Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

На правах рукописи

Николаева Наталия Николаевна

Численные методы решения уравнений типа Абеля на компактных множествах и их применение к обратным задачам ультразвуковой потокометрии

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2005

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А. Г. Ягола (МГУ).
Научный консультант:	доктор физико-математических наук, доцент М. Н. Рычагов (МИЭТ).
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А. С. Леонов (МИФИ); доктор физико-математических наук, профессор В. А. Буров (МГУ)
Ведущая организация:	Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского.

Защита состоится 19 мая 2005 г. в 15 час. на заседании диссертационного совета К 501.001.17 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан 18 апреля 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 501.001.17
доктор физико-математических наук П. А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В диссертации рассматриваются линейные интегральные уравнения типа Абеля первого рода, получившие широкое распространение в различных областях естественных наук. Особое внимание уделяется двум группам таких уравнений. Первая группа имеет вид:

$$\int\limits_{R_1}^{\xi} (\xi - r)^{-\alpha} z(r)\, dr = u(\xi), \qquad \xi \in (R_1, R_2], \tag{B1}$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant R_1 < R_2 < \infty$, $u(R_1) \equiv 0$. К решению уравнений (B1) приводят обратные задачи механики, теории рассеяния и некоторые другие. Вторая группа имеет следующий вид:

$$\int\limits_{\xi}^{R_2} r(r^2 - \xi^2)^{-1/2} z(r)\, dr = u(\xi), \qquad \xi \in [R_1, R_2), \tag{B2}$$

где $0 \leqslant R_1 < R_2 < \infty$, $u(R_2) \equiv 0$. К решению уравнения (B2) приводят обратные задачи оптики, геофизики, физики плазмы, газодинамики, астрофизики, ультразвуковой потокометрии и многие другие.

Интегральные уравнения типа Абеля первого рода относятся к классу некорректно поставленных задач. Для получения адекватных результатов, на основе которых можно делать выводы об изучаемом явлении или объекте, необходимо разрабатывать регуляризирующие алгоритмы, учитывающие всю имеющуюся априорную информацию о структуре искомого решения, естественных с физической точки зрения ограничениях на его поведение. Использование определенным образом данной информации иногда позволяет выделить в пространстве предполагаемых решений некоторое компактное множество. Это даёт возможность применять эффективные алгоритмы, позволяющие находить приближенное решение, строго удовлетворяющее физическим характеристикам исследуемых объектов или изучаемых явлений.

При практическом решении интегральных уравнений типа Абеля первого рода интересно не только приближённое решение, построенное с помощью регуляризируещего алгоритма, но и оценка его близости к точному решению. Известно, что если искомое решение принадлежит некоторому компактному множеству в банаховом пространстве, то в этом случае оказывается возможным построить не только приближённое решение некорректной задачи, но и получить оценку точности приближения. Естественно, что при решении модельных задач с известным точным решением всегда можно оценить погрешность уклонения приближённого решения от точного (визуально или в выбранной метрике) при любых входных данных и их погрешностях, и тем самым выбирать наилучшие алгоритмы её решения и контролировать желаемую точность вычислений. В реальных же задачах, в которых используются данные экспериментов, вопрос о выборе регуляризирующего алгоритма, позволяющего оценить погрешность приближённого решения, стоит особенно остро.

Другой важный фактор — погрешность аппроксимации задачи. Ясно, что при решении реальной задачи погрешность аппроксимации, которая зависит, прежде всего, от количества точек сетки, не должна вносить дополнительной ошибки в задачу. К сожалению, не для всех обратных задач такая возможность существует. Можно подобрать такое число точек восстановления решения, чтобы погрешностью, связанной с заменой искомого бесконечномерного решения некоторым конечномерным, можно было пренебречь. Но пренебречь ошибкой, которая появляется в случае ограниченного числа экспериментальных данных, не всегда удаётся, и поэтому её необходимо учитывать, что не всегда легко осуществимо в рамках выбранной схемы решения. При решении обратной задачи ультразвуковой потокометрии, в которой необходимо реконструировать осесимметричные профили скорости потока жидкостей или газов в каналах с круговым поперечным сечением по данным измерений в двух или трёх точках, вопрос о том, можно ли использовать в этом случае интегральное уравнение типа Абеля для обработки экспериментальных данных и каким наилучшим образом оценить и учесть погрешность аппроксимации, является особенно актуальным.

Цели диссертации.

1. Создание новых математических методов приближённого решения интегральных уравнений типа Абеля первого рода на компактных множествах функций специального вида, которые допускают поточечную оценку погрешности получаемого приближения и удовлетворяют следующим дополнительным требованиям: а) учитывают специфику данного класса уравнений; б) являются достаточно гибкими, т. е. могут быть адаптированы к конкретной физической задаче; в) позволяют находить приближённое решение и оценивать его погрешность в зависимости от способа задания погрешностей входных данных и их числа; г) учитывают погрешность конечномерной аппроксимации исходной задачи; д) допускают построение области, которой принадлежит точное бесконечномерное решение задачи; е) могут быть использованы при любом числе экспериментальных данных.

2. Разработка вычислительных алгоритмов приближённого решения и оценки погрешностей решения интегральных уравнений типа Абеля первого рода на множествах монотонных, выпуклых, монотонно-выпуклых ограниченных функций и множестве функций с известной конечной константой Липшица.

3. Создание программного комплекса с удобным пользовательским интерфейсом для нахождения приближённых решений уравнений типа Абеля и для оценки погрешностей найденных решений на множествах функций, перечисленных ранее.

4. Применение разработанных алгоритмов для моделирования задачи двумерной реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости течения жидкости или газа в каналах с круговым поперечным сечением в экспериментах, использующих ультразвуковые многоплоскостные измерительные модули.

Методика исследования базируется на основных положениях теории решения некорректных задач, интегральных уравнений, функционального анализа, линейного и квадратичного программирования, численных методов.

Научная новизна данной работы состоит в следующем.

1. Впервые построены вычислительные алгоритмы, допускающие поточечную оценку погрешности приближённого решения уравнений типа Абеля на компактных множествах, учитывающие специфику данного класса уравнений, погрешность входных данных и погрешность конечномерной аппроксимации задачи. Предлагаемые методы решения позволяют гарантированно найти область, которой принадлежит точное бесконечномерное решение задачи. Рассматриваемые алгоритмы могут быть использованы при любом числе экспериментальных данных.

2. Впервые проведено математическое моделирование задачи двумерной реконструкции и оценки погрешности реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости течения жидкости или газа в каналах с круговым поперечным сечением на основе разработанных алгоритмов и использования специальных многоплоскостных ультразвуковых измерительных модулей. Теоретически исследована методика обработки экспериментальных данных в случае ограниченного числа измерительных плоскостей.

Практическая ценность полученных результатов заключается в том, что разработанные в работе алгоритмы решения уравнений типа

Абеля на множествах специальной структуры могут быть использованы в широких областях (например, в механике, томографии, астрофизике, спектроскопии, акустике, физике плазмы, оптике), так как рассматриваемый класс уравнений достаточно часто встречается в приложениях. Включение в математическую постановку задачи априорной информации (естественной с физической точки зрения) о принадлежности точного решения некоторому компактному множеству, даёт возможность не только найти приближённое решение, но и построить область, которой принадлежит точное решение задачи, тем самым контролировать желаемую точность вычислений. Разработанные алгоритмы позволяют решать поставленную задачу за сотые доли секунды, что далеко не предел, в связи с развитием вычислительной техники, и поэтому могут быть использованы для обработки данных измерений в автоматическом режиме.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Предложены новые вычислительные алгоритмы, позволяющие находить приближённое решение интегральных уравнений типа Абеля первого рода на компактных множествах функций специального вида и оценивать поточечную погрешность получаемого приближения с учетом специфики данного класса уравнений, способа задания погрешностей входных данных и априорных ограничений на его поведение.

2. Созданы, обоснованы и реализованы в виде комплекса программ численные методы приближённого решения и оценки погрешностей решения интегральных уравнений типа Абеля первого рода при условии, что точное решение задачи является

   - монотонной ограниченной функцией,
   - выпуклой ограниченной функцией,

- монотонно-выпуклой ограниченной функцией,
- функцией с известной конечной константой Липшица.

3. Разработаны подходы к построению области, которой принадлежат точное и все приближённые бесконечномерные решения поставленной задачи, использующие только оценку погрешности решения в узлах сетки и априорную информацию о принадлежности точного решения указанным выше классам функций.

4. С помощью предложенных в работе алгоритмов решения интегральных уравнений типа Абеля первого рода, проведено численное моделирование задачи двумерной реконструкции и оценки погрешности реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости течения жидкости или газа в каналах с круговым поперечным сечением для экспериментов, использующих данные ультразвуковых многоплоскостных измерений потоков. Показано, что включение естественной априорной информации о монотонности, выпуклости, неотрицательности искомого решения и граничном условии на стенках транспортного канала позволяет гарантировать равномерную сходимость последовательности приближённых решений к точному решению, при стремлении погрешностей входных данных к нулю, и построить область, которой принадлежит точное решение задачи. Продемонстрирована возможность использования предложенных алгоритмов для обработки экспериментальных данных в автоматическом режиме (даже в случае очень малого числа измерительных плоскостей).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре “Цифровая визуализация: физические принципы, математические алгоритмы, технические решения”, проводящемся в Московском институте электронной техники (МИЭТ) (техническом университете) под руководством доктора физико-математических наук, доцента М. Н. Рычагова (8 июня 2004 г.), на семинаре “Обратные задачи математической физики”, проводящемся в НИВЦ МГУ под руководством профессоров А. Б. Бакушинского, А. В. Тихонравова и А. Г. Яголы (16 марта 2005 г.), на конференциях “Обратные и некорректно поставленные задачи” (Москва, факультет ВМиК МГУ, 20–21 июня 2000 г., 10–11 июня 2003 г.), “Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2002». Секция «Физика»” (Москва, физический факультет МГУ, 10 апреля 2002 г), “Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2003». Секция «Физика»” (Москва, физический факультет МГУ, 16 апреля 2003 г), “International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003” (Япония, Нагано, 18–21 февраля 2003 г.), “Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2004». Секция «Физика»” (Москва, физический факультет МГУ, 13 апреля 2004 г).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 печатных работ (из них 7 статей в журналах и трудах конференций, 6 тезисов конференций). Ссылки на работы приведены в списке литературы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации — 111 с., рисунков — 27, наименований в списке литературы — 113.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** даётся обзор существующих методов решения линейных интегральных уравнений типа Абеля первого рода. Обосновывается актуальность создания регуляризирующих методов решения таких уравнений на компактных множествах функций специального вида, которые позволяют вместе с приближённым решением находить и его погрешность. Приводится краткое описание содержания диссертации по главам.

Первая глава диссертации посвящена описанию некоторых свойств интегральных уравнений типа Абеля первого рода. Рассматривается математическая постановка задачи, её решение и возможность оценки погрешностей на компактных множествах функций специального вида.

В § 1 уравнение типа Абеля первого рода анализируется с точки зрения корректной по Ж. Адамару постановки задачи. Уравнение записывается в виде

$$Az = u, \qquad z \in Z, \quad u \in U, \tag{1}$$

где Z, U — линейные нормированные пространства. Приводятся примеры, показывающие, что задача решения уравнения (1) в естественных с физической точки зрения нормированных пространствах ($L_2 \to L_2$, $C \to L_2$, $L_2 \to C$, $C \to C$) является некорректно поставленной (нарушаются сразу два условия корректности: 1) не для всех $u \in U$ решение существует; 2) решение неустойчиво относительно возмущения правой части $u \in U$).

В § 2 рассматривается математическая постановка задачи, а в § 3 — её решение и возможность оценки погрешностей при следующих условиях: 1) $A : Z \to U$ — линейный непрерывный и инъективный оператор; 2) точное решение $\bar{z}(r)$ принадлежит компакту $M \subset Z$; 3) вместо точной правой части $\bar{u}(\xi) \in U$ имеется приближённая правая часть $u_\delta(\xi) \in U$: $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leqslant \delta$, $\delta \geqslant 0$ или $|u_\delta(\xi) - \bar{u}(\xi)| \leqslant \tilde{\delta}(\xi)$, $\tilde{\delta}(\xi) \geqslant 0$ $\forall \xi \in [R_1, R_2]$,

$\tilde{\delta}(\xi) \in U$. В качестве приближённого решения z_δ уравнения (1) принимается любой элемент из множества

$$Z_M^\delta = \{z \in M \subset Z : \|Az - u_\delta\|_U \leqslant \delta\}$$

или из множества

$$\mathcal{Z}_M^\delta = \{z \in M \subset Z : |(Az)(\xi) - u_\delta(\xi)| \leqslant \tilde{\delta}(\xi)\}$$

в случае, когда погрешность входных данных задана коридором ошибок. Если положить $\delta = \|\tilde{\delta}\|_U$, то справедливо включение $\mathcal{Z}_M^\delta \subset Z_M^\delta$. Поскольку $\bar{z}$, $z_\delta \in M$, а M — компакт в Z, то $z_\delta \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\delta \to 0$.

В качестве Z рассматривается пространство $L_2[R_1, R_2]$ вещественных суммируемых функций $z(r)$, заданных на отрезке $[R_1, R_2]$, с нормой

$$\|z\|_{L_2[R_1,R_2]} = \left\{ \int\limits_{R_1}^{R_2} z^2(r)\, dr \right\}^{1/2}.$$

Приводятся примеры компактных множеств M, для которых приближённое решение сходится к точному на любом фиксированном отрезке $[\gamma, \sigma] \subset (R_1, R_2)$ и в пространстве $C[\gamma, \sigma]$ с нормой

$$\|z\|_{C[\gamma,\sigma]} = \max_{r \in [\gamma,\sigma]} |z(r)|.$$

Погрешность решения поставленной задачи вводится двумя способами:
1) с помощью диаметра множества приближенных решений $\varepsilon(\delta)$:

$$\varepsilon(\delta) = \sup\{\|z_1 - z_2\|_Z : z_1, z_2 \in Z_M^\delta \ (z_1, z_2 \in \mathcal{Z}_M^\delta)\};$$

2) с помощью функции $\epsilon(\delta, r)$, $r \in [R_1, R_2]$:

$$\epsilon(\delta, r) = \sup\{|z_1(r) - z_2(r)| : z_1, z_2 \in Z_M^\delta \ (z_1, z_2 \in \mathcal{Z}_M^\delta)\}.$$

Для любого приближения $z_\delta \in Z_M^\delta$ ($z_\delta \in \mathcal{Z}_M^\delta$): $\|z_\delta - \bar{z}\|_Z \leqslant \varepsilon(\delta)$ или $|z_\delta(r) - \bar{z}(r)| \leqslant \epsilon(\delta, r)$, $r \in [R_1, R_2]$. Так как M — компакт и $\bar{z} \in M$, то $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

В § 4 рассматриваются компактные множества функций специального вида, которые могут использоваться при практическом решении уравнений типа Абеля первого рода: 1) множество монотонных (невозрастающих $M\downarrow$ или неубывающих $M\uparrow$) ограниченных функций; 2) множество выпуклых (вверх $M\frown$ или вниз $M\smile$) ограниченных функций; 3) множество монотонно-выпуклых (невозрастающих выпуклых вверх $M\downarrow\frown$, невозрастающих выпуклых вниз $M\downarrow\smile$, неубывающих выпуклых вверх $M\uparrow\frown$ или неубывающих выпуклых вниз $M\uparrow\smile$) ограниченных функций; 4) множество ограниченных функций с известной конечной константой Липшица M_L.

Приводятся теоремы, показывающие, что если точное решение задачи $\bar{z}(r)$ принадлежит одному из множеств: $C[R_1, R_2] \cap M\downarrow$, $C[R_1, R_2] \cap M\uparrow$, $M\frown$, $M\smile$, $M\downarrow\frown$, $M\downarrow\smile$, $M\uparrow\frown$, $M\uparrow\smile$; $z_n(r)$ — произвольный элемент из множества $Z_M^{\delta_n}$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то имеет место равномерная сходимость $z_n(r)$ к $\bar{z}(r)$ на произвольном отрезке $[\gamma, \sigma] \subset (R_1, R_2)$ при $n \to \infty$. Рассматриваются условия, при которых справедливы более сильные утверждения. Доказывается равномерная сходимость функций $z_n(r) \in Z_{M_L}^{\delta_n}$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ на $[R_1, R_2]$ к точному решению $\bar{z}(r) \in M_L$.

Во **второй главе** диссертации предлагаются численные методы приближённого решения интегральных уравнений типа Абеля первого рода на компактных множествах функций специального вида и оценки погрешностей получаемого решения.

В § 1 рассматривается общая схема конечно-разностной аппроксимации задачи и строятся конечномерные множества приближённых решений. Уравнение типа Абеля записывается в общем виде

$$(Az(r))(\xi) = \int\limits_D K(\xi, r) z(r) dr = u(\xi), \qquad \xi \in T, \tag{2}$$

где $K(\xi, r) = (\xi - r)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $T = \{R_1 < \xi \leqslant R_2\}$, $D = \{R_1 \leqslant r \leqslant \xi \leqslant R_2\}$, $u(R_1) \equiv 0$ или $K(\xi, r) = r(r^2 - \xi^2)^{-1/2}$, $T = \{R_1 \leqslant \xi <$

$R_2\}$, $D = \{R_1 \leqslant \xi \leqslant r \leqslant R_2\}$, $u(R_2) \equiv 0$. Предполагается следующее: 1) точное решение $\bar{z}(r) \in M \subset L_2[R_1, R_2]$, M — компактное множество функций, рассмотренных в первой главе; 2) точная правая часть $\bar{u}(\xi) \in L_2[R_1, R_2]$. Выбираются сетки χ_r и χ_ξ:

$$\chi_r = \{r_i\}_1^n : R_1 = r_1 < r_2 < \ldots < r_n = R_2,$$
$$\chi_\xi = \{\xi_j\}_1^m : R_1 = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m = R_2.$$

Сеточные значения функций $z(r)$ и $u(\xi)$ обозначаются следующим образом: $z(r_i) = z_i$, $u(\xi_j) = u_j$. Считается, что вместо точной правой части $\bar{u}(\xi)$ и точных сеточных значений $\bar{u}_j$, заданы векторы $\widehat{u}_\delta = (u_1^\delta, \ldots, u_m^\delta)$ и $\widehat{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$, такие, что $-\delta_j \leqslant \bar{u}_j - u_j^\delta \leqslant \delta_j$, $j = \overline{1, m}$. Предлагаются два подхода к построению конечномерного множества приближённых решений уравнения (2).

Первый подход заключается в следующем. Функция $z(r)$ заменяется кусочно-линейной функцией $z_n(r)$:

$$z_n(r) = z_i + \frac{z_{i+1} - z_i}{r_{i+1} - r_i}(r - r_i), \qquad r \in [r_i, r_{i+1}],$$

где $i = \overline{1, n-1}$. Вводится оператор A_n: $(A_n z(r))(\xi) \equiv (A z_n(r))(\xi)$ для $\forall z \in Z$. В силу ограниченности нормы оператора $A_{Z \to U}$: $\|A_n z - Az\|_U = \|A(z_n - z)\|_U \leqslant \zeta \|z_n - z\|_Z \leqslant \zeta h(n)$, где ζ — некоторая константа, значение которой вычисляется; $h(n)$ — оценка сверху для нормы $\|z_n - z\|_Z$. Для рассматриваемых в работе компактных множеств показывается, что $h(n) \to 0$ при $n \to \infty$. В качестве множества приближённых решений принимается множество

$$Z_M^\Delta = \{z \in M : \|A_n z - u_\delta\|_U \leqslant \Delta\},$$

где $\Delta = \zeta h(n) + \delta$ — заданная константа (при фиксированном n), определяющая погрешность входных данных. Переход к конечномерной задаче завершается аппроксимацией нормы в пространстве $U = L_2[R_1, R_2]$ (для аппроксимации интегралов используются формулы трапеций):

$$\|A_n z - u_\delta\|^2_{L_2} \approx \sum_{j=1}^{m} \Big((Az_n(r))(\xi_j) - u_j^\delta \Big)^2 \tau_j, \tag{3}$$

где

$$\tau_j = \frac{1}{2} \begin{cases} \xi_2 - \xi_1, & j = 1, \\ \xi_{j+1} - \xi_{j-1}, & j = \overline{2, m-1}, \\ \xi_m - \xi_{m-1}, & j = m, \end{cases}$$

а значения $(Az_n(r))(\xi_j)$ представимы в виде: $(Az_n(r))(\xi_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} z_i$, где элементы a_{ji} задаются простыми аналитическими выражениями. Погрешность правой части δ находится по формуле $\delta^2 \approx \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_j^2 \tau_j$.

В качестве конечномерного множества приближённых решений задачи принимается множество, образованное пересечением многогранника априорных ограничений $\widehat{M}$ и множества решений, сопоставимых по точности с исходными данными:

$$\widehat{Z}_M^\Delta = \left\{ \widehat{z} \in \widehat{M} : \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i - u_j^\delta \right)^2 \tau_j \leqslant \Delta^2 \right\}.$$

Здесь $\widehat{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — вектор сеточных значений. Нахождение фиксированного приближённого решения $\widehat{z}_\Delta$ сводится к минимизации квадратичной функции на множестве $\widehat{M}$ одним из известных методов.

Во *втором подходе* делаются дополнительные предположения о свойствах интегрального уравнения (2).

1) Существуют такие функции $\varphi_i^l(r)$, $\varphi_i^u(r)$, $\psi^l(r)$, $\psi^u(r)$, $z_n^l(r) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^l(r) z_i + \psi^l(r)$, $z_n^u(r) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^u(r) z_i + \psi^u(r)$, что $\forall z(r) \in M$: $z_n^l(r) \leqslant z(r) \leqslant z_n^u(r)$ на отрезке $[R_1, R_2]$, где $z_i = z(r_i)$, $i = \overline{1, n}$.

2) При подстановке $z_n^l(r)$ и $z_n^u(r)$ в уравнение (2): $(Az_n^l(r))(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^l(\xi) z_i + w^l(\xi)$; $(Az_n^u(r))(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^u(\xi) z_i + w^u(\xi)$; функции $v_i^l(\xi)$, $v_i^u(\xi)$, $w^l(\xi)$, $w^u(\xi)$ задаются аналитически.

Так как интегральный оператор Абеля — неотрицательный, то для всех функций $z(r) \in M$: $z_n^l(r) \leqslant z(r) \leqslant z_n^u(r)$, $r \in [R_1, R_2]$ и любого $\xi \in [R_1, R_2]$ справедливо неравенство

$$(Az_n^l(r))(\xi) \leqslant (Az(r))(\xi) \leqslant (Az_n^u(r))(\xi).$$

В качестве конечномерного множества приближённых решений принимается множество

$$\widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta = \left\{ \widehat{z} \in \widehat{M} : \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^n v_{ji}^l z_i \leqslant u_j^\delta + \delta_j - w_j^l, \quad j = \overline{1, m} \\ \sum\limits_{i=1}^n v_{ji}^u z_i \geqslant u_j^\delta - \delta_j - w_j^u, \quad j = \overline{1, m} \end{array} \right\},$$

где $v_{ji}^l = v_i^l(\xi_j)$, $v_{ji}^u = v_i^u(\xi_j)$, $w_j^l = w^l(\xi_j)$, $w_j^u = w^u(\xi_j)$. Множество $\widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta$ представляет собой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник, образованный пересечением многогранника $\widehat{M}$ и выпуклого многогранного множества. Погрешность аппроксимации в данном случае учитывается автоматически. Фиксированное приближённое решение может быть найдено с помощью минимизации квадратичной функции (3) на множестве $\widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta$.

В § 2 рассматривается общая схема оценки погрешностей решения уравнений типа Абеля первого рода на компактных множествах функций специального вида. Поскольку все элементы множества Z_M^Δ ($\mathcal{Z}_M^\Delta$) являются приближёнными решениями задачи, то погрешность решения (с учётом погрешностей входных данных и аппроксимации) определяется следующим образом: 1) с помощью значения $\varepsilon(\Delta)$:

$$\varepsilon(\Delta) = \sup\{\|z_1 - z_2\|_Z : z_1, z_2 \in Z_M^\Delta \ (z_1, z_2 \in \mathcal{Z}_M^\Delta)\};$$

2) с помощью функции $\epsilon(\Delta, r)$, $r \in [R_1, R_2]$:

$$\epsilon(\Delta, r) = \sup\{|z_1(r) - z_2(r)| : z_1, z_2 \in Z_M^\Delta \ (z_1, z_2 \in \mathcal{Z}_M^\Delta)\}.$$

Предлагается простой, с точки зрения численной реализации, алгоритм вычисления погрешностей $\varepsilon(\Delta)$ и $\epsilon(\Delta, r)$, который основан на нахождении функций $\mathbf{z}^l(r)$ и $\mathbf{z}^u(r)$, ограничивающих множество приближённых решений Z_M^Δ ($\mathcal{Z}_M^\Delta$) снизу и сверху ($\forall z(r) \in Z_M^\Delta$ $(z(r) \in \mathcal{Z}_M^\Delta)$ справедливо неравенство $\mathbf{z}^l(r) \leqslant z(r) \leqslant \mathbf{z}^u(r)$, $r \in [R_1, R_2]$). В этом случае

$$\varepsilon(\Delta) \leqslant \|\mathbf{z}^u - \mathbf{z}^l\|_Z, \tag{4}$$

$$\epsilon(\Delta, r) \leqslant \mathbf{z}^u(r) - \mathbf{z}^l(r), \quad r \in [R_1, R_2]. \tag{5}$$

Построение функций $\mathbf{z}^l(r)$, $\mathbf{z}^u(r)$ осуществляется следующим образом.

1) Вычисляются минимальные $\mathbf{z}_i^l$ и максимальные $\mathbf{z}_i^u$ значения, которые может принимать каждая координата вектора $\widehat{z}$ на множестве $\widehat{Z}_M^\Delta$ ($\widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta$). Эти значения определяют погрешность любого конечномерного решения в n точках: $\forall \widehat{z} \in \widehat{Z}_M^\Delta$ $(\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta)$ выполняется неравенство $\mathbf{z}_i^l \leqslant z_i \leqslant \mathbf{z}_i^u$, $i = \overline{1,n}$. Задача нахождения $\mathbf{z}_i^l$, $\mathbf{z}_i^u$ сводится к минимизации линейной функции $f(\widehat{z}) = \pm z_i$, $i \in \overline{1,n}$ на множестве $\widehat{Z}_M^\Delta$ ($\widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta$) ($\mathbf{z}_i^l = \inf\{z_i : \widehat{z} \in \widehat{Z}_M^\Delta$ $(\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta)\}$, $\mathbf{z}_i^u = \inf\{-z_i : \widehat{z} \in \widehat{Z}_M^\Delta$ $(\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta)\}$). Если в качестве конечномерного множества приближённых решений рассматривается множество $\widehat{\mathcal{Z}}_M^\Delta$, то решаются $2n$ задач линейного программирования с помощью модифицированного симплекс-метода. Если в качестве конечномерного множества приближённых решений рассматривается множество $\widehat{Z}_M^\Delta$, то сначала проводится аппроксимация данного множества некоторым выпуклым многогранником $\widehat{V} \supset \widehat{Z}_M^\Delta$, а затем также решаются $2n$ задач линейного программирования.

2) Используется информация о структуре компактного множества, позволяющая по найденным сеточным значениям $\mathbf{z}_i^l$, $\mathbf{z}_i^u$ построить функции $\mathbf{z}^l(r)$ и $\mathbf{z}^u(r)$, такие, что $\mathbf{z}^l(r) \leqslant \inf\{z(r) : z \in Z_M^\Delta$ $(z \in \mathcal{Z}_M^\Delta)\}$ и $\mathbf{z}^u(r) \geqslant \sup\{z(r) : z \in Z_M^\Delta$ $(z \in \mathcal{Z}_M^\Delta)\}$.

Функции $\mathbf{z}^l(r)$, $\mathbf{z}^u(r)$ выделяют на графике область, в которой лежат точное и все приближённые решения задачи, что очень удобно на практике не только для вычисления погрешностей по формулам (4), (5), но и для визуального контроля точности вычислений и выбора наилучшего приближённого решения.

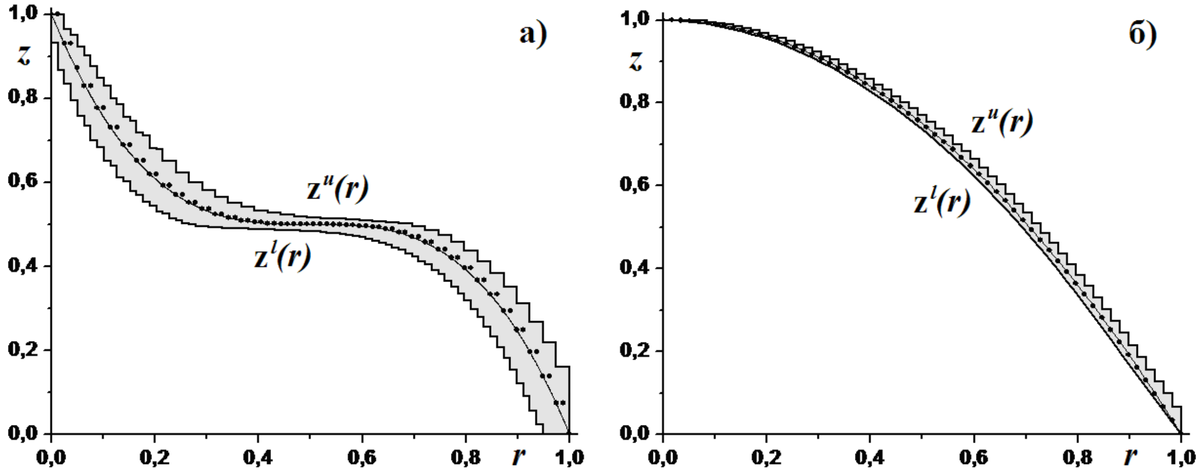

Рис. 1. Точное решение (—); приближённое решение (·); функции $\mathbf{z}^l(r)$ (—), $\mathbf{z}^u(r)$ (—), ограничивающие множество $\mathcal{Z}_M^{\Delta}$ (■) снизу и сверху: а) решение на множестве $M{\downarrow}$ при $n = 80$, $m = 40$ и $u_j^\delta = \bar{u}_j$; б) решение на множестве $M{\downarrow}\frown$ при $n = 60$, $m = 20$ и $u_j^\delta = \bar{u}_j$.

В § 3 для каждого компактного множества рассматривается построение конечномерного множества $\widehat{M}$, предлагаются алгоритмы нахождения функций $\varphi_i^l(r)$, $\varphi_i^u(r)$, $\psi^l(r)$, $\psi^u(r)$, $z_n^l(r)$, $z_n^u(r)$, оценивается величина $h(n)$, описываются методы построения $\mathbf{z}^l(r)$, $\mathbf{z}^u(r)$ по сеточным значениям $\mathbf{z}_i^l$, $\mathbf{z}_i^u$, вычисляются погрешности $\varepsilon(\Delta)$, $\epsilon(\Delta, r)$.

В § 4 рассматривается решение уравнений типа Абеля с ядром $K(\xi, r) = (\xi - r)^{-\alpha}$. В разделе 4.1 вычисляются элементы a_{ji}, входящие в формулу (3), и оценивается константа ζ. В разделах 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 вычисляются коэффициенты v_{ji}^l, v_{ji}^u, w_j^l, w_j^u для следующих множеств: $M{\downarrow}$, $M{\uparrow}$ (раздел 4.2), $M\frown$, $M\smile$ (раздел 4.3); $M{\downarrow}\frown$, $M{\downarrow}\smile$, $M{\uparrow}\frown$, $M{\uparrow}\smile$ (раздел 4.4); M_L (раздел 4.5). Эффективность предложенных в работе алгоритмов приближённого решения и оценки погрешностей решения демонстрируется на большом числе модельных примеров. Результаты вычислений для двух из них показаны на Рис. 1.

В § 5 рассматривается решение уравнения типа Абеля с ядром следующего вида: $K(\xi, r) = r(r^2 - \xi^2)^{-1/2}$. Все вычисления проводятся по схеме, описанной в § 4.

В **третьей главе** диссертации проводится математическое моделирование задачи двумерной реконструкции и оценки погрешностей реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости течения жидкости или газа в каналах с круговым поперечным сечением на основе предложенных в работе алгоритмов решения уравнений типа Абеля и использования специальных многоплоскостных ультразвуковых измерительных модулей.

Рассматриваются естественные с физической точки зрения ограничения на форму профиля скорости невозмущенного осесимметричного потока в центральном сечении канала, которые позволяют использовать в качестве компактных множеств, содержащих точное решение задачи, следующие множества: а) множество монотонных невозрастающих ограниченных функций; б) множество монотонных невозрастающих выпуклых вверх ограниченных функций. Для каждого из указанных множеств анализируется характер сходимости последовательности приближенных решений к точному и величина ошибки с учетом граничного условия на стенках транспортного канала. Теоретически исследуется методика обработки экспериментальных данных в случае малого числа измерительных плоскостей. Проводятся численные эксперименты, показывающие эффективность предложенных в работе алгоритмов реконструкции и оценки погрешностей реконструкции. Предлагаются численные методы построения области, которой принадлежит точный осесимметричный профиль скорости невозмущенного потока. На Рис. 2 представлены результаты вычислений при наличии двух и одиннадцати измерительных плоскостей.

В конце главы приводится описание программного комплекса, созданного на основе предложенных в работе алгоритмов и предназначенного для численного решения уравнений типа Абеля первого рода и оценки погрешностей решения на компактных множествах функ-

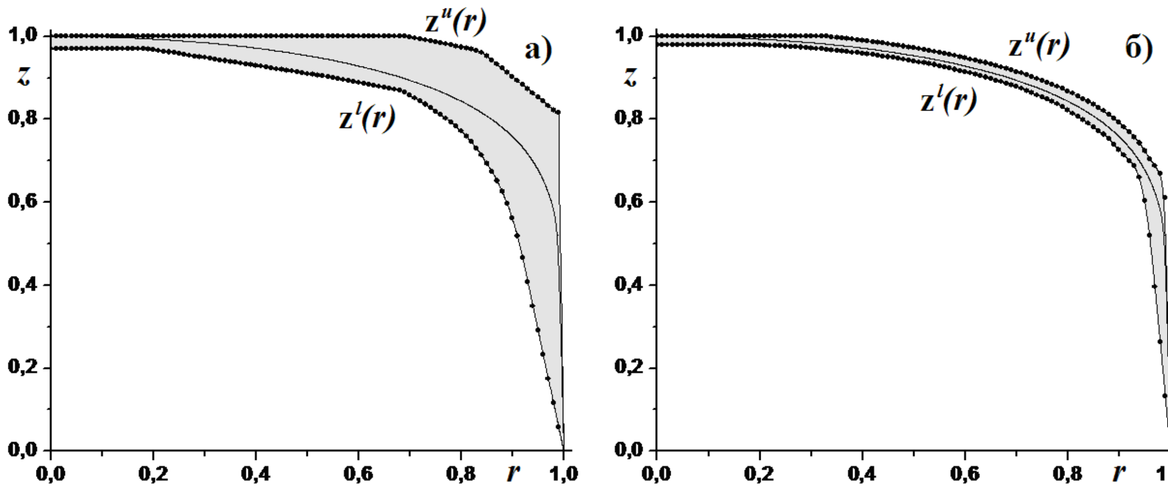

Рис. 2. Точное решение (—); функции $\mathbf{z}^l(r)$ (—), $\mathbf{z}^u(r)$ (—), построенные по соответствующим сеточным значениям $\mathbf{z}_i^l$ (·), $\mathbf{z}_i^u$ (·) и ограничивающие множество приближённых решений (■) снизу и сверху: а) решение на множестве $M{\downarrow_{\frown}}$ при наличии двух измерительных плоскостей и $n = 100$; б) решение на множестве $M{\downarrow_{\frown}}$ при наличии 11 измерительных плоскостей и $n = 100$.

ций специального вида. Комплекс написан на языке программирования Fortran 90 с использованием вещественных чисел двойной точности. Все расчёты производятся за сотые доли секунды, поэтому программный комплекс может быть использован для обработки экспериментальных данных в автоматическом режиме.

Ядро программного комплекса имеет следующую структуру: 1) блок чтения входных данных (в этом блоке происходит чтение и проверка входных данных из файла); 2) блок формирования начальных данных (здесь осуществляется формирование начальных векторов и матриц априорных ограничений); 3) блок решения; 4) блок вывода.

Для удобства работы пользователя с данным программным комплексом был создан интерфейс в среде Microsoft Visual Studio.NET. В качестве языков программирования использовались Fortran 90 и Visual C++.

Программный интерфейс построен как “Мастер”-приложение, т. е.

вся программа разделена на несколько шагов, которые необходимо последовательно пройти: 1) выбор решаемой задачи (выбор ядра интегрального уравнения типа Абеля, метода решения и т. п.); 2) выбор компактного множества и формирование сеток; 3) вычисление погрешностей входных данных; 4) нахождение приближённого решения; 5) построение функций, ограничивающих множество приближённых решений сверху и снизу; 5) вычисление погрешностей в выбранной метрике.

В качестве результата работы программы пользователь может: 1) выбрать файл, в который будет записана все необходимая информация о решении, погрешностях, времени работы программы; 2) построить график с решением и областью, которой принадлежит точное и все приближённые решения задачи; 3) сохранить построенный график в выбранном формате.

Заключение содержит **основные результаты** диссертационной работы:

1. Предложены математические методы, которые позволяют находить приближённое решение интегральных уравнений типа Абеля первого рода на компактных множествах функций специального вида и оценивать погрешность получаемого приближения (как по норме, так и в каждой точке области определения), тем самым контролировать желаемую точность вычислений, что является принципиально новым для данного класса уравнений.

2. При построении вычислительных алгоритмов были учтены следующее моменты: 1) свойства уравнений типа Абеля, что позволило эффективным образом оценить погрешность конечномерной аппроксимации задачи; 2) способ задания ошибки во входных данных, в зависимости от которого были предложены различные схемы построения конечномерного множества приближённых решений, нахождения фиксированного приближённого решения и оценки его погрешностей; 3) возможность включения в алгоритмы решения дополнительных ограничений,

характерных для той или иной конкретной физической задачи; 4) возможность использования разработанных методов в случае малого числа экспериментальных данных.

3. В работе предложены, обоснованы и реализованы подходы, позволяющие гарантированно найти область, которой принадлежат точное и все приближённые бесконечномерные решения поставленной задачи. При построении области используется информация только о погрешности в узлах сетки и априорные ограничения на форму неизвестного решения.

4. Разработаны и реализованы численные методы решения и оценки погрешностей решения уравнений типа Абеля на следующих компактных множествах: 1) на множестве монотонных (невозрастающих или неубывающих) ограниченных функций; 2) на множестве выпуклых (вверх или вниз) ограниченных функций; 3) на множестве монотонно-выпуклых (невозрастающих выпуклых вверх, невозрастающих выпуклых вниз, неубывающих выпуклых вверх или неубывающих выпуклых вниз) ограниченных функций; 4) на множестве ограниченных функций с известной конечной константой Липшица. Все алгоритмы легко обобщаются на случай кусочно-монотонных, кусочно-выпуклых или кусочно-монотонных и выпуклых функций.

5. Создан программный комплекс с удобным пользовательским интерфейсом, в основе которого лежат алгоритмы, предложенные в диссертации. Данный комплекс позволяет находить приближённое решение уравнения типа Абеля на компактных множествах функций специального вида при любом числе входных данных и оценивать погрешность получаемого приближения (как по норме, так и в каждой точке области определения). Благодаря высокой скорости расчёта (сотые доли секунды), программный комплекс может быть использован для обработки экспериментальных данных в автоматическом режиме.

6. С помощью предложенных в работе алгоритмов, проведено чис-

ленное моделирование задачи двумерной реконструкции и оценки погрешностей реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости течения жидкости или газа в каналах с круговым поперечным сечением для экспериментов, использующих данные ультразвуковых многоплоскостных измерений потоков. Показано, что включение естественной априорной информации о монотонности, выпуклости, неотрицательности искомого решения и граничном условии на стенках транспортного канала, позволяет гарантировать равномерную сходимость последовательности приближённых решений к точному решению при стремлении погрешностей входных данных к нулю и построить область, которой принадлежит точное решение задачи. Продемонстрирована возможность использования уравнения типа Абеля и предложенных алгоритмов для обработки экспериментальных данных в случае малого числа измерительных плоскостей.

Автор хотела бы выразить искреннюю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Анатолию Григорьевичу Яголе за постоянное внимание к работе, совместное обсуждение полученных результатов и помощь.

Автор благодарна научному консультанту доктору физико-математических наук, доценту Московского института электронной техники (технического университета) Михаилу Николаевичу Рычагову за тесное научное сотрудничество, ценные советы и предоставленные материалы, необходимые для моделирования и решения обратных задач ультразвуковой потокометрии.

Также хотелось бы выразить признательность всем сотрудникам кафедры математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, а также участникам научного семинара "Цифровая визуализация: физические принципы, математические алгоритмы, технические решения", проводящемся в Московском институте электронной техники (техническом университете) и семинара "Обратные задачи математической физики", проводящемся в Научно-исследовательском вычислительном центре Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, за многочисленные полезные советы и ценные замечания, приведшие к развитию алгоритмов решения уравнений типа Абеля первого рода на компактных множествах и получению новых результатов.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Николаева Н. Н., Титаренко В. Н., Ягола А. Г. Оценка погрешности линейных некорректных задач при наличии априорной информации на примере обратной задачи для уравнения теплопроводности. В тезисах докладов VI конференции "Обратные и некорректно поставленные задачи", Москва, МГУ, 20–21 июня 2000 г. — М.: МАКС Пресс, 2000. — С. 57.

[2] Титаренко В. Н., Ягола А. Г., Николаева Н. Н. Оценка погрешности решения некоторых задач Коши для уравнения Лапласа // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2001. — № 1. — С. 21–24.

[3] Dorofeev K. Yu., Nikolaeva N. N., Titarenko V. N., Yagola A. G. New approaches to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2002. — Vol. 10, № 2. — P. 155–170.

[4] Николаева Н. Н. Оценка погрешности решения уравнения Абеля на некоторых компактных множествах. В сборнике тезисов IX Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов–2002», Москва, МГУ, 10 апреля 2002 г. Секция «Физика». — М.: Физ. фак. МГУ, 2002. — С. 43–44.

[5] Николаева Н. Н. Влияние априорной информации на оценку погрешности реконструкции симметричных профилей скорости. В сборнике тезисов X Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов–2003», Москва, МГУ, 16 апреля 2003 г. Секция «Физика». — М.: Физ. фак. МГУ, 2003. — С. 42–43.

[6] Николаева Н. Н., Рычагов М. Н., Ягола А. Г. Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости. В тезисах докладов VIII конференции “Обратные и некорректно поставленные задачи”, Москва, МГУ, 10–11 июня 2003 г. — М.: МАКС Пресс, 2003. — С. 49.

[7] Nikolaeva N. N., Yagola A. G. Error estimation of the reconstruction of symmetric velocity profiles using Abel type integral equation. In “Abstracts. ISIP2003. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003. 18–21 February, 2003, Nagano City, Japan”. — 2003. — P. 82–83.

[8] Nikolaeva N. N., Rychagov M. N., Yagola A. G. Error estimation of the reconstruction of symmetric velocity profiles using Abel type integral equation // In the book “Inverse problems in engineering mechanics IV. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003 (ISIP 2003) Nagano, Japan” (ed. Tanaka M.). — Elsevier Science Ltd., 2003. — P. 465–474.

[9] Николаева Н. Н., Титаренко В. Н., Ягола А. Г. Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2003. — Т. 6, № 2. — С. 171–180.

[10] Николаева Н. Н., Рычагов М. Н., Титаренко В. Н., Ягола А. Г. Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости в многоплоскостных измерительных модулях // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 1. — С. 18–29.

[11] Николаева Н. Н. Оценка погрешности эффективных сечений фотоядерных реакций. В сборнике тезисов XI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фунда-

ментальным наукам «Ломоносов–2004», Москва, МГУ, 13 апреля 2004 г. Секция «Физика». — М.: Физ. фак. МГУ, 2004. — С. 146–148.

[12] Nikolaeva N. N., Titarenko V. N., Yagola A. G. An error estimation for a solution of Abel equation // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2004. — Vol. 25, № 3-4. — P. 259–269.

[13] Николаева Н. Н., Ручкин С. В., Рычагов М. Н., Ягола А. Г. Численное моделирование задачи двумерной реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости // Вычислительные методы и программирование. — 2005. — Т. 6. — С. 9–16.