

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Болохов Сергей Валерьевич

МАССЫ ФЕРМИОНОВ И МЕТОДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ
КЛАССИФИКАЦИИ В ОБЪЕДИНЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ТЕОРИЯХ

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2006

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Владимиров Юрий Сергеевич.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кречет Владимир Георгиевич,

кандидат физико-математических наук, доцент
Гаврилов Валерий Рудольфович.

Ведущая организация:

Российский Университет Дружбы Народов, г. Москва.

Защита состоится 11 мая 2006 года в 16 час. на заседании Диссертационного Совета К.501.001.17 при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: 119992, г.Москва, Воробьевы горы, физический факультет МГУ, ауд. СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан 11 апреля 2006 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета К.501.001.17

доктор физико-математических наук

П.А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Поиск и построение объединенной теории физических взаимодействий – одна из ключевых задач современной теоретической физики. Исследования в данной области нацелены на решение целого ряда вопросов: описание спектра частиц, выявление механизма генерации их масс, а также прояснение природы пространства-времени и существующей иерархии взаимодействий на различных масштабах (вплоть до масштаба объединения) и др.

Во второй половине XX века наиболее интенсивно развивался калибровочный подход к описанию взаимодействий. В рамках данного подхода была сформулирована Стандартная Модель электрослабых взаимодействий и квантовая хромодинамика, а также был предложен механизм генерации масс частиц, известный как механизм Хиггса. В целом калибровочный подход оказался весьма плодотворным и успешно зарекомендовал себя в физике элементарных частиц.

В то же время вопрос о включении гравитации в схему калибровочного подхода остается дискуссионным. Кроме того, в настоящее время Стандартную Модель принято рассматривать как феноменологическую теорию, являющуюся низкоэнергетическим приближением некоторой более общей теории, в качестве которой часто называют теорию суперструн или М-теорию. Надо заметить, что теория струн наряду с калибровочной идеологией существенно использует идеи и принципы многомерных теорий Калуцы-Клейна, которые составляют основу так называемого *геометрического подхода* к объединению взаимодействий.

В связи с повышенным вниманием к многомерным теориям представляется весьма актуальным развитие и анализ возможностей геометрического подхода. В частности, интерес представляет исследование самостоятельных вариантов моделей Калуцы-Клейна. Сюда же непосредственно примыкают вопросы описания масс частиц в рамках геометрического подхода, способы геометризации сильных и электрослабых взаимодействий, а также анализ геометрических и алгебраических соотношений между различными типами взаимодействий.

Надо отметить, что многомерный геометрический подход, как и калибровочный, не решает всех проблем, связанных с описанием физических процессов на планковских масштабах длин и энергий, поскольку на этих масштабах традиционное представление о пространстве-

времени как о гладком многообразии, по-видимому, теряет смысл. На сцену выходит проблема корректного совмещения принципов теории относительности с квантовой теорией, которая формулируется как проблема «квантования гравитации». Многолетние безуспешные попытки её решения заставляют предположить, что искомая теория, возможно, должна быть сформулирована на совершенно иных концептуальных предпосылках, значительно корректирующих наши представления о природе пространства-времени, материи и фундаментальных взаимодействиях. В связи с этим представляется актуальной задача распространения методов геометрического подхода на область других классов геометрий, способных более адекватно отразить структуру пространства-времени на микромасштабах. В частности, особого внимания заслуживает класс так называемых бинарных геометрий, открытых в 60-х гг. в новосибирской группе математиков. Теория, основанная на данном типе геометрии, реализует так называемый реляционный подход к описанию взаимодействий. Данная теория развивается в работах Ю.С.Владимирова.

Цель работы.

Представленная работа посвящена анализу возможностей и методов объединенных геометрических теорий фундаментальных взаимодействий, основанных на различных типах используемых геометрий, и нацелена на решение следующего круга задач: развитие геометрического подхода в рамках многомерных моделей Калуцы–Клейна, а именно, 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий и 7-мерной теории электрослабых взаимодействий; описание масс частиц в рамках теорий Калуцы–Клейна и, в частности, анализ массовых слагаемых в фермионном секторе 8- и 7-мерных геометрических теорий, а также механизма перенормировки планковских масс элементарных частиц; анализ геометрических и алгебраических аспектов описания взаимодействий и их интерпретация с позиций геометрического подхода, в частности, изучение алгебраических связей между гравитацией и электромагнетизмом и непосредственно сопряженная с этим вопросом задача алгебраической классификации систем отсчета в ОТО; расширение геометрического подхода на более широкий класс геометрий (в частности, бинарных геометрий) и описание взаимодействий в рамках реляционной теории.

Научная новизна. В работе впервые:

1. Исследован массовый сектор фермионов в 8-мерной геометри-

ческой теории гравитации-сильных взаимодействий. Предложен механизм генерации масс частиц с учетом возможности конформных вейлевских преобразований, включая эффективный способ перенормировки планковских масс.

2. Проанализирована возможность частичной размерной редукции в фермионном секторе 8-мерной модели гравитации-сильных взаимодействий. Данная процедура означает переход к 7-мерной модели гравитации-электрослабых взаимодействий путем выхода на эффективную гиперповерхность, возникающую в ходе топологического отождествления пары калуцевских координат.

3. В контексте вопроса об алгебраической связи между гравитацией и электромагнетизмом (в рамках 4- и 5-мерных теорий) предложена алгебраическая классификация систем отчета в ОТО.

4. Изучены алгебраические аспекты описания взаимодействий в рамках реляционной теории, развиваемой в работах Ю.С.Владимирова. Дана алгебраическая трактовка различных каналов взаимодействий.

Практическая ценность.

Результаты могут быть использованы в исследованиях многомерных геометрических теорий, в частности, в контексте поиска механизмов генерации масс элементарных частиц, обусловленных полями геометрической природы. Специфика использованных в работе подходов позволяет расширить и углубить принципы современных многомерных теорий, распространив их на более широкий класс геометрий, а также продемонстрировать роль алгебраических методов в описании взаимодействий и в формализме систем отчета в ОТО, способствуя дальнейшему развитию этих направлений.

Апробация работы.

Полученные в работе результаты докладывались на семинаре "Геометрия и физика" и семинаре Российского Гравитационного общества (МГУ, физический факультет); конференции "Ломоносовские чтения" (МГУ) в 2002, 2003, 2005 гг; конференции в ИТЭФ (декабрь 2005); международной конференции «PIRT» (Москва, МГТУ им. Баумана, 2005); международной конференции «Theoretical and experimental problems of General Relativity and Gravitation» (Томск, 2002); международной конференции по гравитации, космологии и астрофизике GR-12 (Казань, КГПУ, 2005); международной конференции по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодина-

мике, посвящ. 90-летию со дня рождения К.П.Станюковича (Москва, РУДН, 2006).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, приведенных в списке литературы в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения и списка цитируемой литературы. Текст диссертации набран в издательской системе \LaTeX .

Содержание работы

Во введении дана постановка проблемы, сделан обзор литературы по теме диссертации, изложена мотивация и цели работы.

Первая глава носит вводный характер и по существу нацелена на изложение основных принципов геометрического подхода (включая необходимый математический аппарат), а также обоснование его ключевой роли в осмыслении связи между различными типами взаимодействий. Эта связь рассмотрена на примере гравитации и электромагнетизма в рамках 5-мерной теории Калуцы. Алгебраические аспекты этой связи служат основой для целого ряда задач, таких как классификация систем отсчета в ОТО.

В параграфе 1 изложен метод задания систем отсчета в ОТО, основанный на монадном формализме. Дается определение системы отсчета, понятие калибровки, физико-геометрических тензоров и монадных операторов дифференцирования.

В параграфе 2 изложена 5-мерная теория Калуцы, демонстрирующая геометрическую связь между гравитацией и электромагнетизмом. Используется монадный метод и формализм $4+1$ -расщепления.

В параграфе 3 исследованы алгебраические аспекты связи между гравитацией и электромагнетизмом, проявляющиеся на 4-мерном уровне, и дана их интерпретация с позиций 5-мерной теории. Рассмотрены соотношения дуальности и электровакуум Эйнштейна–Максвелла. Изложена алгебраическая классификация Петрова пространств Эйнштейна, которая в дальнейшем составляет основу используемых в работе алгебраических методов. Применение этой классификации продемонстрировано на примерах ОТО и электромагнетизма.

Возможность определить понятие систем отсчета, ассоциированных с электромагнитным полем, позволяет естественным образом распространить идею алгебраической классификации на системы отсчета в ОТО. Показано, что различные системы отсчета, характеризуемые тремя физико-геометрическими тензорами (вектором ускорения a_μ , тензором угловой скорости вращения $\omega_{\mu\nu}$ и тензором скоростей деформаций $d_{\mu\nu}$), могут быть отнесены к различным подтипам Петрова комплексной матрицы, построенной из компонент соответствующих тензоров.

Вторая глава посвящена изложению основных принципов 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий.

В параграфе 1 проанализированы фундамент и ключевые принципы 8-мерной теории. Обсужден выбор топологии внутреннего пространства, различные варианты размерной редукции на 4-мерие, размерность и сигнатура. Существенным в теории является использование октадного метода, формализма $4+1+1+1+1$ -расщепления, понятия «обобщенной системы отсчета» и метода конформных преобразований для устранения планковских масс, а также возможность осуществления частичной размерной редукции к 7-мерной теории гравиелектрослабых взаимодействий.

В параграфе 2 изложены основные соотношения 8-мерной теории, формализм расщепления, физико-геометрические тензоры, операторы дифференцирования, структура полей и размерная редукция.

В теории используется 8-мерное псевдориманово многообразие \mathcal{M}_8 сигнатуры $(+---; ----)$, имеющее структуру $V_4 \times B_4$, где V_4 – 4D-гиперповерхность, отождествляемая с физическим пространством-временем, а внутреннее пространство B_4 представляет собой 4-тор с чрезвычайно малыми (порядка 10^{-33} см) периодами компактификации. Метрический тензор представляется в октадном виде: $G_{MN} = G_{(A)M} G_{(A)N}^{(A)}$, где $G_{(A)M}$, $A = 0\dots 7$ – локальный ортонормированный набор из восьми векторов в касательном пространстве $\mathcal{T}\mathcal{M}^8$ (октада). Калибровочные поля определяются как коэффициенты гармонического разложения компонент октады по набору экспоненциальных гармоник на B_4 . Основным объектом теории является действие

$${}^8S = \int d^8x \sqrt{-\det(G_{MN})} \left[-\frac{{}^8R}{2\kappa c} + \frac{i\hbar c}{2} (\bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi) + h.c. \right],$$

из которого в процессе размерной редукции получается 4-мерное действие системы, включающей в себя гравитационное поле, бозонные

поля (переносчики сильных взаимодействий) и массивную фермионную материю.

В параграфе 3 детально анализируется фермионный сектор теории, представленный лагранжианом фермионного поля $\Psi(x)$. Последнее является 16-компонентным спинором, так как образующие соответствующей алгебры Клиффорда $S(1,7)$ допускают реализацию 16-рядными матрицами.

Исходя из набора естественных постулатов и свойств алгебры Клиффорда, исследован вопрос о ковариантной производной спинора в 8-мерии, соответствующий известным коэффициентам Фока–Иваненко в 4-мерии. На основе явно полученного матричного представления алгебры Клиффорда $S(1,7)$ произведено $4+1+1+1+1$ -расщепление фермионного лагранжиана с учетом выбранной процедуры вложения биспинорных полей материи в 16-компонентное спинорное поле $\Psi(x)$. Способ вложения диктуется принципом соответствия с фермионной частью лагранжиана хромодинамики.

В ходе редукции поле Ψ расщепляется на четыре дираковских биспинора, содержащих компоненты кваркового цветового $SU(3)$ -триплета в качестве коэффициентов при экспоненциальных гармониках. В итоге получается 4D-лагранжиан фермионной материи, содержащий свободную кинетическую часть, члены взаимодействия с бозонными полями и гравитацией (включая аномальные моменты), а также массовые члены.

Третья глава посвящена исследованию механизма генерации масс в фермионном секторе 8-мерной и 7-мерной теорий, а также вопросу перенормировки планковских масс. Данная задача сопряжена с аналогичной проблемой в бозонном секторе теории, для решения которой в более ранних работах было предложено использовать конформные (вейлевские) преобразования исходной метрики.

В параграфе 1 рассмотрена группа W_ξ вейлевских конформных преобразований. Изучена модификация фермионного сектора с учетом возможности таких преобразований для спинорных полей произвольного конформного веса. Для специального вида конформного фактора доказана лемма о факторизации, облегчающая задачу размерной редукции в фермионном секторе в произвольном порядке по малым параметрам конформного фактора.

В параграфе 2 произведена размерная редукция в массовом секторе фермионов. Данная процедура включает в себя интегрирование

конформно-модифицированного фермионного лагранжиана по внешним измерениям и унитарное вращение для эффективного устранения псевдоскалярных слагаемых.

Учет конформного преобразования в фермионном секторе приводит к появлению специфического добавка к массе фермионов (конформная массовая часть), определяемого конформным весом спинорного поля. Соотношение между собственной и конформной массами фермионов зависит от имеющихся в теории констант. Проанализированы условия на константы, при которых удастся избежать появления планковских масс. Кроме того, возможен вариант, когда масса спинорного поля оказывается целиком конформной. Данный механизм генерации масс можно рассматривать как геометрический аналог механизма Хиггса в стандартных калибровочных моделях. В рассматриваемой 8-мерной теории имеется возможность положить поле конформного фактора зависящим лишь от дополнительных координат.

В параграфе 3 исследована частичная размерная редукция 8-мерной теории сильных взаимодействий на 7-мерную теорию гравитации-электрослабых взаимодействий. Эта процедура сводится к выходу на эффективную гиперповерхность, возникающую при топологическом отождествлении пары калуцевских координат, и естественному переопределению полей и дифференциальных операторов с тем, чтобы получить соответствие с самостоятельным вариантом 7-мерной теории. По аналогии с 8-мерным случаем исследован массовый сектор фермионов и показано, что планковские массы эффективно устраняются.

Четвертая глава посвящена исследованию алгебраических аспектов описания взаимодействий в рамках реляционной теории пространства-времени, разрабатываемой в научной группе Ю.С.Владимирова и представляющей собой распространение идей геометрического подхода на класс бинарных геометрий.

В параграфе 1 кратко изложен математический аппарат реляционной теории. Базовым понятием является пара абстрактных множеств \mathcal{M}, \mathcal{N} , отвечающих исходному и конечному состояниям многочастичной системы в акте взаимодействия. Связь между этими множествами задается определенным классом комплексных отношений между их элементами. Вводятся понятия фундаментальной симметрии, ранга, элементарного базиса и финслеровых спиноров. Последние представляют собой обобщение картановских спиноров на случай пространств с финслеровыми (неквадратичными) метриками, естественным об-

разом возникающими в рамках бинарной геометрии. Элементарные частицы в такой теории в общем случае описываются мультиплетом финслеровых спиноров.

В параграфе 2 рассмотрена общая схема описания взаимодействий в реляционной теории. Строится *базовое отношение* – специальная антисимметричная форма, заданная на множествах с бинарной геометрией и трактуемая как прообраз лагранжиана взаимодействий, записанного в фоккер-фейнмановском представлении. Обобщенный принцип действия Фоккера–Фейнмана является звеном, через которое достигается соответствие реляционной теории со стандартной моделью.

Рассмотрена концепция обменного взаимодействия, аналогичная идее обмена виртуальными квантами в стандартной теории. Пространство состояний частицы вводится алгебраически на основе понятия пространства финслеровых 3-спиноров. Проанализирована наиболее общая функциональная связь между вводимыми классами состояний частиц.

В параграфе 3 произведена алгебраическая классификация различных каналов известных видов взаимодействий. Показано, что их можно связать с различными алгебраическими подтипами специальных комплексных матриц, характеризующих введенные классы состояний частиц.

Основные выводы и результаты работы

1. Сформулирована и решена задача алгебраической классификации систем отчета в ОТО. Показано, что различные системы отсчета, характеризующиеся тремя физико-геометрическими тензорами, могут быть отнесены к различным подтипам Петрова некоторой комплексной матрицы, построенной из компонент соответствующих тензоров.

2. Исследован фермионный сектор 8-мерной геометрической теории гравитации-сильных взаимодействий, причём основное внимание сосредоточено на анализе массовых слагаемых. Предложен механизм генерации масс фермионов с учетом возможности конформных вейлевских преобразований, использовавшихся ранее для перенормировки планковских масс в бозонном секторе теории.

3. Для специального вида конформного фактора доказана лемма о факторизации, облегчающая задачу размерной редукции в ферми-

онном секторе в произвольном порядке по малым параметрам конформного фактора для случаев спинорных полей произвольного конформного веса. Произведена редукция на 4-мерие. Найдены условия возникновения планковских масс в фермионном секторе 8-мерной теории. Получен ряд условий на константы теории, приводящих к перенормировке этих масс.

4. Проанализирована частичная размерная редукция в фермионном секторе 8-мерной модели грави-сильных взаимодействий. В рамках данной процедуры указан рецепт перехода к 7-мерной теории грави-сильных взаимодействий путем топологической склейки пары калуцевских координат и специального переопределения фермионных полей.

5. По аналогии с 8-мерным случаем исследован механизм генерации масс в фермионном секторе 7-мерной теории с учетом конформных преобразований. Показано, что при должном выборе констант планковские массы не возникают.

6. В рамках реляционного подхода произведена алгебраическая классификация различных каналов известных видов взаимодействий. Показано, что их можно соотнести с различными алгебраическими типами Петрова, характеризующими матричное представление элементов финслерова пространства состояний частиц.

Литература

- [1] *Болохов С.В., Владимиров Ю.С.* Алгебра сильных и электрослабых взаимодействий // *Изв. Вузов, Физика.* – 2004. – т.46, N. 4. – с.30-36.
- [2] *Bolokhov S.V., Vladimirov Yu.S.* An algebraic approach to the description of electroweak and strong interactions // *Grav. and Cosmol.* – 2003. – V.9, N1-2(33-34). – p. 113-118.
- [3] *Vladimirov Yu.S., Bolokhov S.V.* On the classification of Electromagnetic fields and reference frames in General Relativity // *Grav. and Cosmol.* – 2004. – V.10, N.1-2(37-38). – p. 71-77.
- [4] *Vladimirov Yu.S., Bolokhov S.V.* The mechanism of generating fermion masses in the 8-dimensional geometric theory // *General Rlativity and Gravitation.* – 2005. – V.37, N.12. – p.2227-2238.

- [5] *Bolokhov S.V.* Masses of fermions in the multidimensional Kaluza-Klein theories // Grav. and Cosmol., 2005, V.11, N.4(44), p.317-322.
- [6] *Болохов С.В., Владимиров Ю.С.* Алгебраический подход к объединению электрослабых и сильных взаимодействий // Сб. тезисов конф. "Ломоносовские чтения", секция "Физика". – Москва, Изд-во МГУ, 2002. – с.20-22.
- [7] *Болохов С.В., Владимиров Ю.С.* Алгебра фундаментальных взаимодействий // Сб. тезисов конф. "Ломоносовские чтения", секция "Физика". – Москва, Изд-во МГУ, 2003. – с.37-39.
- [8] *Болохов С.В.* Механизм генерации масс фермионов в 8-мерной геометрической теории // Сб. тезисов конф. "Ломоносовские чтения", секция "Физика". – Москва, Изд-во МГУ, 2005. – с.73-76.
- [9] *Bolokhov S.V., Vladimirov Yu.S.* Алгебраический подход к описанию электрослабых и сильных взаимодействий // Сб. тезисов международной конференции «Theoretical and experimental problems of General Relativity and Gravitation». – Томск, 2002. – с.18-20.
- [10] *С.В.Болохов* Массы фермионов в 8- и 7-мерной геометрической теориях // Сб. тезисов международной конференции по гравитации, космологии и астрофизике GR-12. – Казань, 2005. – с.135-137.
- [11] *С.В.Болохов* Массы частиц в объединенных теориях взаимодействий // Сб. тезисов международной конференции по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодинамике, посвящ. 90-летию со дня рождения К.П.Станюковича. – 2006, Москва, Изд-во РУДН. – с.24.