На правах рукописи

Ромашин Александр Валерьевич

Математическое моделирование волноводно-резонансных свойств биизотропных сред

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2005

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Моденов Владимир Павлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Ёлкин Николай Николаевич,
	кандидат физико-математических наук, Галишникова Тамара Николаевна.
Ведущая организация:	Московская государственная академия приборостроения и информатики.

Защита диссертации состоится "___" __________ 2005 г. в ________ на заседании диссертационного совета К 501.001.17 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, Воробьёвы горы, МГУ, физический факультет, ауд. № ___.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан "___" __________ 2005 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета К 501.001.17
доктор физико-математических наук П.А. Поляков

Актуальность темы. В последнее время среди специалистов в области электродинамики возрос интерес к исследованию так называемых биизотропных сред[1]. Эти среды являются обобщением для широкого класса сред и включают в себя диэлектрики, магнетики, изотропные киральные среды, среду Теллегана и др.[2] Такое обобщение даёт возможность создания на примере биизотропных сред универсальных математических моделей и численных алгоритмов их исследования.

Понятие биизотропной среды возникло при моделировании электродинамических свойств (в основном) сред с пространственной дисперсией. Такие среды были известны ещё во второй половине XIX века. Они получили название оптически активных сред, так как проявляли свои свойства в оптическом диапазоне частот.

Явление пространственной дисперсии в СВЧ радиодиапазоне привлекло внимание исследователей сравнительно недавно, в связи с развитием вычислительной техники. Моделирование электродинамических процессов в такой среде в большинстве практически важных случаев требует применения численных алгоритмов.

Если пространственная дисперсия слаба, можно воспользоваться моделью гиротропной среды. Как правило, эта модель применима к средам с естественной пространственной дисперсией, например таким, как плазма[3]. В 60-е годы XX века был создан математический аппарат, позволяющий моделировать процессы взаимодействия таких сред с электромагнитным полем в волноведущих системах[4].

С конца 80-х годов XX века начали активно исследоваться электродинамические свойства искусственных сред с пространственной дисперсией — так называемых киральных сред[5]. Такие среды представляют собой композитный материал, состоящий из микроскопических ориентированных определённым образом металлических спиралек или частиц в виде буквы Ω, залитых в диэлектрическую основу.

При небольшом числе «киральных микроэлементов» их влияние можно учесть непосредственно, вводя в уравнениях Максвелла наведённые токи. Если же их количество достаточно велико, то такой подход нецелесообразен, так как приведёт к накоплению больших погрешностей в численных алгоритмах. В этом случае удобно рассматривать такую среду как однородную изотропную среду с пространственной дисперсией.

Уже создано достаточно большое число различных электродинамиче-

---

[1] *Lindell I.V., Sihvola A.H., Tretyakov S.A., Viitanen A.J.* Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media. – London: Artech House, 1994.

[2] *Третьяков С.А.* Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы (обзор) // Радиотехника и электроника, 1994. – Т.39. – №10. – С.1457-1470.

[3] *Свешников А.Г., Моденов В.П.* Распространение волны H_{11} в круглом волноводе, заполненном гиротропной плазмой на конечном участке его длины // Радиотехника и Электроника, 1963. – Т.8. – №12. – С.1998-2005.

[4] *Свешников А.Г., Моденов В.П.* Распространение электромагнитных волн в волноводах с локальным гиротропным заполнением // Выч. методы и программирование, 1965. – вып III. – С.50-58.

[5] *Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.* Киральные электродинамические объекты // Успехи физических наук, 1997. – Т.167. – №2. – С.8-13.

ских моделей подобных сред. Их общим свойством является то, что индукции электрического и магнитного полей зависят сразу от обеих напряжённостей. Однако, в настоящее время в макроскопической электродинамике отсутствует единая форма записи материальных уравнений такой среды.

Таким образом, возникает необходимость создания универсального аппарата, который позволил бы проводить моделирование процессов взаимодействия электромагнитного поля с такими средами и при этом включал в себя только самые общие их свойства. Модель биизотропной среды удовлетворяет этим требованиям.

Интерес к средам такого типа вызван, в первую очередь, перспективой создания на их основе новых электротехнических устройств СВЧ диапазона и улучшения характеристик существующих устройств. В частности, решение задачи дифракции электромагнитных волн на киральных телах различной формы может сделать возможным использование этих сред для создания радиомаскирующих покрытий.

Подобные нелокальные среды также могут найти применение в радиолокации и вычислительной технике. В связи с этим, актуальными являются исследования волноводных свойств таких сред. Ряд волноведущих систем может быть исследован аналитически, например с использованием метода диадных функций Грина[6]. Однако в общем случае требуется применение численных алгоритмов[7].

Целью настоящей работы является:

1. Постановка волноводной краевой задачи для системы уравнений Максвелла с материальными уравнениями биизотропной среды.

2. Разработка и математическое обоснование универсальных численных алгоритмов решения поставленной краевой задачи.

3. Реализация алгоритмов в виде программ для ЭВМ.

4. Применение разработанных алгоритмов для исследования волноводно-резонансных свойств биизотропной среды.

Научная новизна работы определяется тем, что

1. Впервые математически поставлена и решена краевая задача для системы уравнений Максвелла в цилиндрической области с идеально проводящей поверхностью и с материальными уравнениями биизотропной среды, позволившая выполнить моделирование волноводно-резонансных свойств этой среды.

---

[6] *Tai C.T.* Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. – IEEE Press, Piscataway, New Jersey, The 2nd edition, 1994.

[7] *Modenov V.P.* Waveguide filled with chyral medium calculation // Proc VIII-th International Conference on microwaves (MIKON-2000), 2000. – May 22-24. – Poland – Warsaw. – P.51-53.

2. Впервые для моделирования волноводного распространения электромагнитных колебаний в цилиндрических волноводах с частичным биизотропным заполнением разработан и применён численный алгоритм, основанный на методе Галёркина.

3. Впервые вычислены постоянные распространения электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с частичным биизотропным заполнением и посчитана матрица рассеяния электромагнитных волн на локальном биизотропном включении.

4. Получены новые результаты, характеризующие волноводно-резонансные свойства киральной среды.

Практическая ценность работы. Созданы электродинамические модели процессов распространения электромагнитных волн в регулярных волноведущих системах с частичным по сечению биизотропным заполнением и рассеяния волн на локальном биизотропном включении. На их основе создан комплекс высокопроизводительных программ.

Рассматриваемые в работе алгоритмы реализованы в виде модуля, подключаемого к системе математического моделирования Science Lab[8]. В составе этой системы они могут быть применены для расчёта сверхвысокочастотных электродинамических систем и узлов на базе биизотропных и, в частности, киральных материалов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. математическая модель цилиндрического волновода с частичным биизотропным заполнением, основанная на постановке и решении краевой задачи для системы уравнений Максвелла в рассматриваемой области с материальными уравнениями биизотропной среды;

2. численный алгоритм нахождения собственных значений оператора поставленной краевой задачи с использованием двух схем метода Галёркина;

3. применение предложенного алгоритма для расчёта постоянных распространения прямоугольного волновода с частичным по сечению биизотропным заполнением;

4. численный алгоритм решения рассматриваемой краевой задачи, основанный на неполном методе Галёркина;

5. применение предложенного алгоритма для расчёта коэффициентов отражения и прохождения при дифракции нормальной волны на локальном биизотропном включении в прямоугольном волноводе;

6. математическое обоснование предложенных численных алгоритмов;

[8] INRIA, the French National Institute for Research in Computer Science and Control

7. реализация рассматриваемых численных алгоритмов в виде комплекса ЭВМ-программ;

8. применение программ для исследования процессов распространения электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с диэлектрическими и киральными включениями.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на

1. XII Всероссийской школе-конференции по дифракции и распространению волн (Москва, РосНОУ, 2001),

2. X школе-семинаре «Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот» МНТОРЭС им. А.С. Попова (Фрязино, 2002),

3. II Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» (Самара, 2003),

4. III Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» (Волгоград, 2004),

5. Международной конференции студентов и аспирантов «Ломоносов 2004» (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004).

По материалам диссертации **опубликовано** восемь печатных работ [1]-[8].

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Объём диссертации составляет 102 страницы основного текста, включая 41 иллюстрацию и 5 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 102 библиографические ссылки.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена решению задачи на собственные значения, возникающей при исследовании регулярной цилиндрической волноведущей системы с частичным по сечению заполнением из биизотропного материала. В **первом параграфе** формулируется математическая постановка задачи.

Система уравнений Максвелла с граничным условием I рода решается в бесконечной цилиндрической области постоянного сечения. На границе биизотропной вставки выполняются условия сопряжения

$$\vec{E}_\tau^I = \vec{E}_\tau^{II}, \quad \vec{H}_\tau^I = \vec{H}_\tau^{II} \tag{1}$$

для тангенциальных компонент напряжённостей электрического и магнитного полей.

Комплексные материальные уравнения биизотропной среды представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= a_{11}(\varepsilon,\mu,\xi)\vec{E} + a_{12}(\varepsilon,\mu,\xi)\vec{H}, \\ \vec{B} &= a_{21}(\varepsilon,\mu,\xi)\vec{E} + a_{22}(\varepsilon,\mu,\xi)\vec{H}, \end{aligned} \tag{2}$$

где ε и μ – комплексные электрическая и магнитная проницаемости, ξ – действительный или комплексный параметр,

$$a_{12} = a_{21}^*. \tag{3}$$

Вид коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} определяется конкретной моделью среды. Коэффициенты должны удовлетворять предельным соотношениям

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi\to 0} a_{11}(\varepsilon,\mu,\xi) = \varepsilon, \\ &\lim_{\xi\to 0} a_{12}(\varepsilon,\mu,\xi) = 0, \\ &\lim_{\xi\to 0} a_{21}(\varepsilon,\mu,\xi) = 0, \\ &\lim_{\xi\to 0} a_{22}(\varepsilon,\mu,\xi) = \mu, \end{aligned} \tag{4}$$

то есть, при устремлении ξ к нулю среда вырождается в диэлектрик или магнетик.

В следствие регулярности рассматриваемой волноведущей системы,

$$\frac{\partial}{\partial z} = i\Gamma, \tag{5}$$

где Γ — *постоянная распространения* (собственное значение).

Во **втором параграфе** рассматривается схема метода Галёркина для решения поставленной задачи с разложением по продольным компонентам нормальных волн пустого волновода. Выражение поперечных компонент полей через продольные для биизотропной среды имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_t &= (b_1^1\hat{\mathbf{E}} + b_2^1\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\nabla_t H_z + (b_1^2\hat{\mathbf{E}} + b_2^2\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\nabla_t E_z,\\
\vec{E}_t &= (b_1^3\hat{\mathbf{E}} + b_2^3\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\nabla_t H_z + (b_1^4\hat{\mathbf{E}} + b_2^4\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\nabla_t E_z.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь использованы обозначения

$$
\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Коэффициенты в уравнении (6) представляют собой рациональные функции Γ

$$
\begin{aligned}
b_1^1 &= ik(a_{12}\Gamma^2 - k^2 a_{21}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))/P_4(\Gamma),\\
b_2^1 &= i\Gamma(\Gamma^2 - k^2(a_{11}a_{22} - a_{21}^2))/P_4(\Gamma),\\
b_1^2 &= ika_{11}(\Gamma^2 - k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))/P_4(\Gamma),\\
b_2^2 &= -ik^2 a_{11}\Gamma(a_{12} - a_{21})/P_4(\Gamma),\\
b_1^3 &= -ika_{22}(\Gamma^2 - k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))/P_4(\Gamma),\\
b_2^3 &= ik^2 a_{22}\Gamma(a_{12} - a_{21})/P_4(\Gamma),\\
b_1^4 &= -ik(a_{21}\Gamma^2 - k^2 a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))/P_4(\Gamma),\\
b_2^4 &= i\Gamma(\Gamma^2 - k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2))/P_4(\Gamma),
\end{aligned}
$$

с общим знаменателем

$$
P_4(\Gamma) = \Gamma^4 + k^2(a_{12}^2 + a_{21}^2 - 2a_{22}a_{11})\Gamma^2 + k^4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2.
$$

Система уравнений Максвелла для продольных компонент поля в биизотропной среде может быть записана как

$$
\begin{cases}
-b_1^2\Delta_t E_z - b_1^1\Delta_t H_z + ika_{11}E_z + ika_{12}H_z = 0,\\
-b_1^4\Delta_t E_z - b_1^3\Delta_t H_z - ika_{21}E_z - ika_{22}H_z = 0.
\end{cases}
\tag{7}
$$

Приближённое решение системы (7) ищется в виде конечных сумм

$$
\begin{aligned}
E_z^{(N)} &= \sum_{n=1}^{N} e_n E_{nz},\\
H_z^{(N)} &= \sum_{n=1}^{N} h_n H_{nz},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где E_{nz} и H_{nz} — продольные компоненты нормальных волн пустого волновода. На приближённое решение накладывается требование выполнения условий сопряжения (1) на границе биизотропной вставки в интегральном (энергетическом) смысле.

Приближённое решение системы (7) должно удовлетворять интегральным соотношениям

$$\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_S \{-b_1^2\Delta_t E_z^{(N)} - b_1^1\Delta_t H_z^{(N)} + ika_{11}E_z^{(N)} + ika_{12}H_z^{(N)}\} E_{mz}^* ds = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\oint\limits_{C_{S_1}} E_{mz}^*[\vec{H}_t^{(N)}]\vec{dl}, \\ \displaystyle\iint\limits_S \{-b_1^4\Delta_t E_z^{(N)} - b_1^3\Delta_t H_z^{(N)} - ika_{21}E_z^{(N)} - ika_{22}H_z^{(N)}\} H_{mz}^* ds = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\oint\limits_{C_{S_1}} H_{mz}^*[\vec{E}_t^{(N)}]\vec{dl}, \end{cases} \tag{9}$$

где C_{S_1} — контур поперечного сечения S_1 биизотропной вставки,

$$[\vec{H}_t^{(N)}] = \left(\vec{H}_z^{(N)}\right)^I - \left(\vec{H}_z^{(N)}\right)^{II},$$
$$[\vec{E}_t^{(N)}] = \left(\vec{E}_z^{(N)}\right)^I - \left(\vec{E}_z^{(N)}\right)^{II},$$

индекс I соответствует области D_1 (внутренняя область вставки), индекс II соответствует области D_2 (внешняя область)

Система (9), с учётом (8), представляет собой СЛАУ с полиномиальной матрицей шестого порядка относительно Г. Матричные элементы были вычислены в явном виде для прямоугольного и круглого волноводов. Алгоритм нахождения постоянных распространения в прямоугольном волноводе с частичным по сечению биизотропным заполнением реализован в виде программы для ЭВМ.

В **третьем параграфе** рассматривается схема метода Галёркина для решения поставленной задачи с разложением по поперечным компонентам нормальных волн пустого волновода. Выражение продольных компонент полей через поперечные для биизотропной среды имеет вид:

$$E_z = -\frac{\left[\left(\nabla_t \cdot \tilde{\vec{H}}_t\right) a_{22} + \left(\nabla_t \cdot \tilde{\vec{E}}_t\right) a_{12}\right]}{ik(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})},$$
$$H_z = \frac{\left[\left(\nabla_t \cdot \tilde{\vec{E}}_t\right) a_{11} + \left(\nabla_t \cdot \tilde{\vec{H}}_t\right) a_{21}\right]}{ik(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}. \tag{10}$$

Система уравнений Максвелла для поперечных компонент поля в бизотропной среде может быть записана как

$$
\begin{cases}
-i\dfrac{a_{11}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t\right)\vec{i}_z\right]-i\dfrac{a_{21}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t\right)\vec{i}_z\right]-\\
\qquad\qquad\qquad -\lambda\tilde{\vec{H}}_t+ika_{11}\vec{E}_t+ika_{12}\vec{H}_t=0,\\
i\dfrac{a_{12}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t\right)\vec{i}_z\right]+i\dfrac{a_{22}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t\right)\vec{i}_z\right]-\\
\qquad\qquad\qquad -\lambda\tilde{\vec{E}}_t-ika_{21}\vec{E}_t-ika_{22}\vec{H}_t=0.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Здесь использовано обозначение $\lambda = i\Gamma$. Приближённое решение системы (11) ищется в виде конечных разложений

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_t^{(N)}&=\sum_{n=1}^{N}e_n^{(N)}\vec{E}_{nt},\\
\vec{H}_t^{(N)}&=\sum_{n=1}^{N}h_n^{(N)}\vec{H}_{nt},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $\vec{E}_{nt}$ и $\vec{H}_{nt}$ — поперечные компоненты нормальных волн пустого волновода.

Приближённое решение системы (11) должно удовлетворять интегральным соотношениям

$$
\begin{cases}
\displaystyle\iint\limits_S\Big\{-i\frac{a_{11}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right]-i\frac{a_{21}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right]-\\
\qquad\displaystyle -\lambda\tilde{\vec{H}}_t^{(N)}+ika_{11}\vec{E}_t^{(N)}+ika_{12}\vec{H}_t^{(N)}\Big\}\vec{E}_{mt}^{*}ds=-\oint\limits_{C_{S_1}}[H_z^{(N)}]\vec{E}_{mt}^{*}d\vec{l},\\
\displaystyle\iint\limits_S\Big\{i\frac{a_{12}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right]+i\frac{a_{22}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right]-\\
\qquad\displaystyle -\lambda\tilde{\vec{E}}_t^{(N)}-ika_{21}\vec{E}_t^{(N)}-ika_{22}\vec{H}_t^{(N)}\Big\}\vec{H}_{mt}^{*}ds=-\oint\limits_{C_{S_1}}[E_z^{(N)}]\vec{H}_{mt}^{*}d\vec{l},
\end{cases}
\tag{13}
$$

где C_{S_1} — контур поперечного сечения S_1 биизотропной вставки,

$$
\begin{aligned}
[H_z^{(N)}]&=\left(H_z^{(N)}\right)^{I}-\left(H_z^{(N)}\right)^{II},\\
[E_z^{(N)}]&=\left(E_z^{(N)}\right)^{I}-\left(E_z^{(N)}\right)^{II},
\end{aligned}
$$

индекс I соответствует области D_1 (внутренняя область вставки), индекс II соответствует области D_2 (внешняя область), m пробегает значения от 1 до N. Правые части соотношений (13) служат для удовлетворения условий сопряжения (1) в интегральном смысле.

Таким образом, задача нахождения собственных значений системы (11) сводится к проблеме собственных значений числовой комплекснозначной матрицы. Матричные элементы были выражены в явном виде для прямоугольного волновода с частичным по сечению биизотропным заполнением. Алгоритм реализован на языке FORTRAN в виде подключаемого модуля к системе математического моделирования Science Lab.

Вторая глава диссертации посвящена решению задачи дифракции электромагнитной волны на локальном биизотропном включении в цилиндрическом волноводе. В **первом параграфе** формулируется математическая постановка задачи.

Система уравнений Максвелла с граничным условием I рода решается в бесконечной цилиндрической области постоянного сечения. На границе биизотропного включения выполняются условия сопряжения (1). Комплексные материальные уравнения биизотропной среды имеют вид (2) и удовлетворяют условиям (3), (4).

Кроме граничных условий на стенке волновода, должны выполняться также условия возбуждения и излучения на бесконечности

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_{z \to -\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{i\gamma_{-m} z} \begin{bmatrix} \vec{E}^{-m} \\ \vec{H}^{-m} \end{bmatrix} + X_{m_0} e^{i\gamma_{m_0} z} \begin{bmatrix} \vec{E}^{m_0} \\ \vec{H}^{m_0} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_{z \to +\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{i\gamma_m z} \begin{bmatrix} \vec{E}^{m} \\ \vec{H}^{m} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Здесь $\left\{ \vec{E}^n(M), \vec{H}^n(M) \right\} \cdot e^{i\gamma_n z} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — нормальные волны регулярных волноводов с однородным изотропным заполнением, соответствующим бесконечно удалённым участкам волновода. Положительным значениям индекса n соответствуют прямые волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Z, отрицательным значениям индекса — обратные волны. Зависимость всех компонент нормальной волны от координаты z даётся множителем $e^{i\gamma_n z}$, где γ_n — постоянная распространения соответствующей нормальной волны в данном регулярном волноводе.

Второй параграф посвящён решению задачи дифракции электромагнитной волны в цилиндрическом волноводе с биизотропным заполнением на конечном участке его длины. При этом поперечное сечение вставки S_1 не зависит от z. Алгоритм решения задачи реализован в виде программы для ЭВМ и использует методы, разработанные в первой главе. Также, в этом параграфе рассматриваются некоторые особенности численного алгоритма.

В **третьем параграфе** формулируется общий вид неполного метода Галёркина для исследования распространения электромагнитных колебаний в цилиндрическом волноводе с идеально проводящей боковой поверхностью Σ и с частичным по сечению биизотропным заполнением между поперечными сечениями $z = 0$ и $z = d$. Проводится исследование свойств приближённого решения и обоснование сходимости алгоритма.

Наиболее удобно для решения поставленной задачи воспользоваться разложением векторов напряжённости электрического и магнитного полей на продольные и поперечные компоненты и выразить продольные через поперечные (10). В нерегулярной цилиндрической волноведущей системе система уравнений Максвелла для поперечных компонент имеет вид:

$$\begin{cases} -i\dfrac{a_{11}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t\right)\vec{i}_z\right]-i\dfrac{a_{21}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t\right)\vec{i}_z\right]- \\ \qquad\qquad -\left[\dfrac{\partial\vec{H}_t}{\partial z}\times\vec{i}_z\right]+ika_{11}\vec{E}_t+ika_{12}\vec{H}_t=0, \\ i\dfrac{a_{12}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t\right)\vec{i}_z\right]+i\dfrac{a_{22}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t\right)\vec{i}_z\right]- \\ \qquad\qquad -\left[\dfrac{\partial\vec{E}_t}{\partial z}\times\vec{i}_z\right]-ika_{21}\vec{E}_t-ika_{22}\vec{H}_t=0, \end{cases} \tag{16}$$

где использовано обозначение

$$\varDelta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Точное решение задачи представимо в виде ряда с разложением по поперечным компонентам нормальных волн пустого волновода:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(M,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(z)\vec{E}_{nt}(M), \\ \vec{H}_t(M,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(z)\vec{H}_{nt}(M). \end{aligned} \tag{17}$$

С учётом разложений (17) граничные условия (14), (15) примут вид:

$$A_m+B_m|_{z\to-\infty}=2X_{m_0}\delta_{mm_0}, \tag{18}$$
$$A_m-B_m|_{z\to+\infty}=0. \tag{19}$$

Из уравнений (16) следует, что точное решение задачи (17) при любом z должно удовлетворять интегральным соотношениям:

$$\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_S\Big\{-i\frac{a_{11}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t\right)\vec{i}_z\right]-i\frac{a_{21}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t\right)\vec{i}_z\right]- \\ \qquad\qquad \displaystyle -\left[\frac{\partial\vec{H}_t}{\partial z}\times\vec{i}_z\right]+ika_{11}\vec{E}_t+ika_{12}\vec{H}_t\Big\}\vec{E}^*_{mt}ds=0, \\ \displaystyle\iint\limits_S\Big\{i\frac{a_{12}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t\right)\vec{i}_z\right]+i\frac{a_{22}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t\right)\vec{i}_z\right]- \\ \qquad\qquad \displaystyle -\left[\frac{\partial\vec{E}_t}{\partial z}\times\vec{i}_z\right]-ika_{21}\vec{E}_t-ika_{22}\vec{H}_t\Big\}\vec{H}^*_{mt}ds=0. \end{cases} \tag{20}$$

Соотношения (20) вместе с граничными условиями на бесконечности (18) и (19) определяют ту форму, в которой будет применяться метод Галёркина. Эту задачу назовём задачей А.

Приближённое решение будем искать в виде конечных разложений:

$$\begin{aligned}\vec{E}_t^{(N)}(M,z) &= \sum_{n=1}^{N} A_n^{(N)}(z)\vec{E}_{nt}(M),\\ \vec{H}_t^{(N)}(M,z) &= \sum_{n=1}^{N} B_n^{(N)}(z)\vec{H}_{nt}(M).\end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты $A_n^{(N)}(z)$ и $B_n^{(N)}(z)$ определяются из системы уравнений, которую получим, потребовав, чтобы при любом z удовлетворялись следующие интегральные соотношения:

$$\begin{cases} \iint\limits_S \Big\{ -i\dfrac{a_{11}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right] - i\dfrac{a_{21}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right] - \\ \qquad - \left[\dfrac{\partial\tilde{\vec{H}}_t^{(N)}}{\partial z}\times\vec{i}_z\right] + ika_{11}\vec{E}_t^{(N)} + ika_{12}\vec{H}_t^{(N)}\Big\}\vec{E}_{mt}^{*}ds = -\oint\limits_{C_{S_1}}[H_z^{(N)}]\vec{E}_{mt}^{*}d\vec{l}, \\ \iint\limits_S \Big\{ i\dfrac{a_{12}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{E}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right] + i\dfrac{a_{22}}{k\varDelta}\left[\nabla\times\left(\nabla_t\cdot\tilde{\vec{H}}_t^{(N)}\right)\vec{i}_z\right] - \\ \qquad - \left[\dfrac{\partial\tilde{\vec{E}}_t^{(N)}}{\partial z}\times\vec{i}_z\right] - ika_{21}\vec{E}_t^{(N)} - ika_{22}\vec{H}_t^{(N)}\Big\}\vec{H}_{mt}^{*}ds = -\oint\limits_{C_{S_1}}[E_z^{(N)}]\vec{H}_{mt}^{*}d\vec{l}, \end{cases} \tag{22}$$

где $\varDelta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $m = 1, 2, \ldots, N$, C_{S_1} — контур поперечного сечения S_1 биизотропного тела, $\vec{i}_z$ — орт оси z, скачки выражаются как

$$\begin{aligned}[H_z^{(N)}] &= \left(H_z^{(N)}\right)^{I} - \left(H_z^{(N)}\right)^{II},\\ [E_z^{(N)}] &= \left(E_z^{(N)}\right)^{I} - \left(E_z^{(N)}\right)^{II},\end{aligned}$$

индекс I соответствует области D_1 (внутренняя область вставки), индекс II соответствует области D_2 (внешняя область). Правые части соотношений (22) служат для удовлетворения условий сопряжения (1) в интегральном смысле.

Система (22) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} A_n^{(N)}(z)\\ B_n^{(N)}(z)\end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}(z)\cdot\begin{bmatrix} A_n^{(N)}(z)\\ B_n^{(N)}(z)\end{bmatrix}, \tag{23}$$

где $\hat{\mathbf{A}}(z)$ — матрица коэффициентов, зависящая от z, элементы которой выражаются через характеристики биизотропной вставки, с граничными условиями

$$A_m^{(N)}(0) + B_m^{(N)}(0) = 2X_{m_0}\delta_{mm_0}, \tag{24}$$
$$A_m^{(N)}(d) - B_m^{(N)}(d) = 0. \tag{25}$$

Задачу определения поля $\left\{\vec{E}^{(N)}, \vec{H}^{(N)}\right\}$ из решения краевой задачи (23), (24), (25) и (10) будем называть задачей В.

Показано, что для задачи В справедливо соотношение:

$$\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{N}\left\{\eta_m|P_m^{(N)}|^2 + \eta_m|T_m^{(N)}|^2\right\} + \mathrm{Re}\,\eta_{m_0}\left|P_{m_0}^{(N)} - \frac{\eta_{m_0}}{\mathrm{Re}\,\eta_{m_0}}X_{m_0}\right|^2 + \\ + k\,\mathrm{Im}\iiint\limits_D\left\{a_{11}|\vec{E}^{(N)}|^2 + a_{22}|\vec{H}^{(N)}|^2\right\}dv = \frac{|\eta_{m_0}^2|}{\mathrm{Re}\,\eta_{m_0}}|X_{m_0}|^2, \tag{26}$$

которое является основным для определения свойтств её решения. Из этого соотношения следует:

1. Однородная задача В имеет только тривиальное решение. Отсюда в силу общих свойств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что неоднородная задача всегда разрешима и её решение единственно.

2. Решение задачи В — поле $\left\{\vec{E}^{(N)}, \vec{H}^{(N)}\right\}$ — удовлетворяет условиям ограниченности, равномерным по N:

$$\sum_{m=1}^{N}\mathrm{Re}\,\eta_m|P_m^{(N)}|^2 < C, \qquad \sum_{m=1}^{N}\mathrm{Re}\,\eta_m|T_m^{(N)}|^2 < C, \tag{27}$$
$$\iiint\limits_D|\vec{E}^{(N)}|^2dv < C, \qquad \iiint\limits_D|\vec{H}^{(N)}|^2dv < C, \tag{28}$$

причём константа C не зависит от номера N, а определяется лишь способом возбуждения и свойствами среды.

На основании этих свойств проводится доказательство сходимости в среднем решения задачи В к решению задачи А при $N \to \infty$. Затем, как следствие, доказывается сходимость алгоритмов для решения задачи на собственные значения и задачи дифракции для случая не зависящего от z сечения биизотропной вставки.

В **третьей главе** приводятся результаты тестирования алгоритмов и анализа их внутренней сходимости, проводится исследование волноводно-резонансных свойств киральной среды. В **первом параграфе** с помощью разработанных алгоритмов вычисляются постоянные распространения пустого волновода. Результаты сравниваются с полученными по аналитическим формулам.

Во **втором параграфе** проводится методическое исследование постоянных распространения волновода с частичным по сечению диэлектрическим заполнением. Для полностью заполненного волновода вычисленные значения сравниваются с полученными по аналитическим формулам. В случае частичного заполнения результаты счёта сравниваются с приближёнными значениями постоянных распространения, полученными как решения трансцендентных дисперсионных соотношений. Для отыскания комплексных корней трансцендентных уравнений используется бинарный итерационный корректор-процесс[9]. Демонстрируются трансформация мод при частичном заполнении, снятие вырождения собственных значений и диэлектрический эффект в прямоугольном волноводе.

В **третьем параграфе** рассматриваются постоянные распространения плоского волновода с частичным киральным заполнением. В расчётах использовалась следующая модель киральной среды:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon + \mu\xi^2, \quad & a_{12} &= -i\mu\xi, \\ a_{21} &= i\mu\xi, & a_{22} &= \mu. \end{aligned} \tag{29}$$

Проводится сравнение результатов счёта с имеющимися в литературе. Кроме того, разработанные в первой главе алгоритмы сравниваются между собой.

Четвёртый параграф посвящён исследованию постоянных распространения прямоугольного волновода с частичным по сечению киральным заполнением. Используется модель киральной среды (29). Получены интересные физические результаты.

С ростом кирального адмитанса ξ действительная часть постоянной распространения первой невырожденной моды стандартного волновода растёт, мнимая же, напротив, уменьшается, что соответствует уменьшению диссипации в такой среде по сравнению с соответствующим диэлектриком. Однако это происходит только при размерах вставки, близких к размерам волновода. Также было показано, что диэлектрический эффект проявляется и в киральной среде, причём с введением киральности он усиливается.

Интересным также оказывается поведение второй и третьей моды. В пустом волноводе и при диэлектрическом заполнении они являются невырожденными. Однако, при некотором значении толщины вставки, их постоянные распространения оказываются равны. Введение киральности снимает это вырождение, и при некотором ξ рассматриваемые нормальные волны перестают взаимно трансформироваться.

Рассматривается поведение постоянных распространения четвёртой и пятой мод. При полном диэлектрическом заполнении они равны. Введение

[9] *Моденов В.П.* Бинарный итерационный корректор-процесс вычисления комплексных корней трансцендентных уравнений. // Вестн. Моск. Ун-та, Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, 1985. – №2. – С.63-65.

киральности снимает это вырождение. Более старшие (запредельные) моды с увеличением параметра киральности ξ становятся распространяющимися.

Пятый параграф посвящён исследованию процесса дифракции волны H_{01} на киральной вставке в прямоугольном волноводе. Используется модель киральной среды (29). Получена зависимость коэффициентов отражения и прохождения от размеров вставки и от частоты при различных значениях кирального адмитанса.

Результаты диссертации.

1. Построена математическая модель, основанная на постановке и решении краевой задачи для системы уравнений Максвелла с материальными уравнениями биизотропной среды и предназначенная для исследования волноводно-резонансных свойств биизотропных (в частности, киральных) сред.

2. Предложены, математически обоснованы и реализованы (численные) алгоритмы нахождения собственных значений оператора поставленной краевой задачи с использованием двух схем метода Галёркина. Посчитаны постоянные распространения прямоугольного волновода с частичным по сечению биизотропным заполнением.

3. Предложен, математически обоснован и реализован алгоритм решения рассматриваемой краевой задачи. Посчитана матрица рассеяния электромагнитных волн на биизотропном включении в цилиндрическом волноводе.

4. Составлен комплекс ЭВМ-программ, позволивший выполнить математическое моделирование волноводно-резонансных свойств биизотропных сред. Программы применены для исследования процессов распространения электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с диэлектрическими и киральными включениями.

Список публикаций по теме диссертации

[1] *Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В.* // Труды XII Всероссийской школы-конференции по дифракции и распространению волн, 2001. – Т.II. – С.405-406.

[2] *Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В.* Расчёт цилиндрических волноводов, заполненных киральной средой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2002. – Т.5. – №2. – С.56-58.

[3] *Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В.* Электродинамический расчёт волноводов, заполненных киральной средой // Электродинамика СВЧ, КВЧ и оптических частот, 2002. – Т.10. – №2(34). – С.66-70.

[4] *Моденов В.П., Ромашин А.В.* Математическое моделирование волноводных дифракционно-резонансных свойств анизотропных и биизотропных сред // Прилож. к журн. «Физика волновых процессов и радиотехнические системы», 2003. – С.259.

[5] *Моденов В.П., Ромашин А.В.* Схема метода Галёркина в задаче дифракции для прямоугольного волновода с биизотропной вставкой // Прилож. к журн. «Физика волновых процессов и радиотехнические системы», 2004. – С.164.

[6] *Моденов В.П., Ромашин А.В.* Метод Галёркина в задаче на собственные значения для волновода с частичным биизотропным заполнением // Международная конференция «Ломоносов 2004», секция «Физика», сб. тез., 2004. – С.148-149.

[7] *Моденов В.П., Ромашин А.В.* Метод Галёркина в задаче на собственные значения для волновода с биизотропным заполнением // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот, 2004. – Т.12. – №3-4(40). – С.84-93.

[8] *Моденов В.П., Ромашин А.В.* Задача дифракции электромагнитных волн на биизотропном включении в цилиндрическом волноводе // Электромагнитные волны и электронные системы, 2005. – Т.10. – №8. – С.23-28.