МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Артюшкова Марина Евгеньевна

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ НА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ

01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2006 г.

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, профессор Д.Д. Соколов.

Официальные оппоненты:

Кандидат физико-математических наук Э.Р. Розендорн.

Доктор физико-математических наук К.П. Зыбин.

Ведущая организация:

Институт механики сплошных сред УРО РАН г.Пермь

Защита состоится ___________ 2006 г. в ___ час. на заседании Диссертационного Совета К.501.001.17 при Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119899, Москва, Воробьевы горы, физический факультет МГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ (119899, Москва, Воробьевы горы, физический факультет МГУ).

Автореферат разослан ___________ 2006 года

Ученый секретарь Диссертационного Совета К.501.001.17 доктор физико-математических наук, профессор (П.А.Поляков)

I. Общая характеристика работы

Актуальность исследований

Еще в 1964 году Я. Б. Зельдович обратил внимание на то, что влияние небольших неоднородностей плотности во Вселенной, которые присутствуют в ней, несмотря на ее исключительную степень однородности и изотропии, не сводится к флуктуациям сети изотропных геодезических и некоторому шуму, вносимому таким образом в космологические тесты. Оказывается, что возникает небольшое систематическое искажение космологических тестов, которые делают Вселенную, кривизна пространственного сечения которой в среднем равна нулю, в определенной степени похожей на открытую космологическую модель. Удается ввести понятие эффективной кривизны, которая оказывается отрицательной и пропорциональной величине неоднородностей. Во Вселенной с неоднородностями наблюдатель, измеряющий кривизну пространственного сечения путем сопоставления угловых размеров и расстояния до стандартного объекта, получит вместо осредненного значения кривизны, равного нулю, ее эффективное значение, которое окажется отрицательным.

Несмотря на большой аналитический прогресс в изучении эффекта Я. Б. Зельдовича, представляется необходимым поддержать эти результаты данными численного моделирования. Во-первых, аналитические результаты представляют собой некоторые утверждения об асимптотическом поведении решений без оценки скорости выхода на ассимптотику. Во-вторых, теория в полной мере использует модель флуктуаций как случайного поля. Эта модель хорошо зарекомендовала себя в физике, но все же она не всегда может адекватно применяться к конкретным физическим задачам; в контексте космологии на эту ограниченность указывал Я. Б. Зельдович. Поскольку аналитические результаты о поведении решений уравнения Якоби кардинально нарушают привычные представления статистической физики, их верификация методами численного моделирования представляется необходимой. В то же время такие работы практически отсутствуют в литературе.

Работа Я. Б. Зельдовича была одной из ранних работ, в которых были обнаружены неожиданные свойства уравнений со случайными коэффицентами. В дальнейшем изучение этих явлений проходило в основном на материале физики конденсированного состояния, где они входят в круг явлений локализации (физика твердого тела) и перемежаемости (гидродинамика). Уравнение Якоби интересно не только в космологическом контексте, но и как достаточно простое модельное уравнение, на котором поведение решений уравнений со случайными коэффициентами можно изучить гораздо глубже, чем на сложных уравнениях физики конденсированного состояния.

В частности, модель уравнения Якоби, описывающая эффект Я. Б. Зельдовича, может быть использована и в приложении к магнитной гидродинамике в задаче турбулентного динамо. Аналитическое исследование обеих задач опирается на общие свойства матричных операторов, такие как некоммутативность и унимодулярность, поэтому уравнение Якоби может рассматриваться как модель мелкомасштабного динамо. Преимущество этой простой модели в рамках обыкновенных дифференциальных уравнений перед известными трехмерными аналогами в численном эксперименте состоит в том, что для уравнения Якоби реально получить огромный объем выборки случайных реализаций, который позволяет оценить среднее и статистические моменты.

Цели и задачи работы

Основной целью настоящей работы является численное исследование поведения решений уравнения Якоби и сопоставление результатов численного исследования с аналитическими результатами в контекстах двух актуальных областей в современной физике: космологии и магнитной гидродинамики.

В ходе исследования решались следующие задачи:

1. Вычисление типичной реализации уравнения Якоби, среднего и высших статистических моментов. Сопоставление полученных численных результатов с известными теоретическими результатами.

2. Численное построение статистических распределений расстояний между сопряженными точками вдоль геодезических. Сравнение полученных результатов в известными теоретическими оценками.

3. Выявление общих свойств решения уравнения Якоби и уравнения индукции. Обоснование моделирования мелкомасштабного галактического динамо уравнением Якоби на геодезической со случайной кривизной.

4. Определение минимальных объема выборки и масштаба времени для возможности численного моделирования мелкомасштабного динамо.

5. Выявление роли памяти в турбулентном потоке для перемежаемости и роста магнитного поля. Вычисление типичной реализации, среднего и статистических моментов для уравнения Якоби с учетом эффекта памяти.

Защищаемые положения

1. Численно продемонстрирован экспоненциальный рост и эффект перемежаемости поля Якоби. Вычислены скорости роста типичной реализации и высших статистических моментов. Численно получен показатель скорости роста среднего значения решения уравнения Якоби, который совпадает с теоретическим показателем с высокой точностью.

2. Численно показано, что функция распределения расстояний между сопряженными точками на геодезической напоминает распределение Пуассона, а также выявлены небольшие отличия от этого распределения. Получена оценка среднего расстояния между сопряженными точками,

которая согласуется с теоретическими оценками сверху и снизу.

3. Показано, что рассматриваемая модель эффекта Я. Б. Зельдовича может служить моделью для задачи мелкомасштабного динамо в магнитной гидродинамике.

4. Оценен объем выборки случайных реализаций необходимый для моделирования среднего и статистических моментов уравнения Якоби. Этот объем оказался неожиданно большим, порядка 10^5.

5. Показано, что эффекты памяти, присутствующие в реальном физическом процессе не подавляют перемежаемость, а иногда даже увеличивают ее.

Научная новизна

Известно, что решения эволюционных уравнений со случайными коэффициентами имеют много общих свойств, мало зависящих от конкретного вида уравнения. В данной работе проведено систематическое численное исследование простого модельного уравнения Якоби со случайными коэффициентами, которое позволило детально изучить свойства, характерные для широкого круга задач.

Проведено сопоставление результатов, полученных с помощью разных стандартных генераторов псевдослучайных чисел: $Visual\ C^{++}$ и $Maple5$. Несмотря на то, что генераторы имеют приблизительно одинаковые периоды повторения, структура каждого из них индивидуальна, что приводит к небольшому отличию численных результатов.

Продемонстрирована связь между простым двумерным уравнением Якоби в космологии и трехмерным уравнением индукции в магнитогидродинамике. Обоснована постановка задачи численного моделирования мелкомасштабного динамо с помощью простого модельного уравнения Якоби. Численное исследование этого уравнения неожиданно показало, что необходимый объем выборки случайных реализаций очень велик и явно недостижим для прямого численного моделирования трехмерной задачи.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты данной работы могут представить интерес для космологии, в частности, для построения оценок расстояния до гравитационных линз, вызванных когерентным действием малых возмущений кривизны в пространстве, поскольку в работе получены статистические распределения расстояний между гравитационными линзами, изучена зависимость формы распределения от масштаба флуктуаций плотности в пространстве.

Проведенное исследование может принести пользу в численном моделировании уравнения индукции для задачи мелкомасштабного динамо. Полученная оценка минимального объема выборки, необходимая для того, чтобы воспроизвести усредненное решение уравнения Якоби и продемонстрировать явление перемежаемости, позволит оценить точность расчетов трехмерной задачи и позволит более и обоснованно планировать дальнейшие численные эксперименты.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих международных семинарах и конференциях:

1. "Актуальные проблемы внегалактической астрономии", г. Пущино, 2003.

2. "Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова", п. Абрау-Дюрсо, 2004.

3. "Perm Dynamo Days", г. Пермь, Институт механики сплошных сред УРО РАН, 2005.

4. "International Conference on Theoretical Physics", г. Москва, ФИАН, 2005.

Результаты диссертации докладывались на семинаре "Геометрия в целом", механико-математический факультет МГУ, 2006.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях в рецензируемых журналах и 5 публикациях в материалах конференций.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 50 наименований. Диссертация содержит 105 страниц, включая 28 рисунков.

II. Содержание работы

Первая глава является вводной. В этой главе излагается описание эффекта Я. Б. Зельдовича с помощью уравнения Якоби. Приводятся известные результаты аналитического исследования эффекта и поясняется потребность в подтверждении этих результатов посредством прямого численного моделирования. Показано, что уравнение Якоби может являться моделью задачи мелкомасштабного динамо.

Эффект Я. Б. Зельдовича удобно описать в терминах полей Якоби. Пусть $\gamma(\theta, x)$ - семейство геодезических, проходящих через некоторую точку на пространственном сечении, причем x - расстояние от точки их пересечения, а θ - угол, отсчитываемый от некоторой базовой геодезической, для которой $\theta = 0$. Тогда расстояние между точками, находящимися на расстоянии x на близких геодезических семейства равно $y(x)\theta$, где y и есть поле Якоби вдоль базовой геодезической. Поле Якоби можно найти из уравнения Якоби:

$$y'' + K(x)y = 0,$$

где K - кривизна двумерного среза, а производные берутся по расстоянию от начальной точки. Естественные начальные условия для уравнения (1) имеют вид: $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$. Мы рассматриваем кривизну $K(x)$ как случайный процесс с обновлением. Тогда решение уравнения Якоби может быть представлено в виде произведения независимых случайных матриц. В работе к решению уравнения Якоби была применена теория Ферстенберга. В этой теории изучено произведение независимых случайных матриц и показано, что оно растет экспоненциально. Поэтому модуль поля Якоби растет экспоненциально, причем скорость роста постоянна и не зависит от реализации, и поле Якоби обладает сильной перемежаемостью, т. е. каждый высший статистический момент p-го порядка растет с постоянной скоростью, которая увеличивается с ростом номера момента. Аналитически получен только один показатель скорости роста для среднего поля, а не его модуля. Для остальных показателей скоростей роста удается получить лишь некоторые неравенства. Естественно получить конкретные значения этих показателей в численном эксперименте.

Теория Ферстенберга применяется и в более сложных многомерных задачах. Примером такой задачи является уравнение индукции для мелкомасштабного динамо. Идея гидромагнитного динамо состоит в том, что движения проводящей жидкости усиливают начальное слабое магнитное поле в отсутствие внешних электродвижущих сил. Общее решение задачи Коши для уравнения индукции по аналогии с уравнением Якоби выражается в виде произведения случайных матриц, поэтому при исследовании этой задачи с помощью теории Ферстенберга обнаруживаются те же свойства поведения решения, как и для уравнения Якоби, а именно перемежаемость и экспоненциальный рост решения. Таким образом уравнение Якоби может служить моделью для мелкомасштабного динамо. Преимущество этой модели относительно исходной состоит в том, что уравнение Якоби имеет структуру более простую, чем уравнение индукции, и возможности численного моделирования его намного шире.

Во **второй** главе представлены результаты численного моделирования поведения решений уравнения Якоби. Эти данные подтверждают качественные свойства поведения решений уравнения Якоби со случайными коэффициентами и, в частности, эффект Я. Б. Зельдовича. Представлены численные оценки скорости роста типичной реализации, среднего и высших статистических моментов.

Для численного решения уравнения Якоби мы использовали подход, связанный с тем, что на каждом интервале обновления решение выражается через значение решения и его производной на левом конце и некоторую стандартную матрицу преобразования, зависящую лишь от значения кривизны на данном интервале обновления. Решение через несколько интервалов обновления выражается как произведение соответствующих случайных матриц. Результат оказался соответствующим теоретическим предсказаниям, типичная реализация действительно растет экспоненциально. Использованный нами подход является узко специализированным для нашей задачи. Мы также воспользовались стандартным методом Рунге-Кутта. Типичная реализация, построенная по методу Рунге-Кутта 2-го порядка тоже растет экспоненциально, но с несколько большей скоростью, чем в первом методе - это обусловлено тем, что неспециализированный метод Рунге-Кутта более неустойчив и в решении накапливается ошибка. Тем не менее разница скоростей роста, полученных по двум методам невелика, и это указывает на справедливость полученных результатов, т. е. что рост решения не является следствием неустойчивости.

В качестве генератора случайных чисел мы использовали генератор, встроенный в язык $Visual\ C^{++}$ (версия 6.0) и в пакет $Maple5$, и генераторы дают цепочку псевдослучайных чисел с периодом повторения 2^{32}, что примерно соответствует требуемому в нашей задаче количеству случайных чисел. Обнаружено небольшое количественное расхождение результатов, полученных с помощью этих двух генераторов.

В **третьей** главе рассматривается явление возникновения гравитационных линз. Вследствие эффекта Я. Б. Зельдовича в пространстве могут возникать гравитационные линзы, связанные не с каким-то индивидуальным возмущением кривизны, а с совместным действием многих возмущений. Гравитационные линзы фокусируют изображение источника света в некоторых точках пространства, которые называются сопряженными точками. Гравитационная линза отличается от оптической тем, что искривление траектории луча происходит не за счет изменения показателя преломления в веществе, а вследствие того, что на пути его распространения встречаются массивные тела. В геометрических терминах гравитационные линзы соответствуют сопряженным точкам на геодезической, т. е. точкам, в которых поле Якоби y обращается в ноль. Представлены результаты численного моделирования распределения расстояний между сопряженными точками вдоль геодезических.

Численно показано, что функция распределения расстояний между сопряженными точками на геодезической напоминает распределение Пуассона, а также выявлены небольшие отличия от этого распределения. Представлены оценки среднего расстояния между сопряженными точками для малых значений модуля кривизны, которые согласуются с теоретическими оценками сверху и снизу при стремлении к нулю кривизны.

В **четвертой** главе проводится исследование явления генерации магнитного поля в задаче мелкомасштабного динамо. Аналитические предсказания в этой области оказываются далеки от современных результатов численного моделирования, вероятно, вследствие ограниченных возможностей прямого численного эксперимента. Мы предлагаем прояснить ситуацию с помощью исследования простого уравнения Якоби со случайными коэффициентами, которое моделирует более сложные уравнения мелкомасштабного динамо. Простое дифференциальное уравнение Якоби обладает всеми свойствами, которые используются в аналитической теории для демонстрации перемежаемого поведения и роста магнитного поля.

В результате численного исследования уравнения Якоби, рассмотренном в главе 1, оказалось, что для детального воспроизведения перемежаемого поведения растущих решений требуется около $N = 5 \cdot 10^5$ независимых реализаций. Такой громадный объем выборки недостижим при прямом численном моделировании соответствующих трехмерных задач. С другой стороны, количество независимых турбулентных ячеек, скажем, для галактического динамо как раз сравнимо с N.

Мы усложнили модель случайного процесса и добавили в нее эффект памяти. Результаты численного моделирования показали, что эффекты памяти оказывают влияние на результат численного эксперимента, но суть явления не искажается. Более того, эффекты памяти могут даже усиливать неустойчивость. Заметим, что уравнение Якоби не учитывает омические потери. Поэтому не исключено, что для уравнения индукции влияние эффектов памяти будет разнообразнее, чем для простого уравнения Якоби.

Основные результаты опубликованы в работах:

1. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрономический журнал, - 2005, - Т. 82(7), - С. 584 - 589.

2. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование, - 2003, Т. 5(2), - С. 172 - 177.

3. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by

Jacobi equation // Magnetohydrodynamics, - 2006, - V. 42(1), - P. 3 - 19.

4. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби для геодезической со случайной кривизной. Сб. "Актуальные проблемы внегалактической астрономии", тезисы ежегодной конференции //Пущино, - 2003, - С. 44.

5. *Артюшкова М.Е., Иванова Е.В., Соколов Д.Д.* Флуктуации кривизны и распространение света во Вселенной. Сб. "Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов"// Ростов-на-Дону, Изд-во Ростовского ун-та, - 2004, - С. 173.

6. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное исследование сопряженных точек вдоль геодезической со случайной кривизной, Сб. "Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов"// Ростов-на-Дону, Изд-во Ростовского ун-та, - 2004, - С. 174.

7. *Artyushkova M.E., Ivanova E.V., Sokoloff D.D.* The effective curvature of the Universe with inhomogeneities and numerical modelling of Jacobi equation on a geodesic with random curvature, Dynamo wave nearby stellar equator // Perm Dynamo Days, Abstracts, Perm, - 2005, - P. 28

8. *Artyushkova M.E., Ivanova E.V., Sokoloff D.D.* Intermittency in dynamo and Jacobi equations // International Conference on Theoretical Physics, Abstracts, Moscow, Lebedev Institute, - 2005, - P. 80.