Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Физический факультет

На правах рукописи

МАЛЫШЕВ Дмитрий Владимирович

Алгебра Хопфа графов и перенормировки диаграмм Фейнмана

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2005

УДК 530.145: 512

Работа выполнена на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор В. В. Белокуров
МГУ им. М.В.Ломоносова, г. Москва

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., член-корр. РАН И.В.Волович
МИРАН имени В.А.Стеклова, г. Москва

д.ф.-м.н., вед. н.с. В.А.Смирнов
НИИЯФ МГУ имени Д.В. Скобельцына, г. Москва

Ведущая организация: Объединенный институт ядерных исследований,
ЛТФ им. Н.Н.Боголюбова, г.Дубна

Защита состоится “19“ мая 2005г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета К 501.001.17 в Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического факультета МГУ.

Автореферат разослан: “19“ апреля 2005г.

Ученый секретарь
диссертационного совета П.А.Поляков

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы

В диссертации рассматривается проблема расходимости многопетлевых интегралов в квантовой теории поля. Для изучения этой проблемы используется алгебра Хопфа фейнмановских диаграмм. Метод алгебры Хопфа графов – это один из наиболее современных методов в физике высоких энергий, который позволяет более естественно, с математической точки зрения, связать процедуру вычитания расходимостей, т.е. R-операцию Боголюбова, и ренормгруппу. В целом интерес к алгебре Хопфа связан с возможностью применения в квантовой теории поля новых математических методов, таких как теория квантовых групп и метод деформационного квантования. Алгебра Хопфа графов позволяет по-новому взглянуть на структуру квантовой теории поля. Так, в диссертации показано, что с помощью алгебры Хопфа можно найти уравнения ренормгруппы для отдельных фейнмановских диаграмм, в то время как стандартные уравнения записываются для суммы диаграмм данного порядка. Таким образом, уравнения ренормгруппы в формализме алгебры Хопфа позволяют получить более детальную информацию, чем обычные уравнения.

Проблема расходимости фейнмановских интегралов была разрешена Боголюбовым и Парасюком в виде R-операции. С физической точки зрения решение проблемы расходимостей связано с существованием ренормгрупповой инвариантности, которая была открыта в работах Штюкельберга – Петермана и Гелл-Манна – Лоу. Всеобщее признание метод ренормгруппы получил после работ Боголюбова и Ширкова, которые исследовали структуру ренормгруппы с математической точки зрения, а также дали более прозрачную физическую интерпретацию. Почти сразу после открытия ренормгруппа нашла широкое применение квантовой теории поля (вычисление констант связи и аномальных размерностей операторов при больших энергиях) и статистической физике (свойства корреляционных функций вблизи критических точек). Один из наиболее впечатлительных результатов применения ренормгруппы –

это объяснение асимптотической свободы в теории сильных взаимодействий, данное Гроссом, Вильчеком и Политцером.

Пертурбативные вычисления, дополненные процедурой устранения расходимостей, позволили достичь удивительного согласования теории с экспериментом. Тем не менее оставался вопрос о математической структуре R-операции и о ее связи с ренормгруппой с математической точки зрения. Ответ на этот вопрос был найден Коном и Краймером, которые показали, что в основе операции вычитания расходимостей лежит алгебра Хопфа графов.

Для описания R-операции Кон и Краймер используют понятие линейного пространства графов $\mathcal{H}$. Это пространство является бесконечномерным линейным пространством, в котором базисные вектора помечены не индексом $i = 1,\ 2,\ 3\ldots$, а фейнмановскими диаграммами $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\ldots$

$$\vec{x} = \sum_{\gamma} x_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} \tag{1}$$

Обычно базисные вектора обозначают теми же символами, что и соответствующие графы, т.е. просто пишут γ вместо $\vec{e}_{\gamma}$.

Основная операция необходимая для определения операции вычитания расходимостей – это копроизведение графов. Копроизведение является отображением из линейного пространства в тензорное произведение линейных пространств.

Фейнмановские интегралы можно воспринимать как функции на графах, поскольку для заданных внешних импульсов фейнмановский интеграл ставит в соответствие графу число. Таким образом, фейнмановские интегралы являются элементами дуального пространства $\mathcal{H}^*$. Копроизведение в линейном пространстве задает произведение в дуальном пространстве, при этом перенормированный фейнмановский интеграл R является произведением контрчлена C и фейнмановского интеграла F

$$R = C * F \tag{2}$$

Отметим, что произведение в формуле (2) имеет довольно сложную структуру, которая воспроизводит боголюбовскую операцию вычитания расходимостей. Умножение (2) является ассоциативным, но не коммутативным, поэтому можно определить нетривиальную алгебру Ли с коммутатором[1]

$$[F_1, F_2]_* = F_1 * F_2 - F_2 * F_1. \tag{3}$$

Бета функция, как генератор ренормгрупповых преобразований, принадлежит этой алгебре Ли.

Кон и Краймер предложили рассматривать бегущую константу связи как элемент пространства $\mathcal{H}^*$, при этом действие бета функции задает перенормировку константы связи. В диссертации предлагается рассмотреть действие бета функции не просто на эффективную константу связи, а на вершинную функцию. Как известно, эффективную константу связи в теории можно задать с помощью вершинной функции в точке нормировки (например в симметричной точке по внешним импульсам). Отличие вершинной функции состоит в том, что она определена для произвольных внешних импульсов, таким образом, уравнение ренормгруппы на вершинную функцию является более сильным, чем уравнение на бегущую константу связи. В диссертации показано, что уравнение ренормгруппы на вершинную функцию в пространстве $\mathcal{H}^*$ позволяет найти ренормгрупповые уравнения на отдельные фейнмановские интегралы. Ранее подобные уравнения были выведены К. Г. Четыркиным из анализа сингулярностей в интегралах. Также в диссертации показано, что в теории φ^4 с помощью обобщенных уравнений ренормгруппы можно вычислить ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских интегралов при произвольных внешних импульсах.

Кроме внешних импульсов сами вершины могут иметь дополнительную структуру. Так в теориях с матричными полями фейнмановские диаграммы имеют вид ленточных графов. Каждый пропагатор в ленточном графе состоит из двух линий, при этом каждой линии соответствует свой матричный индекс. Если в теории есть только однследовые взаимодействия, то в вершинах диаграмм разрешены только циклические перестановки линий (в отличие от произвольных перестановок в обычных графах). Наличие меньшего количества симметрий накладывает больше ограничений на структуру перенорми-

[1] Для определения алгебры Ли также необходимо, чтобы соответствующая алгебра Хопфа была градуированной. Для алгебры Хопфа графов в качестве градуировки можно выбрать число петель графа.

ровок. Кроме того, перенормировки могут поменять вид взаимодействия, так если в затравочном лагранжиане были только односледовые взаимодействия, то в перенормированном лагранжиане могут появиться многоследовые взаимодействия. Задача состоит в том, чтобы инвариантно описать матричную структуру перенормировок, т.е. найти алгебру Хопфа ленточных диаграмм. Эта задача является первым шагом на пути к построению алгебры Хопфа графов в теориях с неабелевыми калибровочными полями, т.е. в теориях Янга-Миллса. Отличие матричных теорий от теорий Янга-Миллса заключается в существовании калибровочной инвариантности, с которой алгебра Хопфа должна быть согласована. Следовательно, алгебра Хопфа в теории Янга-Миллса не свободна, а с дополнительными связями, задаваемыми тождествами Славнова-Тейлора.

Интерес к перенормировкам ленточных графов связан еще и с тем, что ленточные графы соответствуют поверхностям с границей, а вклад диаграммы γ пропорционален N^{χ_γ}, где χ_γ – эйлерова характеристика соответствующей поверхности, а N – размер матриц. Аналогичное разложение по родам поверхностей возникает в теории струн, где ряд по струнной константе связи – это ряд по родам мирового листа струны. Поскольку ленточные графы соответствуют двумерным поверхностям, то алгебра Хопфа ленточных графов должна соответствовать алгебре Хопфа двумерных поверхностей, которая может быть полезна при изучении теории струн.

1.2 Цель работы

- Изучение уравнений ренормгруппы, записанных в формализме алгебры Хопфа графов.
- Решение полученных уравнений и сравнение со стандартными уравнениями ренормгруппы.
- Исследование ведущих логарифмов для отдельных фейнмановских интегралов.
- Построение алгебры Хопфа ленточных графов.

1.3 Научная новизна

- Выписаны уравнения ренормгруппы для теории φ^4 в формализме алгебры Хопфа графов.
- Найдены ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских интегралов с помощью однопетлевых уравнений ренормгруппы.
- Предложена интерпретация новых уравнений ренормгруппы в виде ренормгрупповых уравнений в теории с бесконечным набором полей.
- Построена алгебра Хопфа ленточных графов.

1.4 Практическая и научная ценность

- Показано, что по сравнению со стандартными уравнениями ренормгруппы новые уравнения позволяют получить более детальную информацию о вершинных функциях.
- Предложен новый метод нахождения коэффициентов перед ведущими логарифмами для отдельных фейнмановских интегралов как в симметричных, так и в несимметричных точках.
- Алгебра Хопфа ленточных графов может быть использована для изучения ренормгруппы в теориях с матричными полями и в неабелевых калибровочных теориях.

1.5 Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации были апробированы в выступлениях на конференции Ломоносов 2002, МГУ, Москва; на конференции Calc'2003, Дубна; на семинаре в университете города Майнц, Германия; на семинаре в университете города Уппсала, Швеция; на семинаре в ИЯИ, Москва; на семинаре в ИТЭФ, Москва; на школе-семинаре Волга 16'04, Казань и на семинаре в ОИЯИ, Дубна.

По материалам диссертации опубликовано 4 работы.

1.6 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Список литературы содержит 64 наименования. Общий объем диссертации составляет 117 страниц.

2 Содержание диссертации

Во введении рассматривается история развития методов ренормгруппы в квантовой теории поля, современные приложения ренормгруппы, а также актуальность выбранной темы.

В первой части рассмотрена проблема расходимости фейнмановских интегралов. В качестве примера изучается безмассовая скалярная теория с взаимодействием φ^4 в 4-мерном евклидовом пространстве. Расходимости имеют локальную структуру в координатном пространстве. Аналогичная ситуация возникает в теории обобщенных функций, где процедура устранения локальных бесконечностей называется регуляризацией функционалов. В диссертации рассматриваются фейнмановские интегралы в параметрическом представлении. Показано, что устранение расходимости в однопетлевом интеграле аналогично регуляризации функционала со степенной особенностью в нуле.

Во второй части исследуется комбинаторика R-операции. Сначала показано, что процедура устранения расходимостей имеет структуру алгебры Хопфа графов $\mathcal{H}$. Далее выписана алгебра Ли дуальная к алгебре Хопфа графов, и найдены уравнения ренормгруппы в терминах данной алгебры Ли. Четырехточечная вершинная функция F рассматривается как вектор в дуальном пространстве $\mathcal{H}^*$

$$F = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{n_\gamma}}{S_\gamma} F_\gamma \gamma, \tag{4}$$

здесь сумма идет по одночастично неприводимым графам с четырьмя внешними линиями, n_γ – число петель графа γ, S_γ – симметрийный фактор, F_γ – значение фейнмановского интеграла на графе γ, а символ γ, стоящий в конце, означает базисный вектор в пространстве $\mathcal{H}^*$.

В однопетлевом приближении нет Z-факторов, а также перенормировок массы, поэтому уравнения Каллана-Симанчика имеют следующий вид

$$\partial_\tau F + \hat{\beta} \circ F = 0. \tag{5}$$

производная ∂_τ действует на координаты, т.е. на фейнмановские интегралы F_γ, а оператор $\hat{\beta}$ действует на базисные вектора γ с помощью вставки однопетлевых диаграмм. Обратим внимание, что левая часть в уравнении (5) имеет вид ковариантной производной от F, при этом ∂_τ – это обычная производная, а бета функция $\hat{\beta}$ – это связность, которая описывает изменение базисных векторов при движении вдоль параметра $\tau = \log \mu^2$.

В третьей части рассмотрено применение обобщенных уравнений ренормгруппы. В качестве примера изучаются ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских интегралов в симметричной точке. Пусть γ_n – n-петлевой граф с четырьмя внешними ребрами, тогда лидирующий логарифм в фейнмановском интеграле равен

$$F(\gamma_n) = c(\gamma_n) \left(\ln \frac{\mu^2}{p^2} \right)^n, \tag{6}$$

Сначала коэффициент $c(\gamma)$ найден с помощью прямой оценки фейнмановских интегралов в виде суммы по максимальным деревьям расходящихся подграфов

$$c(\gamma_n) = \sum_{T_{\gamma_n}} \frac{1}{n_{\gamma_1}} \cdots \frac{1}{n_{\gamma_n}}, \tag{7}$$

суммирование идет по T_{γ_n} – максимальным деревьям с корнем, соответствующим расходящимся подграфам $\gamma_i \subset \gamma_n$, а n_{γ_i} – число петель в графе γ_i. Затем из однопетлевого уравнения ренормгруппы (5) выведено уравнение на отдельные фейнмановские интегралы

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\gamma_n) = \sum_{\gamma_{n-1} = \gamma_n / \gamma_1} F(\gamma_{n-1}), \tag{8}$$

и показано, что можно коэффициент $c(\gamma)$ можно получить из уравнений ренормгруппы в виде рекуррентного соотношения, выражающего главный логарифм для $(n+1)$-петлевой диаграммы через n-петлевые диаграмм

$$c(\gamma_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{\gamma_n = \gamma_{n+1}/\gamma_1} c(\gamma_n), \tag{9}$$

где γ_{n+1} – $(n+1)$-петлевая диаграмма, γ_1 – однопетлевая поддиаграмма в γ_{n+1}, а $\gamma_n = \gamma_{n+1}/\gamma_1$ – n-петлевая диаграмма, полученная стягиванием поддиаграммы $\gamma_1 \subset \gamma_{n+1}$ в точку. Суммирование производится по всем возможным n-петлевым диаграммам γ_n, которые могут быть получены стягиванием однопетлевых диаграмм в γ_{n+1}.

Связь между рекурсивной формулой и суммой по деревьям аналогична связи рекурсивного определения контрчленов и определения с помощью суммы по лесам. Рассмотрено несколько примеров применения рекурсивной формулы и формулы с суммой по деревьям. Далее найдено решение уравнения ренормгруппы в виде экспоненты от бета-функции и показано явно, что экспонента от однопетлевой бета-функции задает перенормированную вершинную функцию в главном логарифмическом приближении. В конце этой части на примере теории с двумя скалярными полями проверяется предположение, что новые уравнения ренормгруппы – это максимальная информация, которую можно извлечь из условия ренормгрупповой инвариантности, в том смысле, что для инвариантности любой безмассовой скалярной теории достаточно выполнения этих уравнений, и, с другой стороны, что уравнения ренормгруппы в теории с бесконечным набором полей эквивалентны обобщенным уравнениям ренормгруппы.

В четвертой части найдены ведущие логарифмические асимптотики фейнмановских интегралов в несимметричных точках. Сначала ведущие логарифмы вычислены рекурсивно из уравнений ренормгруппы, а затем с помощью паркетного приближения. В качестве примера рассмотрен двухпетлевой интеграл. Используя паркетное приближение, также заново выведен результат для симметричной точки, выраженный через сумму по деревьям.

В пятой части найдено обобщение алгебры Хопфа на случай ленточных графов на примере матричной теории с взаимодействием Φ^4. Проблема состоит в том, что ленточные графы имеют меньше симметрий, чем обычные, а именно, в каждой вершине разрешены только циклические перестановки ребер (в более общем случае многоследовых взаимодействий ребра в вершинах разбиваются на группы, и циклические перестановки разрешены внутри каждой из групп). Уменьшение числа симметрий связано с появлением дополнительной структуры, $1/N$ разложения. Алгебра Хопфа должна быть согласована с этой структурой. При изучении алгебры Хопфа использована связь между ленточными графами и поверхностями. В теории с односледовыми взаимодействиями есть взаимнооднозначное соответствие между ленточными графами и поверхностями с клеточным разбиением. В случае многоследовых взаимодействий возникает разбиение на сферы с отверстиями. В диссертации построена алгебра Хопфа поверхностей с разбиением на сферы с отверстиями. Некоторые наиболее сложные аксиомы алгебры Хопфа доказаны в приложениях.

В заключении подводятся итоги проделанной работы.

Основные публикации по теме диссертации

[1] Malyshev D. Hopf algebra of ribbon graphs and renormalization// JHEP - 2002, т.05, N 013, 29 страниц.

[2] Малышев Д.В. Обобщение 1/N разложения в теориях с матричными полями// Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 2002, N6, с.26-29.

[3] Malyshev D. Leading RG logs in phi**4 theory// Phys. Lett. B - 2004, т.578, с.231-234

[4] Малышев Д.В. Алгебра Хопфа графов и ренормгрупповые уравнения// ТМФ. 2005, т.143, N 1, с. 22-32.