На правах рукописи

СЕРЁГИН Вадим Валерьевич

КГД УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ ИХ РЕШЕНИЯ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук.

Москва
2005

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Т. Г. Елизарова
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.Ф. Тишкин
	доктор физико-математических наук, Н. В. Арделян
Ведущая организация:	Институт теплофизики экстремальных состояний Российской Академии Наук

Защита диссертации состоится «___» _______________ 2005 г. в ____ часов на заседании Диссертационного Совета К 501.001.17 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:

119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ауд. №______.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан «___» _______________ 2005 г.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета К 501.001.17,

доктор физико-математических наук _________________П.А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность. Разработка новых подходов к численному решению задач газовой динамики является актуальной проблемой. Успех решения задач газовой динамики во многом зависит от качества используемых в расчетах сеток. Исследования газодинамических течений в областях с криволинейной границей около тел сложной формы требуют применения специальных сеточных разбиений расчетной области. В последнее время получили все большее распространение неструктурированные сетки. Такие сетки позволяют хорошо аппроксимировать границы области расчета и характерные особенности течений.

Нетрадиционным подходом к построению алгоритмов расчета вязких течений является использование квазигазодинамических (КГД) уравнений, которые отличаются от уравнений Навье-Стокса дополнительными диссипативными слагаемыми с малым параметром в качестве коэффициента[1,2]. КГД уравнения расширяют возможность классической модели Навье-Стокса в случае описания течений вязкого сжимаемого газа. В области применимости уравнений Навье-Стокса дополнительная диссипация, входящая в КГД уравнения, слабо влияет на решение, но обеспечивает устойчивость численных алгоритмов.

Цель работы состоит

- в создании численного алгоритма расчета течений вязкого сжимаемого газа, основанных на КГД уравнениях, на неструктурированных (треугольных) сетках;
- в написании комплекса программ, реализующий этот алгоритм;
- в апробации программ на тестовых задачах и сравнении результатов с имеющимися данными, полученными на основе системы уравнений Эйлера, Навье-Стокса и метода прямого моделирования Монте-Карло.

Научная новизна. На основе предложенных ранее подходов КГД уравнения представлены в виде локальных законов сохранения для немоноатомного газа, то есть газа, обладающего внутренними степенями свободы. В этом случае выделение диссипативных слагаемых типа Навье-Стокса приводит к построению приближенной формулы для коэффициента объемной вязкости.

Построены аппроксимации КГД уравнений на неструктурированных (треугольных) сетках для двумерных расчетных областей в цилиндрической и декартовой системах координат. Разностные аппроксимации строятся в потоковой форме непосредственно для векторов плотности потока массы, теплового потока и тензора вязких напряжений, что соответствует записи КГД уравнений в виде законов сохранения. На основе предложенных аппроксимаций строятся явные разностные схемы для решения нестационарных задач газовой динамики.

---

[1] Елизарова Т.Г., Четверушкин Б. Н. // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, №10. С. 1526.

[2] Шеретов Ю. В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.

Практическая ценность. Построенный алгоритм решения квазигазодинамической системы уравнений реализован в виде программ, написанных на языке C# и снабжены комментариями. Программный комплекс имеет модульную структуру и допускает дальнейшее дополнение и развитие.

На основе построенных алгоритмов проведено численное моделирование характерных нестационарных течений, которые демонстрируют работоспособность и точность построенного алгоритма.

Проведено численное исследование задачи о возможности формировании ударной структуры в атмосфере кометы Хуакутаке (Hyakutake).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались:

— на Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2004", секция "Физика", Физический факультет МГУ, 2004;

— на II Международной конференции "Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания", Обнинск, 2004;

— на Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005", секция "Физика", Физический факультет МГУ, 2005. (доклад признан лучшим в секции «физика»)

— на научном семинаре в Институте теплофизики экстремальных состояний РАН. Москва (14 июля, 2005 г).

— на научном семинаре в Институте математического моделирования РАН (отдел №6). Москва (23 августа, 2005 г).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ №НШ-1918.2003.1 и проекта РАН № 29.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений. Текст изложен на 119 страницах, диссертация содержит 61 иллюстрацию. Список литературы включает 70 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, дается характеристика работы и краткое изложение содержания по главам.

В первой главе КГД уравнения, полученные на основе кинетической модели, представлены в виде законов сохранения для немоноатомного газа. Дифференциальная форма законов сохранения в обычных обозначениях имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_m = 0, \\ \dfrac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi, \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\dfrac{\boldsymbol{j}_m}{\rho} \left(E + p \right) \right] + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = \operatorname{div}\left(\Pi \boldsymbol{u} \right), \end{cases} \tag{1}$$

где ρ, $\mathbf{u}$, p, T - плотность, скорость и давление газа, E - полная энергия, $\mathbf{j}_m$ - вектор плотности потока массы, Π - тензор вязких напряжений, $\mathbf{q}$ - вектор теплового потока. Конкретный вид потоков системы (1) определяется из сопоставления системы КГД уравнений, основанных на кинетической модели, и системы КГД уравнений, записанной на основе законов сохранения (параграфы 1.1 – 1.3). Получившийся результат имеет вид:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{j_m} = \boldsymbol{j_{NS}} - \tau \left(\operatorname{div}\left(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \right) + \nabla p \right), \\ &\Pi = \Pi_{NS} + \tau \boldsymbol{u} \otimes \left[\rho \left(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{p} \right] + \tau \mathrm{I} \left[\left(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{p} + \gamma \boldsymbol{p} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right], \\ &\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_{NS}} - \tau \rho \boldsymbol{u} \left[\left(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \right) \varepsilon + p \left(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \right) \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned}$$

Слагаемые с индексом *NS* соответствуют выражениям в системе уравнений Навье-Стокса. Выделение диссипативных слагаемых типа Навье-Стокса приводит к построению приближенной формулы для коэффициента второй (объемной) вязкости, входящей в тензор вязких напряжений Навье-Стокса Π_{NS} (параграф 1.4). Эту формулу можно представить в виде:

$$\zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right),$$

здесь μ – динамическая вязкость, γ – показатель адиабаты. Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и $\zeta = 0$, в противном случае, при наличии колебательных и вращательных степеней свободы молекулы, $\gamma < 5/3$ и $\zeta > 0$.

Параметр τ характеризует масштаб временного сглаживания и может быть вычислен по формуле $\tau = \mu/(Sc \cdot p)$, где μ - коэффициент динамической вязкости, Sc - число Шмидта.

В последнем параграфе этой главы для стационарного случая показано, что КГД добавки имеют порядок малости $O(\tau^2)$.

Во второй главе система КГД уравнений выписана в произвольной ортогональной системе координат, а также в декартовой и цилиндрической системах координат, которые в дальнейшем используются для построения разностных схем.

Третья глава посвящена аппроксимации системы КГД уравнений на треугольной сетке, построению и тестированию алгоритма решения получившихся разностных уравнений.

Сетка строится исходя из принципа триангуляции Делоне, а число ее узлов выбирается достаточным для обеспечения нужной точности решения. Для построения разностной схемы используется интегро-интерполяционный метод. Система КГД уравнений интегрируется по контрольной ячейке (см рис. 1). Контрольная ячейка ограничена контуром, соединяющим центры соответствующих треугольников сетки. Центры треугольников выбираются как точки пересечения медиан. Газодинамические величины определяются в узлах сетки.

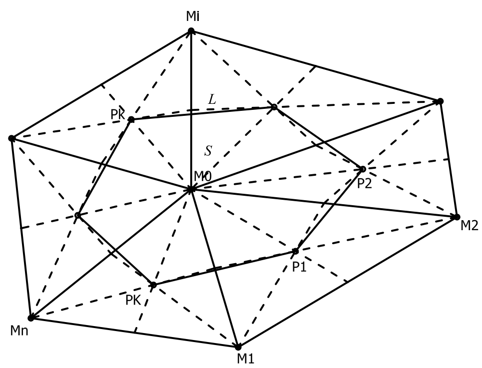

Рис. 1. Сетка и контрольная ячейка

В обобщенном виде получившуюся явную по времени разностную схему можно записать в виде:

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{\Delta t}{S} \sum_k \left[W_x(P_{k+1/2}) n_x(P_{k+1/2}) + W_y(P_{k+1/2}) n_y(P_{k+1/2}) \right] L_k, \qquad (2)$$

здесь

$$
\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u_x\\ \rho u_y\\ E\end{pmatrix},\mathbf{W}=\begin{pmatrix}-\mathbf{j}_m\\ \Pi-\mathbf{j}_m\otimes\mathbf{u}-p\mathbf{e}\\ \Pi\mathbf{u}-\mathbf{q}-\dfrac{E+p}{\rho}\mathbf{j}_m\end{pmatrix},
$$

$\hat{U}_i$ - значение U_i на следующем слое по времени, $\mathbf{e}$ - базисный вектор, L – контур ячейки, по которой ведется интегрирование, L_k -отрезки, из который состоит контур L, $P_{k+1/2}$- серединный узел отрезка L_k, $\mathbf{n}=\left(n_x,n_y\right)$- вектор нормали к контуру L, S- площадь области, ограниченной контуром L, Δt - шаг по времени.

Частные производные, входящие в разностную схему (2), определяются на основе производных по направлению или с использованием формулы Грина (параграф 3.3).

В параграфе 3.5 проведено тестирование алгоритма на задаче о распаде сильного разрыва. В параграфе 3.6 решается задача о точечном взрыве (см. рис. 2). Обе задачи имеют автомодельное решение.

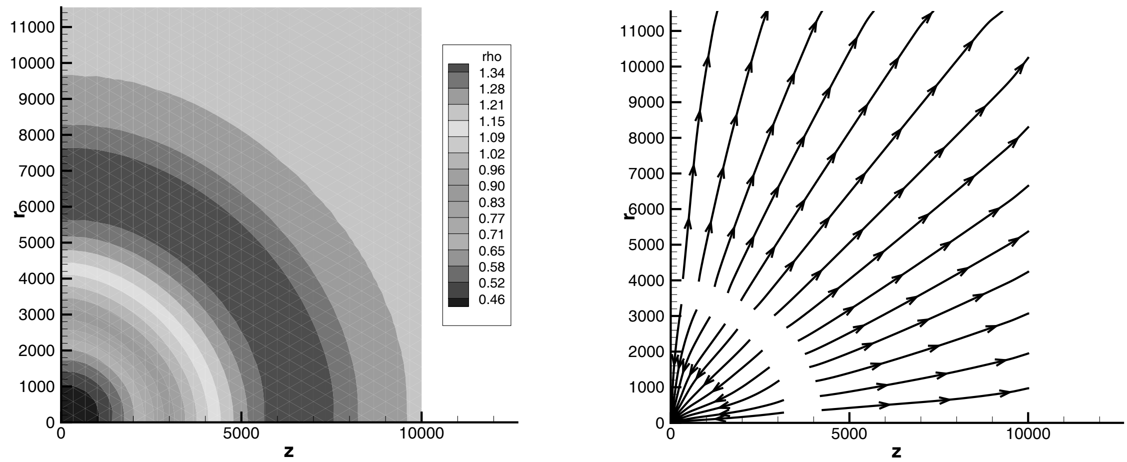

Рис. 2. Распределение плотности (слева) и картины течения (справа) для задачи о точечном взрыве

В параграфе 3.7 рассматривается дозвуковове обтекание кругового цилиндра. При маленьких числах Рейнольдса $\mathrm{Re}<20$ в следе за цилиндром образуется стационарное течение (см. рис. 3). При $\mathrm{Re}>20$ наблюдается дорожка Кармана (см. рис. 4).

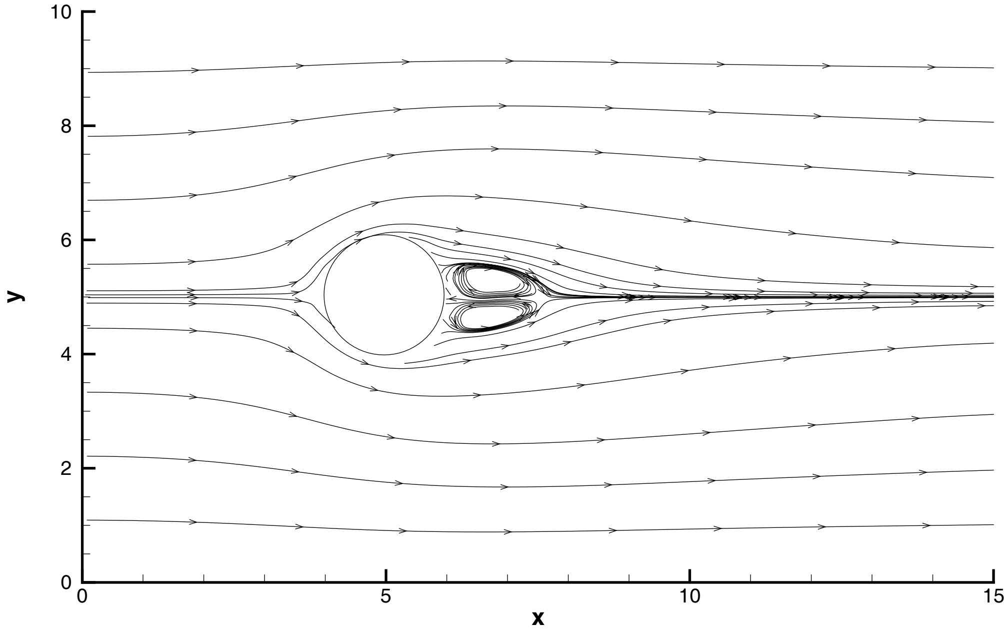

Рис. 3. Распределение линий тока для числа Рейнольдса Re=10

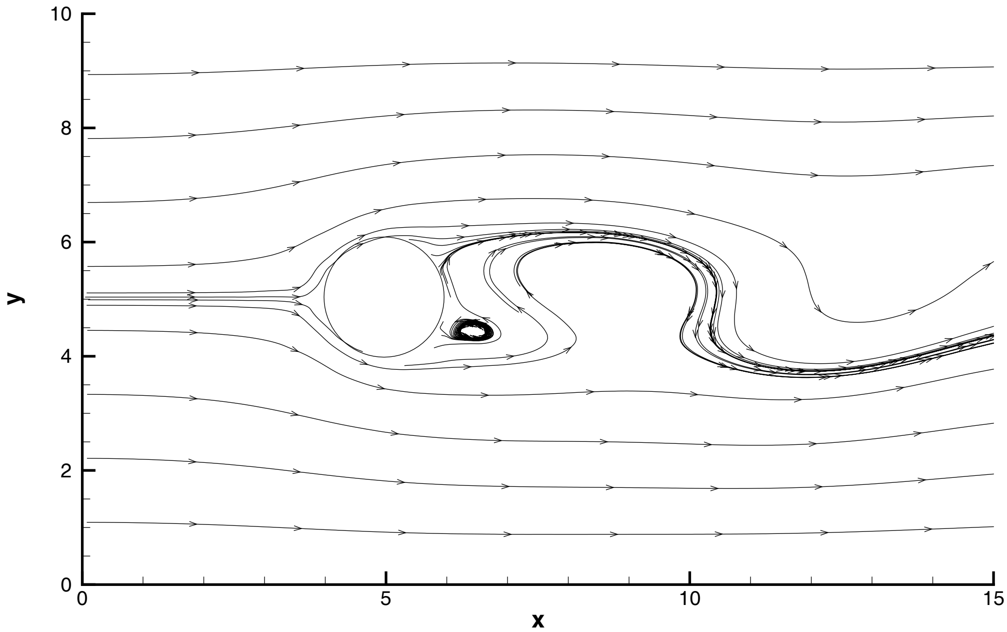

Рис. 4. Распределение линий тока в автоколебательном процессе для числа Рейнольдса Re=50

В четвертой главе проведено исследование задачи о возможности формировании ударной структуры в атмосфере кометы Хуакутаке (Hyakutake). Комета рассматривается как двухядерное образование (см. рис. 5).

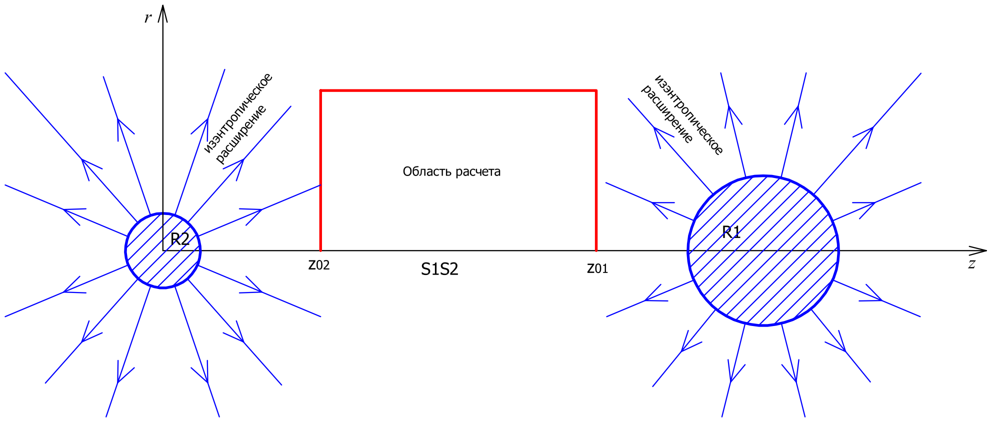

Рис. 5. Постановка задачи и область расчета

Моделирование газодинамического течения в атмосфере кометы, состоящей из водяного пара, представляет собой сложную задачу, основными аспектами которой являются значительный перепад плотности частиц и их температуры - вблизи ядра плотность окружающего газа составляет 3.3 10^{-7} кг/м^3, температура около 200 градусов Кельвина, на расстоянии около 2 000 км - соответственно, 1.4 10^{-13} кг/м^3 и при температуре около 5 градусов Кельвина. Число Маха варьируется от 1 вблизи поверхности ядра до 50 вдали от ядра.

Рассматривается течение, образующееся в окрестности двух ядер кометы (рис.5). Считаем, что газ от обоих источников R_1, R_2 расширяется изэнтропически на расстояния z_{01}, z_{02} от ядер кометы. Целью расчета является определение параметров второго ядра кометы R_2 (плотности газа на его поверхности), при которых возможно образование ударной структуры, видимой на снимках астрономических наблюдений. Расчет проводится в цилиндрической системе координат.

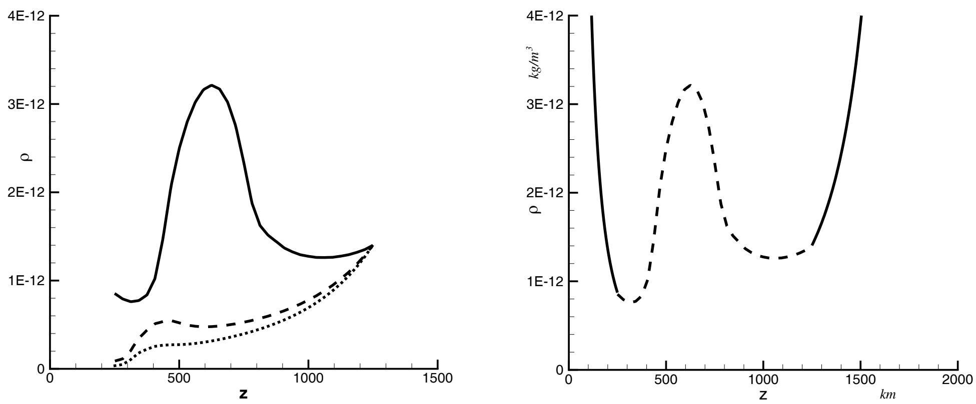

Рис. 6. Сравнение распределений плотности для сечения z=0 для разных значений ρ_2 (слева) и сшивка численного решения для плотности с изэнтропическим решением (справа)

На рис.6 (слева) приведено решение в зависимости от выбора плотности водяного пара, истекающего с поверхности второго ядра. Видно при малых значениях плотности ударная волна не образуется.
На рис.6 (справа) сшивается аналитическое и численное решение для оценки точности.

В пятой главе описана программная реализация построенных алгоритмов и приведена блок-схема программы.

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертации и намечены пути дальнейшего развития предложенного подхода.

Основные результаты

1. **КГД уравнения записаны в виде законов сохранения для немоноатомного газа. Получено выражение для коэффициента второй вязкости.**

2. **Разработан алгоритм решения КГД уравнений для нестационарных течений вязкого сжимаемого газа на неструктурированных сетках для 2Д задач – декартовая и цилиндрическая геометрии.**

   - Построен алгоритм аппроксимации частных производных на треугольной сетке.
   - Разностные аппроксимации строятся в потоковой форме в соответствии с видом КГД уравнений в форме законов сохранения.
   - Устойчивость численных алгоритмов достигается путем добавления в коэффициенты при диссипативных слагаемых малого параметра, связанного с шагом пространственной сетки.

3. **Проведено численное моделирование газодинамических течений:**

   - в декартовой системе координат (задача о распаде сильного разрыва, задача об обтекании кругового цилиндра)
   - в цилиндрической системе координат (задача о точечном взрыве, задача моделирования течений в атмосфере кометы)

Задача о распаде сильного разрыва, задача о точечном взрыве и задача об обтекании кругового цилиндра демонстрирует точность и устойчивость предложенного алгоритма. Численное моделирование течений в атмосфере кометы позволяет определить условия для образования ударной структуры, видимой на снимках в астрономических наблюдениях.

4. **Построенный алгоритм** решения квазигазодинамической системы уравнений реализован в виде программ, написанных на языке C# и снабжены комментариями. Программный комплекс имеет модульную структуру и допускает дальнейшее дополнение и развитие.

Публикации

1. *Серёгин В.В.* Численное решение квазигазодинамических уравнений на треугольных сетках. Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2004" секция "Физика". Сборник тезисов. М.: Физич. ф-т МГУ, 2004. С. 135-136.

2. *Серёгин В.В.* Использование неструктурированных сеток для решения квазигазодинамических уравнений. II Международная конференция "Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания". Сборник тезисов. Обнинск, 2004, С. 72-74

3. *Елизарова Т.Г., Серегин В.В.* Численное решение квазигазодинамических уравнений на треугольных сетках // Вестник Московского университета, серия 3. Физ. Астрономия, 2005, №4, С.15-18.

4. *Елизарова Т.Г., Серегин В.В.* Квазигазодинамические уравнения и аппроксимационная формула для объемной вязкости // Вестник Московского университета, серия 3. Физ. Астрономия, 2005, №6.

5. *Серёгин В.В.* Моделирование задачи о сильном точечном взрыве. Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005" секция "Физика". Сборник тезисов. М.: Физич. ф-т МГУ, 2005, Т1, С. 96.

6. *Серёгин В.В.* Численное моделирование течений в атмосфере кометы. Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005" секция "Физика". Сборник тезисов. Т1. М.: Физич. ф-т МГУ, 2005, Т1, С. 97.