкости в достаточно узком кольцевом канале, возбуждаемых движущейся локализованной областью переменного давления: вывод неоднородной системы уравнений Буссинеска при наличии флотации в новой форме и дальнейшее численное решение полученной системы неполным методом Галёркина.
2. Решение трёхмерной нелинейной задачи о волнах на поверхности флотирующей жидкости в кольцевом канале конечной ширины, возбуждаемых движущейся локализованной областью переменного давления: вывод неоднородной системы Буссинеска в двумерном случае при наличии флотации, сведение полученной системы к одному нелинейному уравнению и численное решение последнего конечно-разностным методом.
3. Качественное сопоставление результатов вычислений, полученных при использовании обеих математических моделей (узкий канал и канал конечной ширины), с данными лабораторных исследований.
4. Численное моделирование процессов образования и взаимодействия уединённых волн в достаточно узких кольцевом и прямоугольном каналах в отсутствии внешнего воздействия.
 - (а) Образование и взаимодействие уединённых волн, движущихся в одном направлении в узком кольцевом канале.
 - (б) Образование и взаимодействие уединённых волн, движущихся на встречных курсах в кольцевом и прямоугольном каналах малой ширины.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных конференциях Ломоносовские чтения (секция физики) в 2002 г. (два доклада) и в 2003 г., на VIII Всероссийском научном семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» в 2002 г., на научном семинаре по вычислительной математике и математической физике, проводимом на физическом факультете МГУ под руководством профессоров А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского, в 2003 г., на научном семинаре кафедры физики моря и вод суши физического факультета МГУ в 2003 и 2004 гг.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 9 публикациях, список которых приведён в конце настоящего автореферата.

Личный вклад автора. Результаты, представленные в диссертации, получены автором лично; выбор общего направления исследований и математическая постановка конкретных задач осуществлялись совместно с научным руководителем и научным консультантом. Автору принадлежат самостоятельное численное решение поставленных задач, обработка результатов вычислений и их интерпретация.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 51 наименования, в том числе 9 работ автора. Материал диссертации изложен на 83 страницах, включая 48 рисунков.

Содержание работы

Во введении сформулированы основные цели диссертационной работы, обоснована актуальность решаемых в ней задач, её научная новизна и практическая значимость. Кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе приведён обзор литературы, посвящённой, главным образом, численному и частично – аналитическому и лабораторному исследованиям уединённых волн на поверхности жидкости.

В § 1.1 рассмотрены работы, затрагивающие проблемы численного моделирования уединённых волн в двумерном случае. Подробно проанализированы публикации, посвящённые численному исследованию плоских уединённых волн в неограниченной области и в бассейне конечной длины, возбуждаемых движущимся со скоростью $v \approx c_0$ внешним воздействием (c_0 – скорость длинных гравитационных волн). В этот же параграф внесены две статьи, в которых рассматриваются двумерные нелинейные задачи о волнах на поверхности флотирующей жидкости в неограниченных областях, и применяется аналитический метод исследования.

В § 1.2 приведён обзор публикаций, посвящённых численному моделированию уединённых волн в трёхмерном случае, а также рассмотрены некоторые аналитические методы исследования и лабораторные эксперименты. Публикации, связанные с численным исследованием, относятся либо к изучению уединённых волн, возбуждаемых движущимся прямолинейно атмосферным возмущением, либо – к исследованию уединённых волн, распространяющихся в отсутствии внешнего воздействия.

В § 1.3 рассмотрены работы, касающиеся численного и аналитического исследования процессов образования, взаимодействия и отражения

уединённых волн от препятствий. Особое внимание уделено уравнению Буссинеска. Проанализирована публикация, посвящённая построению точного N - солитонного решения уравнения Буссинеска, и рассмотрена статья, в которой приведены точные двух- и трёхсолитонные решения двумерного уравнения Буссинеска в предположении, что зависимость от второй пространственной переменной слабая. Подробно рассмотрена классическая работа [3], связанная с численным решением уравнения Кортевега – де Фриза.

Во второй главе проведён численный эксперимент по моделированию уединённых волн на поверхности флотирующей жидкости в достаточно узком кольцевом канале, возбуждаемых движущимся атмосферным возмущением, а также дано описание лабораторного эксперимента и перечислены результаты измерений.

§ 2.1 полностью посвящён лабораторному эксперименту, который инициировал первые численные расчёты. Установка, на которой были выполнены эксперименты, представляла собой кольцевой аэрогидроканал с внешним и внутренним диаметрами $D_2=202$ см и $D_1=165$ см соответственно. Для непосредственного наблюдения за генерируемыми уединёнными волнами, а также для проведения видео- и фотосъёмки боковые стенки канала были изготовлены из оргстекла. Воздушный поток от вентилятора нагнетался в пространство между поверхностью воды и крышкой канала через специальные раструбы. Регистрация волн проводилась при помощи струнного волнографа.

В результате экспериментов были определены критические параметры, характеризующие возможность зарождения уединённых волн – пороговые значения скорости ветра при заданных глубинах и соответствующие амплитуды волн. За амплитуду уединённой волны было принято максимальное возвышение свободной поверхности над невозмущённым уровнем при $r=0.25(D_1 + D_2)$, r - полярный радиус, перпендикулярный оси симметрии канала. Одновременно были получены значения длины, скорости распространения, а также величины параметров нелинейности $\alpha = a/h_0$, дисперсии $\beta = (h_0/\lambda)^2$ и числа Урсела $Ur = \alpha/\beta$ для поверхностных уединённых волн (a - амплитуда волны, h_0 - глубина жидкости). Длина уединённой волны λ определялась как ширина волны на уровне полуамплитуды.

Для исследования влияния флотации были проведены специальные эксперименты. В кольцевой аэрогидроканал загружалось флотирующее вещество массой от 1 до 5 кг (кубики льда, деревянные пластинки). Анализ экспериментальных данных показал, что при увеличении массы флотирующего вещества амплитуда генерируемой уединённой волны уменьшалась, а длина увеличивалась.

В § 2.2 приведена математическая постановка общей нелинейной задачи о волнах на поверхности идеальной несжимаемой флотирующей жидкости в кольцевом канале. Потенциальные движения жидкости рассматривались в декартовой системе координат (ось z была направлена вертикально вверх).

Переменное атмосферное давление $p(x, y, t)$ считалось известной функцией, потенциал скоростей частиц жидкости $\Phi(x, y, z, t)$ и возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ подлежали определению. В начальный момент времени жидкость находилась в невозмущённом состоянии.

В § 2.3 общая задача рассмотрена при следующих предположениях: 1) ширина кольцевого канала достаточно мала, 2) глубина жидкости значительно меньше длины волны (приближение мелкой воды). Первое допущение позволило пренебречь изменениями зависимых переменных вдоль радиуса канала. Поэтому после введения новой переменной $\tilde{x} = R\phi$ (R - средний радиус канала, ϕ - полярный угол) общая трёхмерная задача была сведена к соответствующей двумерной задаче, в которой для краткости \tilde{x} обозначено через x , $\Phi = \Phi(x, z, t)$, $\eta = \eta(x, t)$, $p = p(x, t)$, а граничные условия по x - периодические. При переходе к безразмерным переменным (для которых сохранялись прежние обозначения) считалось, что $\beta = (h_0/\lambda)^2 \ll 1$ (условие мелкой воды) и $\alpha = a/h_0 = O(\beta)$, где a - характерная амплитуда волны, h_0 - уровень невозмущённой свободной поверхности, λ - характерная длина волны.

Согласно общей теории [4], потенциал Φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничному условию на дне канала, был представлен в виде степенного

$$\text{ряда: } \Phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^n z^{2n} \cdot \frac{\partial^{2n} F(x, t)}{\partial x^{2n}}, \quad F(x, t) - \text{неизвестная функция.}$$

Затем в работе вводилась горизонтальная скорость частиц *поверхности* жидкости по формуле

$$u = F_x - (1/2)\beta F_{xxx}, \quad (1)$$

и после проведения соответствующих выкладок с точностью до членов первого порядка по α и β включительно была получена неоднородная система уравнений Буссинеска в новой форме при наличии флотации:

$$\eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x + (1/3)\beta u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

$$u_t + \eta_x - \mu\beta u_{xxt} + \alpha uu_x = -p_x \quad (3)$$

Начальные и граничные условиями соответственно следующие:

$$u(x, 0) = 0, \quad \eta(x, 0) = 0 \quad (4)$$

$$u(x + 2l, t) = u(x, t), \quad \eta(x + 2l, t) = \eta(x, t) - \text{для любого } x, \quad (5)$$

где $l = \pi R$, R - безразмерный средний радиус канала.

Система (2) – (3) несколько отличается от соответствующей однородной системы, выведенной в [4], так как в данной диссертации горизонтальная скорость Φ_x введена в первом приближении по β (а не в нулевом как в [4]) и, следовательно, зависит от глубины. Поэтому горизонтальная скорость частиц *поверхности* жидкости u в первом приближении по β определяется формулой (1). При дальнейшем рассмотрении считалось, что внешнее воздействие $p(x, t)$ в уравнении (3) представляет собой волну давления, распространяющуюся в виде

изолированного импульса с постоянной скоростью v в положительном направлении оси Ox :

$$p(x,t) = \begin{cases} A \sin^2 \left[\pi(x - x_1 - vt)/(x_2 - x_1) \right] & , x \in [x_1, x_2] \\ 0 & , x \notin [x_1, x_2] \end{cases} , -l < x_1 < x_2 < l, \text{ где}$$

A, x_1, x_2 - некоторые постоянные.

В § 2.4 для численного решения системы (2) – (5) был использован неполный метод Галёркина. Получающаяся при этом система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-ого порядка была решена методом Рунге – Кутта. При проведении численного эксперимента параметры $R, x_1, x_2, \alpha, \beta$ и v оставались постоянными, A и μ изменялись в определённых пределах.

В § 2.5 приведены результаты численного эксперимента. На рис. 1 – 3 представлены графики зависимости функции $\eta(x_n, t_k) = U(x_n, k)$ в одинаковые моменты времени для $\mu = 0.0, 0.5$ и 1.0 соответственно. Во всех трёх случаях профиль свободной поверхности – уединённая волна, движущаяся со скоростью внешнего воздействия v в положительном направлении оси Ox . Скорость генерируемой уединённой волны была определена дополнительными расчётами. Отставание уединённой волны при увеличении μ объясняется следующим образом. Для того, чтобы отклик водной поверхности в форме уединённой волны приобрёл заданную скорость внешнего воздействия требуется определённое время, которое увеличивается при возрастании μ . На рис. 1 – 3 хорошо видно, что во флотирующей жидкости амплитуда уединённой волны падает, а длина несколько увеличивается, что подтверждается лабораторными экспериментами. В диссертации приведена зависимость амплитуды уединённой волны от поверхностной плотности μ . С течением времени амплитуда уединённой волны возрастает. Это происходит по двум причинам. Во-первых, данная математическая модель не учитывает потери энергии волны, связанные с трением, во-вторых, выбранная в задаче безразмерная скорость атмосферного возмущения соответствует резонансу Праудмена.

В третьей главе проведён численный эксперимент по моделированию уединённых волн на поверхности флотирующей жидкости в кольцевом канале конечной ширины, возбуждаемых движущимся атмосферным возмущением.

В § 3.1 выведена неоднородная система уравнений Буссинеска в двумерном случае при наличии флотации в безразмерном виде при условии, что $\beta \ll 1$ и $\alpha = O(\beta)$. С этой целью, по аналогии с двумерной задачей, безразмерный потенциал Φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничному условию на дне канала, был представлен степенным рядом:

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^n \Delta^n F(x, y, t) z^{2n} , F(x, y, t) - \text{неизвестная функция,}$$

Δ - оператор Лапласа. С точностью до членов первого порядка по α и β включительно указанная система Буссинеска имеет вид:

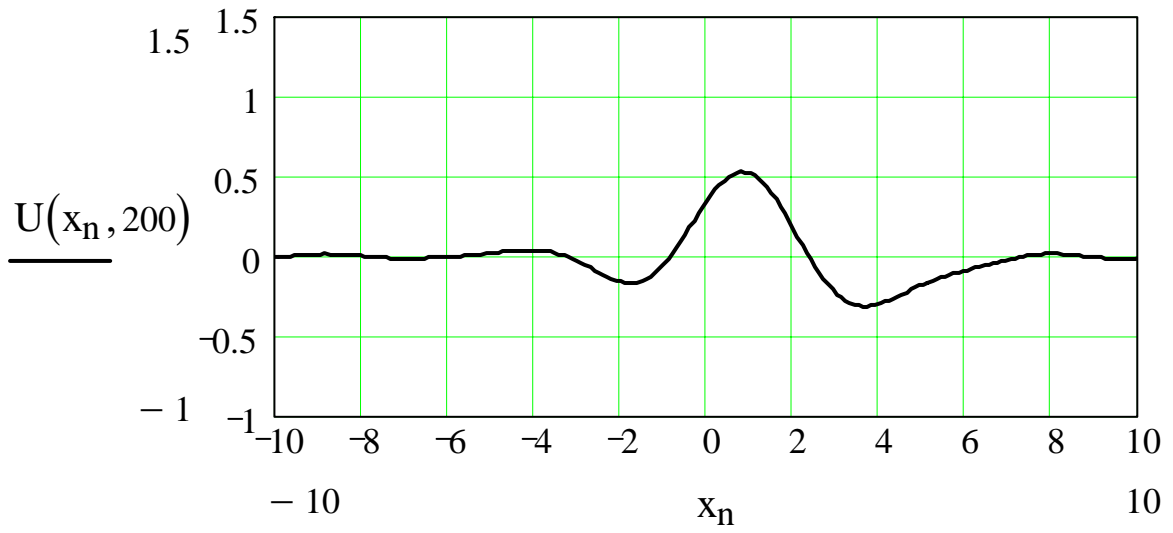


Рис. 1

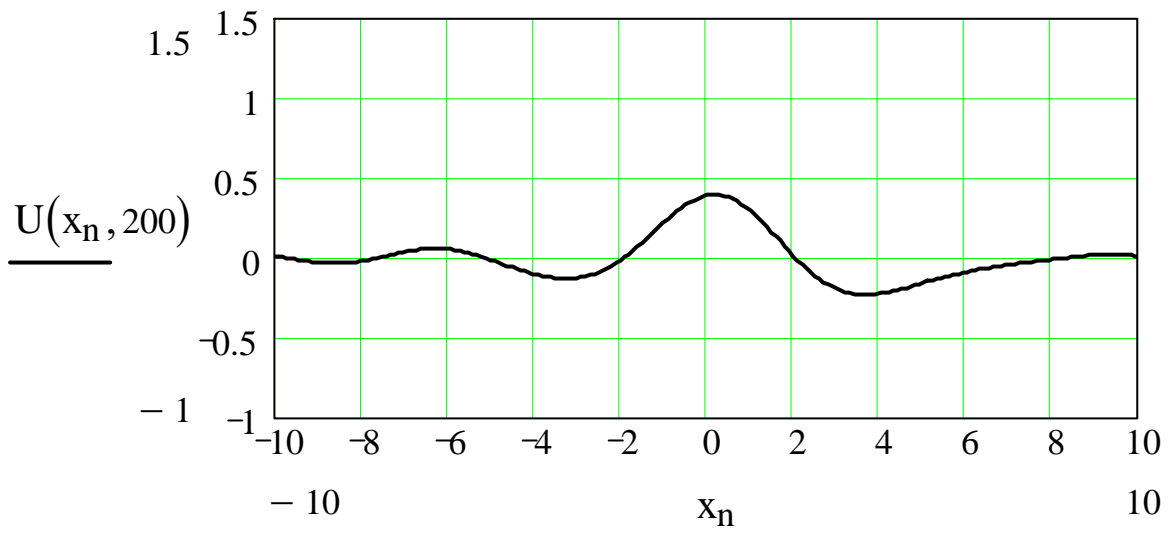


Рис. 2

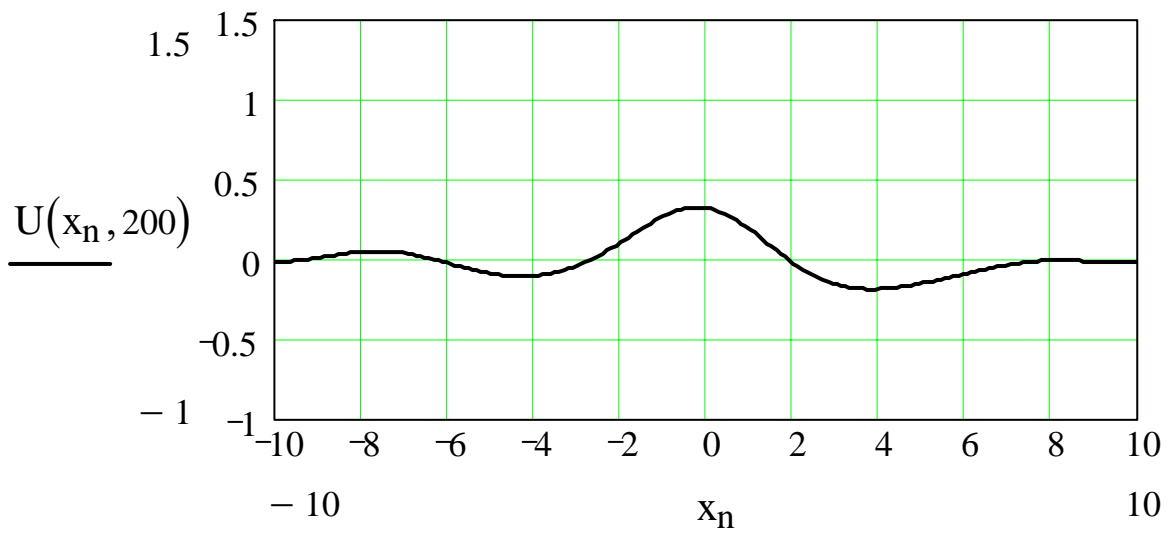


Рис. 3

$$\eta_t + \operatorname{div}[(1 + \alpha\eta)\mathbf{u}] + (1/3)\beta \cdot \operatorname{div}(\Delta\mathbf{u}) = 0 \quad (6)$$

$$\nabla\eta + \mathbf{u}_t - \mu\beta \cdot \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}_t) + \alpha(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p \quad (7)$$

Здесь \mathbf{u} - вектор горизонтальной скорости частиц *поверхности* жидкости, определяемый по формуле $\mathbf{u} = \nabla(F - \beta\Delta F / 2)$.

В § 3.2 приведена математическая постановка задачи. Система (6) – (7) заменой $\mathbf{u} = \nabla f$ с указанной точностью была сведена к одному нелинейному уравнению для новой неизвестной функции $f(x, y, t)$:

$$\Delta f - f_{tt} + \beta(\mu + 1/3)\Delta f_{tt} = 0.5\alpha(|\nabla f|^2)_t + \alpha(p + f_t)\Delta f + \\ + \alpha\nabla(p + f_t)\nabla f - (1/3)\beta\Delta p_t \quad (8)$$

При этом возвышение свободной поверхности η определялось через функцию f следующим образом: $\eta = -p + \mu\beta\Delta f_t - f_t - 0.5\alpha|\nabla f|^2$. Внешнее воздействие p было задано в виде одиночной волны давления, распространяющейся вдоль канала с постоянной угловой скоростью в направлении увеличения полярного угла φ . Предполагалось, что форма волны давления не зависит от полярного радиуса r . Функция $p(\varphi, t)$ определялась так:

$$p(\varphi, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\varphi - \omega_n t), \quad \text{где } \omega_n \text{ - первый корень уравнения} \\ J'_n(\omega R_2)N'_n(\omega R_1) - N'_n(\omega R_2)J'_n(\omega R_1) = 0, \quad (9)$$

$J_n(\omega r)$ и $N_n(\omega r)$ - функции Бесселя и Неймана n -го порядка соответственно (штрих означает производную по полному аргументу цилиндрической функции), R_1 и R_2 - внутренний и внешний радиусы канала соответственно, коэффициенты a_n вычислялись по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_0(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad \text{Здесь } p_0(\varphi) \text{ - внешнее}$$

воздействие в начальный момент времени, которое имело вид:

$$p_0(\varphi) = \begin{cases} A \sin^2 \left[\pi(\varphi - \varphi_1) / (\varphi_2 - \varphi_1) \right], & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \\ 0, & \varphi \notin [\varphi_1, \varphi_2] \end{cases}, \quad 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi, \text{ где}$$

A, φ_1, φ_2 - некоторые постоянные.

Угловая скорость волны давления равнялась ω_1 (что соответствует резонансу в канале); для значений ω_n при $n > 1$ выполняется равенство $\omega_n = n\omega_1$. Математическая задача формулировалась так: определить функцию η на основе численного решения уравнения (8) конечно-разностным методом с начальными условиями $f(r, \varphi, 0) = 0, f_t(r, \varphi, 0) = 0$ и граничными условиями $f_r = 0$ при

$r = R_1$, $f_r = 0$ при $r = R_2$ (f_r - частная производная функции f по r).

В § 3.3 была построена неявная разностная схема для уравнения (8). При достаточно малых β исходная схема была заменена соответствующей факторизованной схемой [5]. Полученная алгебраическая система с соответствующими дополнительными условиями была решена двумя последовательными одномерными прогонками (по φ - циклическая прогонка).

В § 3.4 приведены результаты расчётов. При проведении численного эксперимента предполагалось, что параметры R_2 , α , β , A , φ_1 и φ_2 остаются постоянными, а R_1 , μ и N изменяется в определённых пределах. Результаты вычислений приведены на рис.4 – 6 для $\mu = 0.0, 0.5$ и 1.0 соответственно в одинаковые моменты времени ($R_1 = 1.3$, $R_2 = 1.6$). На рисунках для наглядности схематично изображён корпус кольцевого канала с обозначением уровня невозмущённой свободной поверхности. Во всех трёх случаях форма свободной поверхности – уединённая волна, что на качественном уровне подтверждается лабораторными экспериментами. Уединённая волна движется в направлении увеличения φ с постоянной угловой скоростью внешнего воздействия ω_1 , найденной из уравнения (9) при $R_1 = 1.3$, $R_2 = 1.6$. Как показали расчёты, вдоль радиуса канала форма свободной поверхности при $R_1 = 1.3$ меняется мало, и при дальнейшем увеличении R_1 до значения 1.5 зависимость $\eta(r)$ становится ещё более слабой. Тем самым, первое допущение, сделанное в Главе 2, является вполне оправданным. На рис.4 – 6 хорошо видно, что по мере увеличения μ амплитуда уединённой волны падает, а длина растёт, что также подтверждается лабораторными исследованиями. В диссертации приведена зависимость амплитуды уединённой волны от поверхностной плотности μ . С течением времени амплитуда уединённой волны постепенно увеличивается, так как в задаче не учитываются потери энергии волны, связанные с трением, а угловая скорость атмосферного возмущения соответствует резонансу в канале. Согласно расчётам, во флотирующей жидкости наблюдается некоторое отставание уединённой волны от аналогичной волны, распространяющейся в жидкости без флотации, причём эффект запаздывания усиливается по мере возрастания μ . На рисунках 4 – 6 форма свободной поверхности показана в одинаковые моменты времени, но при различных значениях угла φ для более удобного сравнения параметров волн. Отставание уединённой волны при увеличении μ происходит по причине, указанной в Главе 2 при рассмотрении узкого кольцевого канала.

В четвёртой главе проведён численный эксперимент по моделированию процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся в одном направлении и на встречных курсах в узком кольцевом канале и – на встречных курсах – в узком прямоугольном канале в отсутствие внешнего воздействия (флотация не учитывалась). В качестве модельного уравнения было выбрано безразмерное уравнение Буссинеска в модифицированной форме.

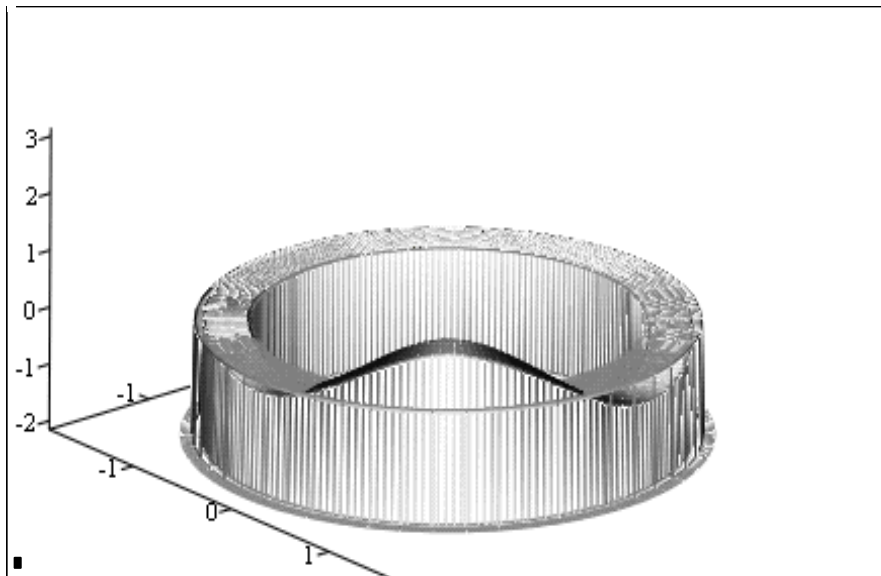


Рис. 4

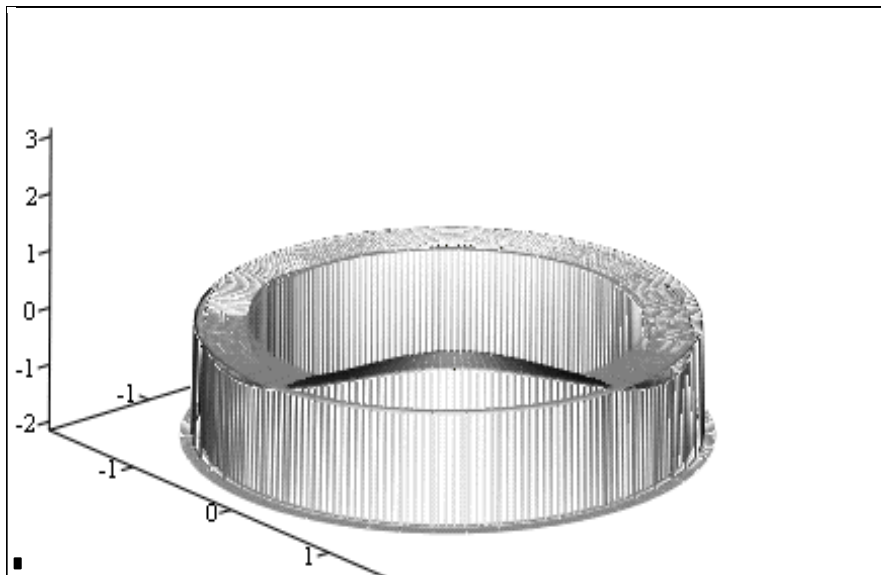


Рис. 5

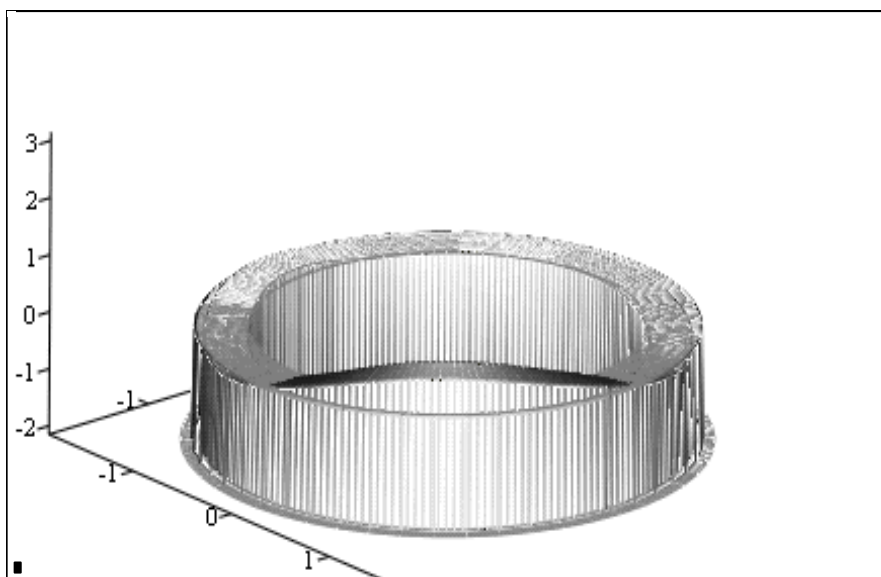


Рис. 6

В § 4.1 даны вводные замечания, показывающие преимущество использования уравнения Буссинеска для численного моделирования уединённых волн, а также приведён вывод безразмерного уравнения Буссинеска в модифицированной форме.

В § 4.2 выполнен численный эксперимент по моделированию процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся в одном направлении в достаточно узком кольцевом канале. В п.1 данного параграфа приведена математическая постановка задачи, и построена соответствующая разностная схема. Рассматриваемая задача имеет вид (все переменные и константы – безразмерные):

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - \varepsilon(\eta^2)_{xx} - \delta\eta_{xxtt} = 0 \quad (10)$$

$$\eta(x, 0) = -\cos(2\pi x/l), \quad \eta_t(x, 0) = (2\pi/l)\sin(2\pi x/l) \quad (11)$$

$$\eta(x+l, t) = \eta(x, t) \quad \text{для любого } x \quad (12)$$

Здесь η – возвышение свободной поверхности жидкости, $l=10.0$ – длина кольцевого канала, $\varepsilon=(3/2)\alpha$, $\delta=(1/3)\beta$, $\beta \ll 1$, $\alpha = O(\beta)$. Под длиной l понималась длина окружности радиуса $0.5(R_1 + R_2)$, где R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы канала соответственно и $1 - (R_1/R_2) \ll 1$. В уравнении (10) отброшены все слагаемые, пропорциональные α^2 , $\alpha\beta$, β^2 .

В п.2 приведены результаты вычислений. Соответствующая алгебраическая система была решена методом циклической прогонки. Расчёты показали, что в зависимости от значений ε и δ начальное возмущение с течением времени трансформируется и распадается на 2, 3 или 4 уединённые волны различной амплитуды, движущиеся в одном направлении со скоростями, прямо пропорциональными амплитудам. При движении по окружности уединённые волны испытывают столкновения, но по окончании взаимодействия полностью восстанавливают свою форму. Подробно проанализирована эволюция начального возмущения с течением времени. Показано, что с некоторого момента времени начинается процесс возврата системы в первоначальное состояние в полной аналогии с результатами работы [3], после чего снова происходит распад, и картина циклически повторяется. Установлено, что процесс возврата является почти полным зеркальным отражением процесса распада в пространстве и времени. Результаты расчётов приведены на рис.7 – 9, на которых представлены графики функции $\eta(x_m, t_k) = V_{k,m}$ в различные моменты времени. На рис.7 показана эволюция начального возмущения (штрих-пунктирная линия) с течением времени: образование локального максимума (сплошная линия) и появление дополнительного максимума меньшей высоты (пунктирная линия). На рис.8 построен график η в момент времени, когда начальное возмущение практически полностью распалось на 4 уединённые волны. На рис.9 последовательно показан процесс возврата, а соответствующие кривые (пунктирная и сплошная) являются зеркальным отражением кривых,

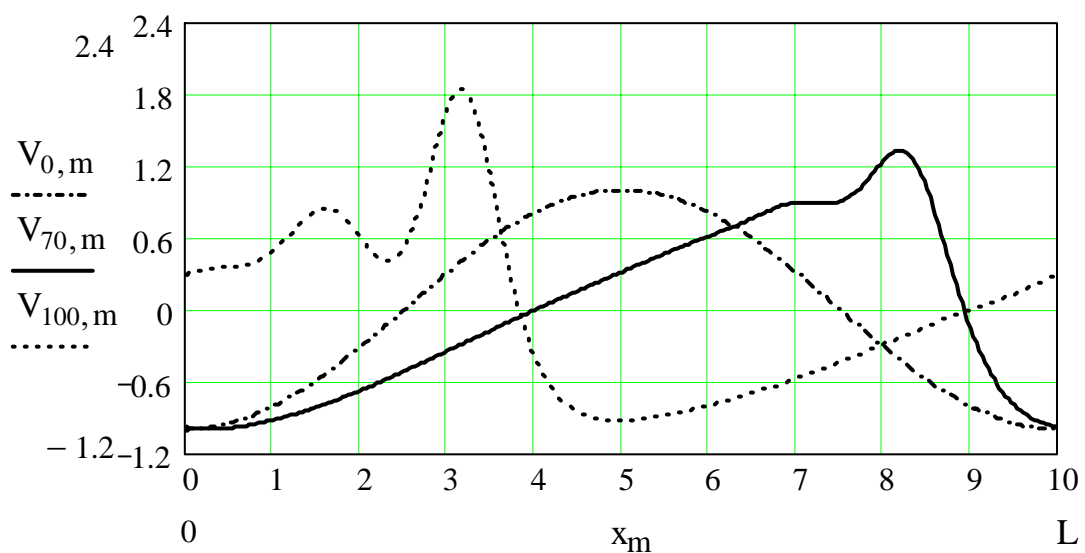


Рис. 7

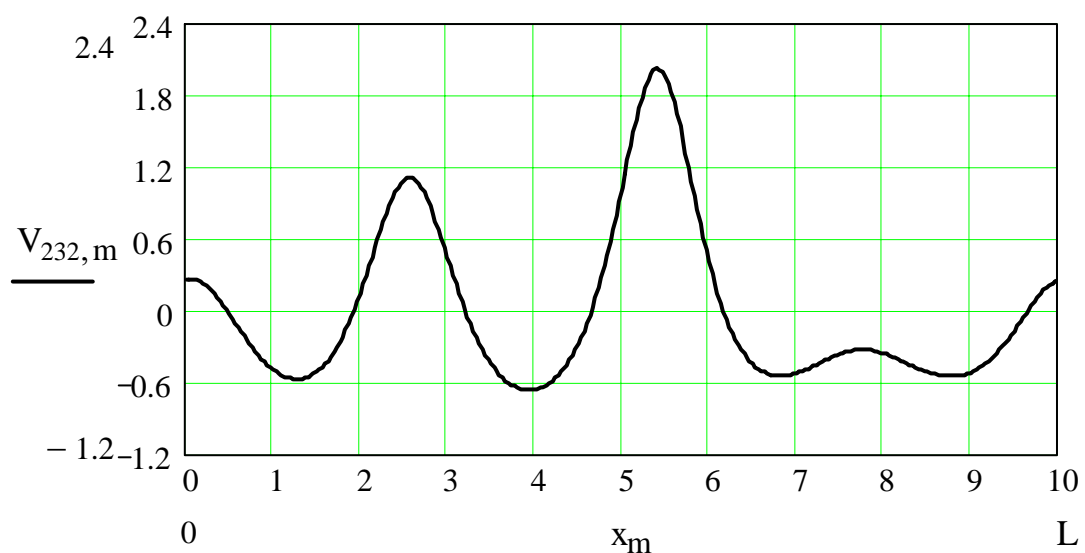


Рис. 8

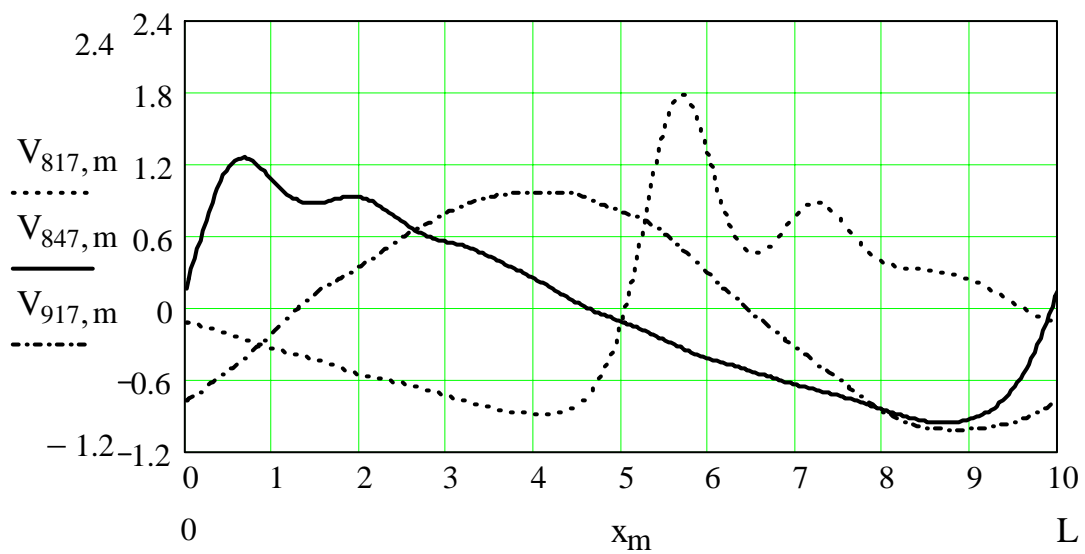


Рис. 9

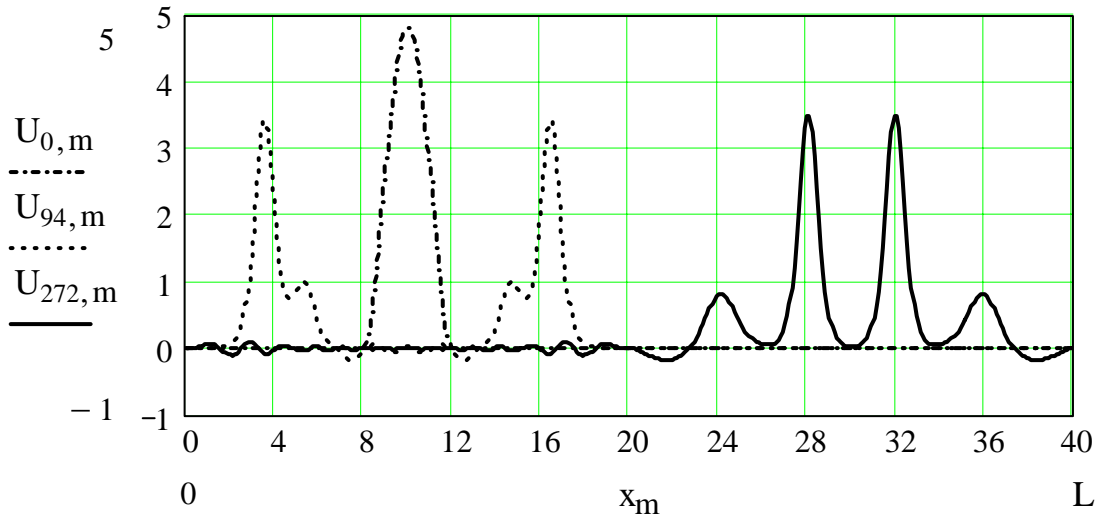


Рис. 10

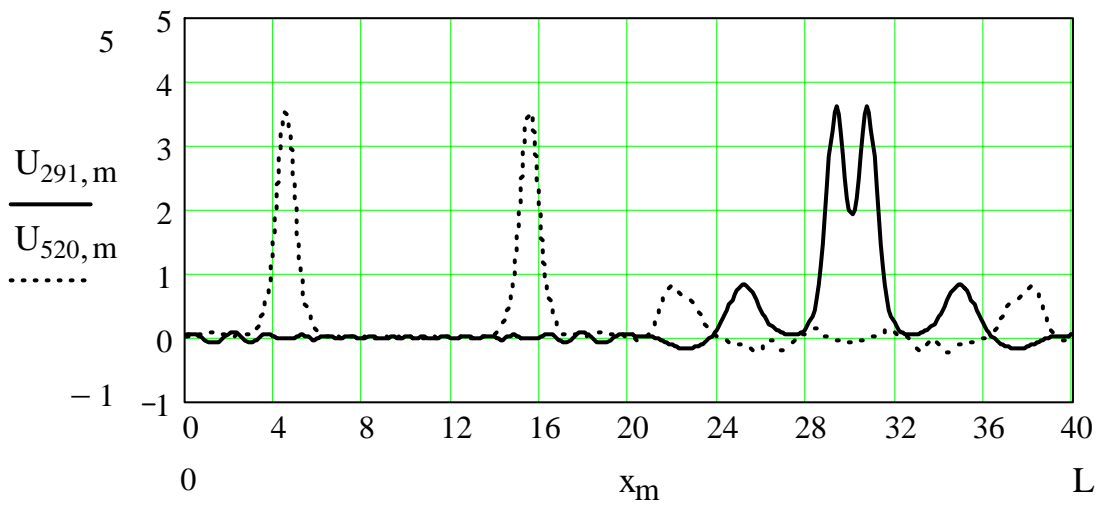


Рис. 11

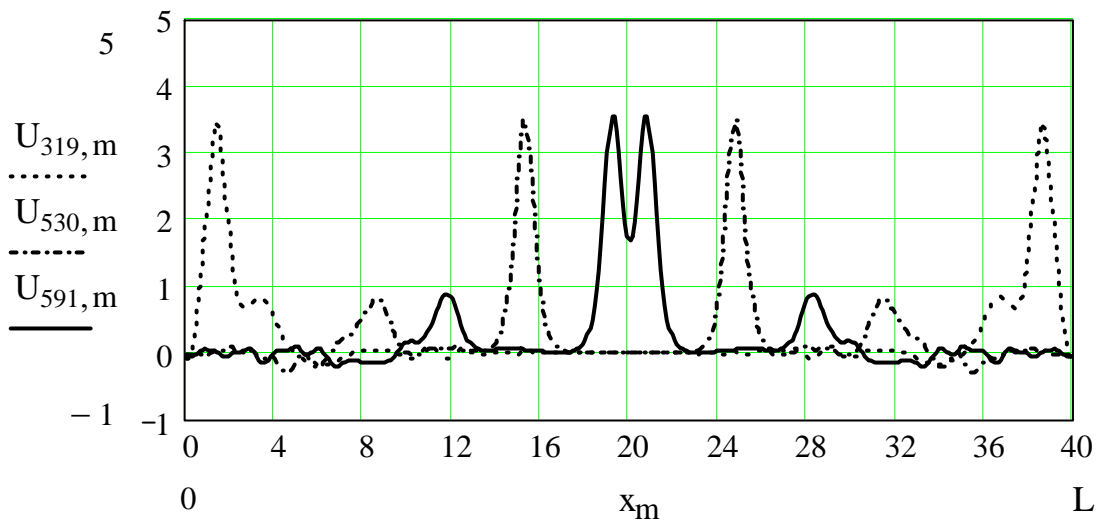


Рис. 12

изображённых на рис.7 теми же линиями. В момент времени t_B (время возврата) начальный профиль полностью восстановился (рис.9, штрих-пунктирная линия), причём пунктирная и сплошная кривые на рис.9 построены в моменты времени, которые получаются, если из t_B вычесть моменты времени, в которые построены пунктирная и сплошная кривые на рис.7.

В § 4.3 проведён численный эксперимент по моделированию процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся на встречных курсах в достаточно узких кольцевом и прямоугольном каналах одинаковой длины. В п.1 данного параграфа приведена математическая постановка задачи (соответствующая разностная схема взята из предыдущего параграфа). Рассматриваемая задача имеет вид (все переменные и константы – безразмерные):

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - \varepsilon(\eta^2)_{xx} - \delta\eta_{xxtt} = 0 \quad (13)$$

Начальные условия:

$$\eta(x,0) = \begin{cases} A(x-a)^2(x-b)^2, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}, \quad 0 < a < b < l, \quad \eta_t(x,0) = 0, \quad (14)$$

где $A=0.3$, $l=40.0$ - длина канала (кольцевого или прямоугольного), а постоянные a и b принимают соответственно значения 4.0 и 8.0 - для кольцевого канала и 18.0 и 22.0 - для прямоугольного.

Граничные условия: $\eta(x+l,t) = \eta(x,t)$ при любом x - для кольцевого канала, $\eta_x(0,t) = \eta_x(l,t) = 0$ - для прямоугольного канала.

В п.2 приведены результаты расчётов (соответствующие алгебраические системы решены методом прогонки, для кольцевого канала использована циклическая прогонка). На рис.10–11 представлены графики $\eta(x_m, t_k) = U_{k,m}$ в различные моменты времени для случая кольцевого канала. На рис.10 показан распад начального возмущения (штрих-пунктирная линия) на 2 импульса, расходящиеся в противоположные стороны, от которых постепенно отделяются дополнительные максимумы меньшей высоты (пунктирная линия). Сплошной линией на рис.10 показан профиль η в момент полного распада начального возмущения на 2 группы уединённых волн (группы сближаются вследствие периодичности). На рис.11 изображён момент столкновения наибольших из волн (сплошная линия) и показано положение групп волн, полностью прошедших процесс взаимодействия (пунктирная линия). На рис.12 представлены аналогичные графики для случая прямоугольного канала: наибольшие волны, испытав отражения от торцевых стенок, сталкиваются с набегающими на стенки волнами меньшей амплитуды (пунктирная линия), обе группы волн после полного отражения движутся на встречных курсах (штрих-пунктирная линия), наибольшие волны вступают во взаимодействие между собой (сплошная линия).

В заключении сформулированы основные результаты диссертации:

1. Для описания нелинейных поверхностных волн в узком кольцевом канале выведена неоднородная система уравнений Буссинеска при наличии флотации

в новой форме, которая решена численно неполным методом Галёркина с нулевыми начальными и периодическими граничными условиями.

2. Показано, что в том случае, когда атмосферное возмущение представляет собой волну давления в форме изолированного импульса, бегущую вдоль узкого канала с постоянной скоростью длинных гравитационных волн, на поверхности жидкости образуется уединённая волна, движущаяся со скоростью возмущения.
3. В результате численного эксперимента установлено, что во флотирующей жидкости отклик водной поверхности в форме уединённой волны приобретает заданную скорость возмущения за большее время в сравнении со случаем, когда флотация отсутствует. При этом указанный временной интервал увеличивается по мере возрастания поверхностной плотности флотирующего вещества. Вместе с тем показано, что при наличии флотирующего вещества амплитуда уединённой волны падает, а длина растёт.
4. Для описания нелинейных поверхностных волн в кольцевом канале конечной ширины выведена неоднородная система уравнений Буссинеска в двумерном случае при наличии флотации. Полученная система сведена к одному новому нелинейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка, которое решено численно конечно-разностным методом с нулевыми начальными условиями и однородными граничными условиями второго рода. Численное решение данного уравнения позволило рассчитать форму свободной поверхности жидкости в канале.
5. Показано, что в случае канала конечной ширины при определённых условиях волна атмосферного давления в форме изолированного импульса, распространяющаяся вдоль канала с постоянной угловой скоростью, может возбудить уединённую волну на свободной поверхности жидкости, движущуюся с такой же угловой скоростью.
6. Установлено, что эффекты, связанные с флотацией, которые были обнаружены при численном моделировании уединённых волн в узком кольцевом канале, имеют место и в случае кольцевого канала конечной ширины.
7. Проведено на качественном уровне сравнение результатов вычислений, с данными лабораторных исследований для флотирующей жидкости и жидкости без флотации, которое показало их удовлетворительное сходство.
8. Проведён численный эксперимент с уравнением Буссинеска по моделированию процессов образования и взаимодействия уединённых волн в достаточно узких кольцевом и прямоугольном каналах в отсутствии внешнего воздействия.
 - (а) Выполнено численное исследование процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся в одном направлении в узком кольцевом канале. Показано, что процесс возврата в первоначальное состояние системы уединённых волн, на которые распадается начальное возмущение, является зеркальным отражением процесса распада в пространстве и времени.
 - (б) Проведено численное исследование процессов образования и взаимодействия уединённых волн, движущихся на встречных курсах в

кольцевом и прямоугольном каналах малой ширины. В случае прямоугольного канала численный эксперимент позволил наблюдать процесс отражения уединённых волн от вертикальных стенок.

Основные результаты диссертации изложены в следующих публикациях:

1. *Глебова О.А., Кравцов Ал.В., Шелковников Н.К.* Экспериментальное и численное исследование ветровых уединённых волн на воде // Изв. Акад. наук, серия физическая. 2002. Т.66. № 12. с. 1727-1729.
2. *Глебова О.А., Кравцов А.В., Шелковников Н.К.* Экспериментальное и численное исследование ветровых уединённых волн на воде. Труды VIII Всероссийской школы – семинара «Волновые явления в неоднородных средах». Часть 2. Физ. ф-т МГУ. с. 10 – 11.
3. *Шелковников Н.К. Глебова О.А., Кравцов Ал.В.,* Лабораторное и численное исследование ветровых уединённых волн на воде. В сб. расширенных тезисов докладов научной конференции Ломоносовские чтения, секция физики. М.: Физ. ф-т МГУ. 2002. с. 140 – 142.
4. *Кравцов Ал.В., Кравцов В.В., Шелковников Н.К.* Численный эксперимент по моделированию уединённых волн на поверхности жидкости в кольцевом канале // ЖВМиМФ. 2004. Т.44. № 3. с. 559–561.
5. *Кравцов Ал.В., Кравцов В.В., Шелковников Н.К.* Генерация уединённых волн на поверхности жидкости в кольцевом канале с учётом флотации // Депонирована в ВИНТИ, № 977 – В. 2003.
6. *Кравцов В.В., Шелковников Н.К., Кравцов Ал.В.* Численное моделирование уединённых волн на поверхности жидкости в кольцевом канале. В сб. расширенных тезисов докладов научной конференции Ломоносовские чтения, секция физики. М.: Физ. ф-т МГУ. 2003.
7. *Кравцов Ал.В., Кравцов В.В., Шелковников Н.К.* Образование и взаимодействие уединённых волн, движущихся на встречных курсах // ЖВМиМФ. 2003. Т.43. № 11. с. 1706 – 1708.
8. *Кравцов В.В., Кравцов Ал.В.* Образование и взаимодействие уединённых волн, движущихся в одном направлении в узком кольцевом канале. Находится в печати.
9. *Шелковников Н.К. Глебова О.А., Кравцов Ал.В.,* Взаимодействие уединённых волн в кольцевом аэрогидроканале. В сб. расширенных тезисов докладов научной конференции Ломоносовские чтения, секция физики. М.: Физ. ф-т МГУ. 2002. с. 139 – 140.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Рабинович А.Б.* Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение. – С.-Пб.: Гидрометеиздат. 1993. 326 с.
2. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами–Н.Н.: ИПФ РАН.1996. 276 с.
3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V.15. p. 240 – 243.
4. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. – М.: Наука. Физматлит. 1998. 448 с.
5. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука. 1978. 512 с.