

На правах рукописи

Клевцов Семен Евгениевич

D-БРАНЫ И ЛИНЕЙНЫЙ ДИЛАТОН: НОВЫЕ МОДЕЛИ

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Гальцов Дмитрий Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник НИИЯФ МГУ
Волобуев Игорь Павлович

кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник МИАН им. В.А.Стеклова,
Кошелев Алексей Сергеевич

Ведущая организация: Объединенный Институт Ядерных Исследований,
г.Дубна

Защита состоится "14" декабря 2006 г. в 16 час. на Специализированном Совете К.501.001.17 при Московском Государственном Университете им. М.В.Ломоносова (119992, г. Москва, Воробьевы горы, физический факультет, ауд. СФА).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан " " ноября 2006г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета К.501.001.17
д.ф.-м.н.

П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена анализу общих решений уравнений супергравитации для гипербран, построению гипербран на фоне линейного дилатона, а также изучению модели струнной теории поля в присутствии D-бран и построению представлений квантовых аффинных алгебр в двумерной конформной теории поля с линейным дилатоном.

Актуальность проблемы обусловлена развитием объединенной теории фундаментальных взаимодействий на основе теории суперструн и М-теории. Результаты последнего десятилетия показали, что важную роль в непертурбативных аспектах теории суперструн играют многомерные протяженные объекты - D-браны (гипербраны). Низкоэнергетическим описанием D-бран являются решения классических уравнений супергравитации солитонного типа. На данный момент известно несколько классов таких решений, однако полная классификация до последнего времени отсутствовала. В связи с этим задача получения более полных решений, в частности методом явного интегрирования уравнений движения представляет значительный интерес для дальнейшего развития теории суперструн, а также теорий супергравитации. Особый интерес в контексте обобщений непертурбативного соответствия теории струн на пространстве $AdS_5 \times S^5$ и конформной теории поля на границе, представляют также гипербранные решения на фоне линейного дилатона. Гипербраны коразмерности один (доменные стенки) используются в космологических моделях, а также в моделях с большими дополнительными измерениями. Интересны также решения для инстантонов, ответственных за различные непертурбативные эффекты в теории струн.

Проблема непертурбативной формулировки теории струн является на данный момент одной из наиболее важных для развития теории. Одним из подходов является струнная теория поля. Существующая формулировка струнной теории поля приспособлена к граничным условиям Неймана на концах струны и таким образом не является независимой от выбора граничных условий (background independent). Поэтому возникает вопрос о поиске более общей формулировки струнной теории поля, допускающей

выбор произвольных граничных условий. В качестве первого шага в этом направлении возникает задача построения струнной теории поля с граничными условиями Дирихле, т.е. теории на фоне нескольких D-бран. Данная задача мотивирована также изучением возможной роли D-бран в струнной теории поля. Действительно, в рамках струнной теории поля естественным образом решается задача о вычислении приближенных низкоэнергетических лагранжианов для низколежащих состояний струны. Как известно, теория струн на стопке D-бран в низкоэнергетическом пределе является теорией Янга-Миллса, что может быть проверено с определенной точностью в рамках предложенной модели струнной теории поля.

Прогресс в теории струн, квантовой теории поля и статистической физике в последние десятилетия был во многом связан с применением методов двумерной конформной теории поля. Благодаря большой группе симметрий многие модели конформной теории поля являются точно решаемыми. Одним из проявлений интегрируемости является тесная связь конформных теорий с теорией представлений алгебр Каца-Мууди и квантовых групп. В частности, известно, что алгебры вершинных операторов в конформной теории поля с линейным дилатоном (теории свободных полей с фоновым зарядом) реализуют представления квантово-деформированных алгебр Ли. Доказательство этого факта, состоящее в проверке выполнения квантовых соотношений Серра, отсутствовало даже в случае конечномерных алгебр $U_q(sl_n)$. Представляет интерес также обобщение этой конструкции на случай аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$.

Целью диссертационного исследования является построение общих решений для p -бран, доменных стенок и D-инстантонов в системе взаимодействующих поля p -формы, дилатона и гравитации; изучение асимптотически плоских решений, обладающих регулярным горизонтом; изучение асимптотически неплоских решений с асимптотически растущим дилатоном, построение модели струнной теории поля на фоне нескольких D-бран и вычисление в ней низкоэнергетического действия для полей на D-бранах, а также построение представления квантовых аффинных алгебр вершинными операторами в модели конформной теории поля с линейным

дилатоном и доказательство квантовых соотношений Серра для конечномерных и аффинных вертекс-операторных алгебр. В работе использованы в основном аналитические методы.

Научная новизна. В работе построено общее решение уравнений супергравитации, соответствующее гипербране, инстантону и доменной стенке, выявлены новые классы асимптотически несингулярных решений с регулярным горизонтом событий, в частности с асимптотикой линейного дилатона, что представляет интерес для понимания пространственно-протяженных объектов в супергравитации и теории суперструн. Впервые рассмотрена модель струнной теории поля на фоне D-бран в исследована структура низкоэнергетического действия в этой модели. Построены реализации верхнетреугольных подалгебр $U_q(sl_n)$ и $U_q(\widehat{sl}_2)$ вершинными операторами в конформной теории поля с фоновым зарядом. Доказаны квантовые соотношения Серра для соответствующих квантовых алгебр, в аффинном случае получены явные формулы для генераторов, соответствующих старшим корням. Результат представляет интерес для изучения вертексных алгебр в двумерных моделях конформной теории поля.

Научная и практическая ценность работы. В данной диссертационной работе содержится ряд результатов, обладающих несомненной научной новизной и имеющих существенное значение для понимания физики D-бран, доменных стенок и инстантонов в супергравитации, теории суперструн и струнной теории поля, а также алгебр вершинных операторов в конформной теории поля.

Результаты могут быть использованы в НИИЯФ МГУ, ИЯИ, ЛТФ ОИЯИ, ФИАН, ИТЭФ, МИАН, ТГУ и других научных центрах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на конференциях "Ломоносовские чтения" (Москва, 2002г.), "Particles, Fields and Strings", (Ванкувер, Канада, 2001 г.), "Progress in Strings, Fields and Particle Theory" (Каржез, Франция, 2002г.) а также на семинарах ИТ-

ЭФ, кафедры теоретической физики МГУ, математического института им. Стеклова.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения и списка цитируемой литературы. Текст диссертации набран в издательской системе L^AT_EX.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе I “Введение” обсуждается роль гипербран (D-бран, p -бран) в современной теоретической физике, в частности в теории суперструн и супергравитации. Теория суперструн является одним из кандидатов на роль объединенной теории фундаментальных взаимодействий и теории квантовой гравитации. Следует отметить, что понимание теории на данный момент не является полным и завершенным. В частности, результаты, полученные на протяжении последнего десятилетия показали, что наряду с одномерными протяженными объектами - струнами - в теорию необходимо на равных основаниях включить также многомерные протяженные объекты - D-браны. С точки зрения мировой поверхности струны они возникают как D -мерные поверхности на границе, к которым крепятся концы струны (D-браны, от граничных условий Дирихле). В десятимерных низкоэнергетических теориях супергравитации гипербраны появляются как солитонные решения уравнений движения, описывающие многомерные поверхности и обладающие зарядом по отношению к полю формы (гравитационные p -браны). С точки зрения теории суперструн особый интерес представляют БПС гипербраны - объекты, сохраняющие определенное количество суперсимметрий. Они возникают из M-теории (11-мерной непертурбативной теории, объединяющей различные десятимерные теории суперструн) в результате редукции дополнительного измерения. Существуют также черные p -браны, являющиеся многомерным аналогом решения черной дыры.

Они представляют интерес для различных обобщений AdS/CFT соответствия (голографического соответствия теории суперструн в пространстве $AdS_5 \times S^5$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, живущей на границе этого пространства). Другой важной особенностью гипербран является тот факт, что они естественным образом содержат матричные степени свободы. В частности, известна тесная связь между теориями, содержащими D-браны, и неабелевыми калибровочными теориями.

Принимая во внимание важность гипербран в супергравитации и теории струн, особый интерес вызывает задача построения p -бранных решений в различных супергравитациях в размерности $4 \leq d \leq 11$. Такие решения представляют собой p -мерное плоское подпространство с $ISO(p) \times R$ симметрией мирового объема (где R соответствует времени), обладающее некоторым натяжением, несущее заряд по полю полиформы и содержащее также нетривиальный дилатон. С физической точки зрения интересно рассматривать асимптотически несингулярные (в частности, асимптотически плоские) решения, обладающие регулярным горизонтом событий в дополнительных измерениях. Трансверсальное пространство обычно выбирается в виде пространства постоянной кривизны. Черная дыра таким образом является 0-браной со сферическим трансверсальным пространством. Симметрия $ISO(p) \times R$ дополняется до полной $ISO(p, 1)$ симметрии в случае экстремальной БПС браны (что в случае черной дыры соответствует решению Рейсснера-Нордстрема с массой, равной заряду).

Долгое время считалось, что решение для одиночной статической заряженной по полю формы p -браны, зависит от двух параметров - массы и заряда, что вообще говоря не является очевидным с точки зрения решения конкретных дифференциальных уравнений. Первоначально гравитационное решение для браны не удавалось получить в общем виде, ограниченным лишь описанной выше симметрией. Черное и БПС-решения выводились из специального анзаца, более узкого, чем позволяет наложенная симметрия. Поэтому априори не было ясно, существует ли более общее решение и сколько параметров такое решение может содержать. В 1999 г. Zhou и Zhu впервые явно проинтегрировали уравнения движения для статической p -браны и построили семейство p -бранных решений со сферически-

симметричным трансверсальным пространством и $ISO(p) \times R$ симметрией мирового объема, зависящее от четырех параметров. В последствии была предложена интерпретация этих решений, согласно которой дополнительные параметры отвечали за тахионную конденсацию в системе брана-антибрана.

Однако, в связи с запутанностью метода интегрирования и ненадежностью интерпретации дополнительных параметров, эти результаты вызвали определенные сомнения. В связи с этим была поставлена задача разработки более эффективного и прозрачного метода интегрирования, получения наиболее общих решений уравнений p -браны (в том числе в случае более общего анзаца) и выделения из общего решения физически осмысленных конфигураций, а именно асимптотически несингулярных решений, удовлетворяющих принципу космической цензуры (все сингулярности скрыты горизонтом) и обладающих регулярным горизонтом событий. Оказалось, что эти требования значительно сужают пространство параметров наиболее общего решения. В частности, можно показать, что решение Zhou и Zhu содержит голые сингулярности. Накладывая дополнительно условия, вытекающие из требования наличия регулярного горизонта, можно показать, что данные решения сводятся к известному решению для черной браны.

Также было выявлено, что общее решение содержит дополнительную ветвь, соответствующую гипербране на фоне линейного дилатона. Решения подобного типа играют важную роль в различных обобщениях AdS/CFT соответствия. Разработанный метод явного интегрирования уравнений движения также может быть применен для нахождения общего решения в случаях доменной стенки и D-инстантона (D(-1)-браны). Доменные стенки (p -браны коразмерности один) важны для построения обобщений AdS/CFT соответствия на случай квантовой теории поля с меньшим количеством суперсимметрий. D-инстантоны ответственны за различные непертурбативные эффекты в теории суперструн.

Одной из возможных непертурбативных формулировок теории струн является струнная теория поля. Она основана на представлении состояний струны в виде функционалов на отрезке, для которых вводится дей-

стве Черна-Саймонса. Существующая формулировка струнной теории поля приспособлена к струнам с граничными условиями Неймана. В связи с открытием D-бран стало ясно, что в теорию на равных основаниях должна быть включена возможность выбора граничных условия Дирихле. Поэтому, вообще говоря, следует построить формализм струнной теории поля, в котором был бы заложен произвол в выборе граничных условий, присутствующий в теории струн изначально. Первым шагом в этом направлении является задача построения струнной теории поля в присутствии D-бран и извлечения низкоэнергетической теории на стопке из N D-инстантонов (теории Янга-Миллса с группой $U(N)$)

В случае линейной зависимости дилатона от радиальной координаты, некоторые гипербраны (например NS5 брана) имеют описание в терминах конформной теории поля с линейным дилатоном на мировой поверхности (часто эта теория также называется двумерным кулоновским газом или конформной теорией поля с фоновым зарядом). Тензор энергии-импульса данной теории содержит член, пропорциональный второй производной поля. Эта модель конформной теории поля важна для полевого представления минимальных моделей конформной теории поля, используется в двумерной квантовой гравитации (теории Лиувилля), а также в вертекс-операторных конструкциях алгебр Каца-Муди и квантовых групп. Связь вершинных операторов в теории с фоновым зарядом с теорией представлений квантово-деформированных алгебр была обнаружена в начале 90-х и изучена в простейших случаях. В общем случае рассматривается теория n свободных полей, компактифицированных на тор, соответствующий решетке корней алгебры Ли. Аффинные алгебры получаются, когда одно из направлений в пространстве импульсов светоподобно. Далее в теории изучаются поля размерности один, представляемые в виде вершинных операторов определенного вида - каждый оператор соответствует простому корню алгебры Ли. Из-за наличия нетривиального фонового заряда коммутационные соотношения деформируются (независимо для верхне- и нижнетреугольных борелевских подалгебр) и алгебра вершинных операторов становится квантовой группой. При этом нетривиальным фактом, доказательство которого отсутствовало даже в случае конечномерных алгебр,

является выполнение квантовых соотношений Серра. Эта задача решается в данной работе.

Во второй главе "Исследование полного решения уравнений черной p -браны" рассматривается теория гравитации, взаимодействующей с полем q -формы и дилатоном с действием

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2 q!} e^{a\phi} F_{[q]}^2 \right), \quad (1)$$

и строятся решения для черных p -бран с метрикой вида

$$ds^2 = - e^{2B} dt^2 + e^{2D} (dx_1^2 + \dots + dx_p^2) + e^{2A} dr^2 + e^{2C} d\Sigma_{k,\sigma}^2 + e^{2E} (dy_1^2 + \dots + dy_{q-k}^2), \quad (2)$$

где $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ и $E(r)$ - неизвестные функции радиальной переменной. Трансверсальное к мировому объему браны q -мерное пространство таким образом имеет вид $\Sigma_{k,\sigma} \times \mathbb{R}^{q-k}$ ($p + q = d - 2$). Пространство $\Sigma_{k,\sigma}$ при $\sigma = 0, +1, -1$ является k -мерным пространством постоянной кривизны - плоским пространством, сферой и гиперболическим пространством соответственно

В части 2.1 уравнения движения приводятся к виду, удобному для интегрирования. В части 2.2 строится общее решения уравнений движения для данного анзаца. Оно содержит семь независимых произвольных параметров. При этом асимптотически плоские решения существуют лишь в случае сферического пространства $\Sigma_{k,\sigma}$. В части 2.3 изучается структура особых точек решения (возможных сингулярностей, горизонтов и асимптотически плоских областей), в результате чего выделяются две ветви пространства асимптотически несингулярных решений, обладающих регулярным горизонтом событий. В части 2.4 рассмотрена первая ветвь решения, соответствующая черной p -бране. Вторая ветвь, изученная в части 2.5, соответствует черной p -бране на фоне линейного дилатона. В обоих случаях решение зависит от трех параметров - массы, заряда, и значения дилатона на бесконечности. Для решений получены выражения для АДМ-массы и проверено выполнение первого закона термодинамики для p -бран.

В части 2.6 построено общее решение уравнений движения в случае доменной стенки. Решения для доменной стенки не могут быть получены в

пределе из решений p -браны, и требуют отдельного интегрирования. В этом случае также получены две ветви решений, одно из которых соответствует стандартному решению для доменной стенки. Второй тип решения обладает горизонтом событий и отвечает таким образом черной доменной стенке с асимптотически линейным дилатоном. В части 2.7 рассматривается связь полученных решений с ранее известными решениями для p -бран.

В главе III “Решение для инстантона в супергравитации” рассматривается случай $p = -1$ -браны, соответствующий D-инстантону. В этом случае, как и в случае доменной стенки, уравнения движения также отличаются от уравнений для p -браны и должны быть проинтегрированы отдельно. В части 3.1 для анзаца, соответствующего D-инстантону с цилиндрическим трансверсальным пространством $\Sigma_{k,\sigma} \times \mathbb{R}_{q-k}$:

$$ds^2 = e^{2A} dr^2 + e^{2C} d\Sigma_{k,\sigma}^2 + e^{2E} (dy_1^2 + \dots + dy_{q-k}^2), \quad (3)$$

производится интегрирование уравнений движения и строится общее решение. В результате анализа особых точек решения строятся два типа асимптотически плоских решений, одно из которых соответствует БПС решению, размазанному по дополнительным цилиндрическим направлениям. Второй тип решения, построенный в части 3.2, обобщает ранее известное решение для неэкстремального инстантона, и содержит четыре независимых параметра. В части 3.3 вычислено действие на этом решении и показано, что оно является конечным при компактификации дополнительных цилиндрических измерений на тор.

Глава IV “Браны в струнной теории поля” посвящена задаче построения струнной теории поля с граничными условиями Дирихле, т.е. теории на фоне нескольких D-бран, и вывода в определенном приближении низкоэнергетического действия на стопке N D-инстантонов ($D = -1$ бран). В части 4.1 представлен обзор формализма струнной теории поля. В параграфе 4.4.1 выписывается действие теории, обсуждается связь струнной теории поля с D-бранами и задача вывода низкоэнергетических теорий из струнной теории поля. В п. 4.4.2 описывается связь с некоммутативной геометрией, определяется умножение струнных полей и аналог дифференциального оператора (БРСТ оператор). Существует несколько формализмов для вычислений в струнной теории поля. Формализм операторов на фо-

ковском пространстве струны описан в п. 4.4.3, операторов на половинках струн - в п. 4.4.4 и конформной теории поля - в п. 4.4.5. В п. 4.4.6 приведен краткий обзор решения струнных уравнений движения, соответствующего D-бране ("сливер").

В части 4.2 вводится действие для струнной теории поля на D-бранах. При этом используется формализм конформной теории поля, в котором D-брана соответствует вставке на границу вершинного оператора, меняющего граничные условия (описанного в п. 4.2.1). В п. 4.2.2 выписывается действие в виде суммы корреляторов в конформной теории поля. В п. 4.2.3 описано вычисление приближенной низкоэнергетической теории для полей, соответствующих флуктуациям координат N D-инстантонов, из действия струнной теории поля. Струнное поле можно разложить по базису в пространстве Фока, порождающему бесконечный набор состояний. При этом поле будет суперпозицией состояний различного уровня и массы. Для получения приближенного низкоэнергетического лагранжиана для низколежащих возбуждений (в данном случае для полей на уровне 1), используется приближение, в котором отсекаются все состояния струнного поля выше второго уровня, по оставшимся массивным полям производится интегрирование. В п. 4.2.3 приведено выражение для полученного действия в случае N несовпадающих D-инстантонов и замечено, что получающиеся в нем структуры совпадают с действием Янга-Миллса вплоть до кубических по полям членов.

В главе V "Вертекс-операторная конструкция квантовых аффинных алгебр" рассмотрено построение квантовых борелевских подалгебр конечномерных и аффинных алгебр в теории свободных полей $\varphi^i, i = 1, \dots, n$ с действием

$$S = \int d^2z (\partial\varphi^i \bar{\partial}\varphi^i + i\alpha_0 R \rho^i \varphi^i), \quad (4)$$

где R - двумерная кривизна фоновой метрики, α_0 - экранирующий заряд и ρ^i - некоторый постоянный вектор. Пусть φ^i принимают значения на некотором торе. Решетка корней, соответствующая тору, порождает некоторую алгебру Ли g . Вершинные операторы конформной размерности 1 в этой теории удовлетворяют соотношениям универсальной обертывающей $U_q(n_+)$, где n_+ - верхнетреугольная часть разложения Картана $g =$

$n_- \oplus \mathfrak{h} \oplus n_+$, с некоторым параметром деформации $q = q_+$. Для доказательства этого факта необходимо проверить выполнение соответствующих квантовых соотношений Серра. В части 5.2 описано представление $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ вершинными операторами и в части 5.3 доказаны квантовые соотношения Серра в этом случае

$$[E_\alpha, [E_\alpha, E_\beta]_{q^{-1}}]_q = 0; \quad (5)$$

здесь E_α, E_β - операторы, соответствующие простым корням. Данное доказательство тривиально обобщается на случай $U_q(\mathfrak{sl}_n)$. Также показано, что в пределе нулевого фонового заряда данная конструкция переходит в известную вертекс-операторную конструкцию Каца-Френкеля-Сегала для бозонной струны. В части 5.4 приведено обобщение данной конструкции на случай афинной квантовой группы $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ и доказаны соответствующие квантовые соотношения Серра

$$[E_1, [E_1, [E_1, E_0]_{q^2}]]_{q^{-2}} = 0, \quad (6)$$

где E_0, E_1 - вершинные операторы, соответствующие простым корням. Также приведены формулы для некоторых генераторов в афинном случае.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Получено общее решение уравнений супергравитации для p -браны с цилиндрической симметрией внешнего пространства. Показано, что пространство решений с регулярным горизонтом событий содержит два типа решений - стандартное асимптотически плоское решение для черной браны и решение для черной браны с линейным дилатоном.
2. Построено новое решение для D-инстантона, делокализованного в части дополнительных измерений. Показано, что решение обладает конечным действием при компактификации дополнительных измерений на тор.
3. Построена модель струнной теории поля на фоне нескольких несопадающих D-инстантонов. Из предложенной модели в первом приближении вычислено низкоэнергетическое эффективное действие для полей, соответствующих флуктуациям координат D-инстантонов. Полученное действие с точностью до членов третьего порядка совпадает с редуцированным действием Янга-Миллса.
4. Доказано, что в моделях конформной теории поля с линейным дилатоном алгебры вершинных операторов реализуют представления верхнетреугольных подалгебр квантовых алгебр $U_q(sl_n)$. Доказаны соответствующие квантовые соотношения Серра.
5. Построено обобщение модели конформной теории поля с линейным дилатоном, для которого алгебра вершинных операторов реализует представление аффинной квантовой алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Доказано квантовое соотношение Серра и получены явные формулы для генераторов, соответствующих старшим корням.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. *D. Gal'tsov, S. Klevtsov, D. Orlov, G. Clement.* More on general p-brane solutions. // *Int. J. Mod. Phys. A* – 2006. – v. 21 – p.3575–3604, [arXiv:hep-th/0508070].
2. *Д. В. Гальцов, С. Е. Клевцов, Д. Г. Орлов.* Цилиндрические D-инстантоны. // *Гравитация и Космология* – 2005. – т.11 – с.30-36.
3. *Д. В. Гальцов, С. Е. Клевцов, Д. Г. Орлов.* D-инстантоны и супергравитационные доменные стены, пересмотр. // Сб. тезисов Международной конф. по теоретической физике. – Москва, ФИАН – 2005. – с.15.
4. *S. Klevtsov.* Yang-Mills Theory from String Field Theory on D-branes. // Proceedings of EC Summer School "Progress in Strings, Fields and Particle Theory", Cargese. – NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, Progress in String, Field and Particle Theory, Kluwer – 2003. – v.104 – p.425-428.
5. *S. Klevtsov.* On vertex operator construction of quantum affine algebras. // Препринт ИТЭФ – ИТЭР-ТН-38-01, [arXiv:hep-th/0110088].
6. *С. Клевцов.* Конформная теория поля, вертексные алгебры и квантовые группы. // Сб. тезисов конф. "Ломоносовские чтения", секция "Физика". – Москва, Изд-во МГУ – 2002.