

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Новицкий Денис Михайлович

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА
ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ
НА ОСНОВЕ ДАТЧИКОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2006 г.

Работа выполнена на кафедре компьютерных методов физики Физического факультета Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Ю.П.Пытьев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Л. Г. Деденко
доктор физико-математических наук,
профессор М. И. Киселев

Ведущая организация: Московский Энергетический Институт

Защита состоится «____» _____ 2006 г. в _____ на заседании Диссертационного Совета К 501.001.17 при Московском Государственном Университете им.М.В.Ломоносова (г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, ауд._____).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического факультета МГУ.

Автореферат разослан «____» _____ 2006 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета К 501.001.17
д.ф.-м.н., профессор

П. А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

За последнее время значительно увеличилась роль компьютера в решении задач интерпретации данных измерений. Для оптимизации характеристик датчиков, используемых в процессе измерений, все чаще используются возможности вычислительной техники.

Измерительным преобразователем (ИП), или датчиком, называется прибор, преобразующий внешнее воздействие той или иной физической природы в электрический сигнал. Измерительные преобразователи составляют основу всех измерительных средств. В работе рассматриваются линейные измерительные преобразователи, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями и называются измерительными преобразователями с сосредоточенными параметрами, когда речь идет об обыкновенных дифференциальных уравнениях, или измерительными преобразователями с распределенными параметрами в случае уравнений в частных производных.

Электрический сигнал, полученный на выходе ИП, может быть оцифрован и подвргнут математической обработке в вычислительном преобразователе (ВП). Основное преимущество использования ВП – возможность реализовать принципиально новый подход, согласно которому ИП и ВП рассматриваются вместе как единый прибор, измерительно-вычислительный преобразователь (ИВП), выполняющий функции средства измерений с существенно более широкими возможностями, чем ИП как таковой [Пытьев, 2004]¹. Реально это означает, что качественные измерения без использования ВП, как правило, невозможны не только из-за технологических трудностей, но и в силу фундаментальных физических запретов и ограничений.

Как известно [Пытьев, 1989]², [Пытьев, 1990]³, характеристики измерительной компоненты ИВС, обеспечивающие наивысшее качество измерительно-вычислительной системы как средства измерения, вообще говоря, не совпадают с характеристиками, обеспечивающими наивысшее качество измерительной компоненты как средства измерения. Действительно, качество измерительной аппаратуры определяется физическими законами и процессами, лежащими в основе ее функционирования. Однако если критерием качества измерительной компоненты является точность интерпретации измерений на соответствующей ИВС, решающую роль начинают играть характеристики математической модели процесса измерения и оптимальный для этой модели алгоритм функционирования вычислительной компоненты, который обеспечивает максимальную в своем классе точность интерпретации измерений на ИВС. Постановка задачи наиболее точной интерпретации измерения и ее решение основываются, таким образом, на математических моделях метода измерения и интерпретации измерения.

¹Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. – М.: 2004. – 400 с.

²Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высш. шк., 1989. – 351 с.

³Пытьев Ю.П. Методы анализа и интерпретации эксперимента, – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 288 с.

Для достаточно широкого класса линейных и нелинейных моделей получены теоремы, гарантирующие существование и единственность таких решений, которые в теории ИВС называются *редукцией измерения* [Пытьев, 1989], [Пытьев, 1990]. Погрешность редукции определяет точность интерпретации измерений на ИВС и, следовательно, качество ИВС как средства измерений – чем меньше погрешность редукции, тем выше качество ИВС.

Теория ИВС позволяет решать задачу оптимального синтеза измерительной компоненты, специально предназначенной для работы в составе ИВС и обеспечивающей максимальное качество ИВС как средства измерений [Пытьев, 2004]. Для проектирования измерительной аппаратуры, которую предполагается использовать в качестве измерительной компоненты ИВС, существен ответ на вопрос о том, при каких значениях параметров погрешность интерпретации измерения на ИВС (при прочих равных условиях) будет минимальна, иными словами, каково предельное качество ИВС как средства измерения. В связи с этим представляет интерес исследование зависимости величины погрешности редукции от параметров измерительной аппаратуры. Например, в [Соболев]⁴ исследуется зависимость качества ИВС (для стохастической модели) как оптического телескопа сверхвысокого разрешения от параметров многоапертурного оптического телескопа, используемого как измерительная компонента этой ИВС; в [Задорожный, 1991]⁵ рассматривается ИВС на основе оптического сканирующего микроскопа. Для стохастических моделей редукции зависимость погрешности редукции от параметров датчика исследована в работах [Волков, 2000]⁶ и [Пытьев, 2004]. Вопросы качества ИВС на основе датчиков с сосредоточенными параметрами для случая стохастической модели также рассмотрены в [Бондаренко, 1993]⁷. В работах [Журавлев, 1987]⁸, [Жохов, 1991]⁹ рассмотрены задачи выбора оптимальных параметров датчика, реализующих предельные возможности ИВС как средства измерения.

Среди всех рассмотренных публикаций не удалось обнаружить других подходов к построению теории ИВС, кроме изложенных в [Пытьев, 1990].

Основной целью диссертации является изучение проблемы оптимального синтеза ИВП, т.е. нахождения таких параметров ИВП, которые гарантировали бы максимальную точность интерпретации измерений (т.е. минимальную погрешность редукции).

⁴Соболев К.С., Чуличков А.И., Пытьев Ю.П. Многоапертурный телескоп. Сравнительный анализ алгоритмов сверхразрешения. // Pattern Recognition and Image Analysis, в печати.

⁵С.С. Задорожный, Ю.П. Пытьев. Измерительно-вычислительная система на базе оптического сканирующего микроскопа. // Математическое моделирование. – 1991. – т. 3, № 8. – с. 53–62.

⁶Б.И.Волков, Ю.П.Пытьев. Измерительно-вычислительные преобразователи. // Датчики и системы. – 2000. – № 6 (15). – с. 17–23.

⁷Бондаренко С.П., Пытьев Ю.П., Сердобольская М.Л. О предельных возможностях измерительно-вычислительной системы как измерительного прибора. // Математическое моделирование. – 1993. – т. 3, № 9. – с. 43–54.

⁸Журавлев О.В. и др. О предельных возможностях измерительных преобразователей второго порядка. – ЖВМиМФ. – 1987. – т. 27, № 6. – с. 985 – 989.

⁹Жохов Н.Н., Козлов А.А., Пытьев Ю.П. О предельных возможностях параметрических измерительных преобразователей второго порядка с сосредоточенными параметрами. // Математическое моделирование. – 1991. – т. 3, № 7. – с. 57–70.

Эта задача рассматривается для интервальной модели редукции; также проводится сравнение полученных результатов с аналогичными для стохастической и теоретико-возможностной моделей редукции.

В диссертации впервые исследуются вопросы оптимального синтеза ИВП на основе датчиков с сосредоточенными параметрами, гарантирующих максимально возможную точность интерпретации измерений, для интервальных моделей редукции. Для нескольких вариантов вычисления погрешности интервальной редукции, а именно, (а) для случая, когда важна пиковая величина ошибки, и (б) когда важно ее среднее значение за некоторый промежуток времени, в диссертации получены следующие результаты:

1. решены задачи оптимального синтеза ИВП на основе датчиков первого и второго порядков;
2. показано, что требования к параметрам ИП, обеспечивающие максимальную точность измерения на ИВП, противоречат тем, которые обеспечивают максимальную точность измерения на ИП как таковом, без использования ВП; это утверждение совпадает с выводом, следующим из аналогичных расчетов для стохастической редукции, см. [Пытьев, 1989], [Волков, 2000].

Результаты для интервальной модели сравнивались с полученными для стохастической и теоретико-возможностной моделей:

1. для интервальной, стохастической и теоретико-возможностной моделей решены задачи оптимального синтеза ИВП на основе датчика первого порядка при одном фиксированном параметре;
2. для датчика первого порядка исследованы зависимости минимальных по одному из параметров значений погрешности от величины второго параметра этого датчика; показано, что для различных моделей эти зависимости имеют схожие тенденции;
3. показано, что для датчика первого порядка существует некоторое множество значений параметров, которым для всех трех моделей соответствуют значения погрешностей, мало отличающиеся от оптимальных (т.е. минимальных по одному параметру при фиксированном втором); это позволяет выработать единые рекомендации для проектирования измерительной компоненты ИВП; исследователь, таким образом, может выбирать модель исходя лишь из характера имеющейся в его распоряжении информации о шуме и входном сигнале.

Качественные измерения без использования ВП, как правило, невозможны не только из-за технологических трудностей, но и в силу фундаментальных физических запретов и ограничений [Пытьев, 2004]. Например, на выходе ИВП можно получить наиболее точную оценку пространственно-временного распределения температуры объекта, измеряя его температуру в некоторые моменты времени в нескольких точках.

Более того, это будет распределение, свойственное естественному состоянию объекта, которое не искажено помещенными на нем датчиками температуры. ИВП позволяет компенсировать возмущения, вносимые датчиками при измерении, скорректировать искажения самих датчиков и определять температуру объекта в тех точках, где датчиков нет, и в те моменты времени, когда температура не измеряется.

В диссертации рассмотрена задача синтеза ИВП на основе датчика температуры с распределенными параметрами. В рамках этого направления получены следующие результаты:

1. решены задачи оптимального синтеза ИВП на основе датчика с распределенными параметрами для измерения временного и пространственного распределений плотности источников;
2. получены зависимости погрешностей для различных граничных условий; сравнение этих зависимостей позволяет сделать вывод о том, что величины погрешностей могут заметно различаться даже при небольшом изменении параметров граничных условий;
3. на примере одной задачи для уравнения теплопроводности проведено сравнение интервальной редукции с методами классической теории некорректных задач.

Цель работы.

Целью диссертационной работы является:

для ИВП на основе датчиков с сосредоточенными (первого и второго порядков) и распределенными параметрами, для интервальной модели редукции измерений:

1. исследование зависимостей погрешности редукции от параметров датчиков первого и второго порядков;
2. разработка программного комплекса для решения (на основе результатов теоретических исследований либо численно) задач редукции;
3. нахождение с его помощью предельных характеристик ИВП, а также значений параметров датчиков, при которых эти характеристики достигаются.

для ИВП на основе датчиков первого порядка:

1. разработка программного комплекса для
 - решения задач редукции для интервальной, стохастической и теоретико-возможностной моделей;
 - исследования зависимостей погрешностей редукций от параметров датчика для перечисленных моделей;
 - оптимального синтеза ИВП на основе датчика для каждой модели;

2. сравнение полученных результатов между собой; сравнение множеств параметров датчика, являющихся оптимальными (в смысле минимальности соответствующих погрешностей) для каждого из методов; на основании результатов сравнения формулировка единых рекомендаций для оптимального синтеза ИВП;

Методы исследования.

Теоретическая часть работы выполнена с использованием методов интервальной математики, функционального анализа, теории дифференциальных операторов, математических методов редукции измерений, математической статистики, теории вероятностей, теории возможностей. Численные эксперименты реализованы с использованием симплекс-метода для решения задач линейного программирования, а также составленных на базе платформы Matlab программ.

Научная новизна.

Работа является дальнейшим развитием исследований, выполненных на кафедре компьютерных методов физики под руководством заведующего кафедрой профессора Ю.П. Пытьева (физический факультет МГУ). Новизна результатов заключается в следующем:

1. впервые исследованы зависимости погрешностей интервальной редукции для ИВП на основе датчиков с сосредоточенными (первого и второго порядков) и распределенными параметрами от значений параметров датчиков; получены численно-аналитические оценки погрешности интервальной редукции;
2. разработан программный комплекс для решения задач интервальной редукции;
3. получены предельные характеристики ИВП на основе датчика первого порядка для случая, когда значение одного из его параметров фиксировано;
4. проведено сравнение полученных результатов с аналогичными для стохастической и теоретико-возможностной моделей; показано, что эти предельные характеристики достигаются при близких для всех рассмотренных моделей значениях параметров датчика, что в свою очередь позволяет сформулировать единые для всех трех моделей рекомендации для оптимального синтеза ИВП на основе датчика первого порядка.

Практическая значимость.

Практическая ценность полученных в диссертации теоретических результатов заключается в том, что они предоставляют исследователю основу инструментария для оптимального синтеза ИВП на базе датчиков первого и второго порядков. Приведенные в диссертации результаты позволяют сформулировать единые для интервальной,

стохастической и теоретико-возможностной моделей рекомендации по оптимальному синтезу ИВП на основе этих датчиков, под которым в данном случае понимается выбор таких значений параметров датчиков, которые обеспечивают наивысшую точность ИВП как средства измерений.

Датчики первого порядка с сосредоточенными параметрами широко используются для измерения угла поворота, влажности газов, скорости потока, температуры, давления, к ним относятся некоторые виды расходомеров.

Научная обоснованность и достоверность.

Достоверность полученных теоретических результатов обоснована корректным применением использованных математических методов.

Достоверность прикладных результатов обеспечивается возможностью проверки адекватности использованных математических моделей данным “измерений” (полученным посредством моделирования реального эксперимента) в том смысле, что эти данные не противоречат модели и допускают оценивание входного сигнала с ее помощью. Методы проверки адекватности моделей даны в теории ИВС [Пытьев, 2004].

Основные положения, выносимые на защиту.

1. методы численно-аналитического оценивания гарантированной точности измерений на ИВП для интервальной модели в случае обратимой матрицы оператора прибора;
2. прикладные методы оптимального синтеза ИВП на основе датчиков первого и второго порядков общего назначения, а также для оптимального синтеза ИВП на основе датчика температуры с распределенными параметрами для измерения временного и пространственного распределений плотности тепловых источников;
3. метод сравнительного анализа предельного качества ИВП на основе датчика первого порядка для интервальной, стохастической и теоретико-возможностной моделей;
4. комплекс алгоритмов и программ для решения задач оптимального синтеза ИВП на основе параметрических датчиков;

Апробация работы.

Отдельные законченные этапы работы докладывались на 8-й Всероссийской конференции “Состояние и проблемы измерений” (Москва, 26 – 28 ноября 2002 г.) и на 7-м Всероссийском Совещании-семинаре “Инженерно-физические проблемы новой техники” (Москва, 20 – 22 мая 2003 г.).

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения.

Содержание работы

Во **введении** сформулированы объект и предмет исследования, показана актуальность темы, определены цели и задачи диссертационной работы; приведена общая постановка задачи редукции измерений, сформулированы стохастическая, интервальная и теоретико-возможностная модели измерений; рассмотрены модели датчиков первого и второго порядков, приведены примеры их использования в практике измерений.

Общая постановка задачи редукции измерений. Рассмотрим следующую схему измерения:

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где $\xi \in \tilde{\mathcal{R}}$ – искаженный шумом $\nu \in \tilde{\mathcal{R}}$ выходной сигнал ИП, рассматриваемый как отклик на входной сигнал $f \in \mathcal{R}$, полученный в процессе взаимодействия ИП с *измеряемым объектом* и средой, $A : \mathcal{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ – линейный оператор, моделирующий ИП, \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ – евклидовы пространства. Задача интерпретации измерения (1) заключается в извлечении из результата измерения ξ наиболее полной информации о параметрах *исследуемого объекта*, невозмущенного измерением. Эти параметры определяются как выходной сигнал $Uf(\cdot)$ прибора U , причем в данном случае $U : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}$ – линейный ограниченный оператор, моделирующий “идеальный” измерительный прибор, который взаимодействует с измеряемым объектом и средой так же, как и A , но на выходе дает параметры исследуемого объекта, не возмущенного измерением. Речь идет о преобразовании (редукции) $R\xi$ результата измерения ξ к виду, свойственному измерению на приборе U , т.е. к виду Uf .

Стохастическая модель в задаче редукции. Если в (1) заданы оператор A , определяющий математическую модель измерительного преобразователя, взаимодействующего с измеряемым объектом и средой, корреляционный оператор Σ случайного вектора ν , моделирующего шум измерения, и оператор U , определяющий модель “идеального” измерительного прибора, то говорят, что заданы модель $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1) и модель $[A, \Sigma, U]$ интерпретации измерения (1).

Задача редукции для модели $[A, \Sigma, U]$ формулируется как задача на минимум максимальной среднеквадратичной (с.к.) ошибки интерпретации $R\xi$ как Uf :

$$h(R, U) = \sup_{f \in \mathcal{R}} \mathbf{E} \|R\xi - Uf\|_{\mathcal{U}}^2 \sim \min_R. \quad (2)$$

Здесь \min вычисляется на множестве всех линейных операторов $R : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}$; если R_* – решение задачи (2), то значение $h(R_*, U)$ с.к. погрешности интерпретации $R_*\xi$ как Uf определит качество ИВП как “идеального” измерительного прибора U , его с.к. погрешность. Если кроме операторов A , U , Σ и условия $\mathbf{E}\nu = 0$ относительно схемы измерения (1) известно, что f – случайный вектор с заданным математическим ожиданием $\mathbf{E}f = 0$ и корреляционным оператором F , причем f и ν независимы, говорят, что задана модель $[A, F, \Sigma]$ схемы измерения (1). Для этой модели в монографии [Пы-

тьев, 2004] рассмотрена задача редукции схемы измерения (1) к виду $\eta = Uf + V\nu$, где V – заданный оператор, которая в этом случае ставится как следующая задача на минимум:

$$h(R, U, V) = \min_R E \|R\xi - \eta\|^2.$$

Ее решение $R^*\xi$ будет наиболее точной в среднем квадратичном версией η в классе всех линейных функций ξ .

Интервальная модель в задаче редукции. Задача интервальной редукции ставится как задача интервального оценивания вектора Uf в соответствии с моделью $[A, I_f, I_\nu, U]$ схемы измерений (1). Эта модель подразумевает наличие априорной информации вида $f \in I_f \subset R_m$, $\nu \in I_\nu \subset R_n$, где $I_f = \{f \in R_m, \underline{f}_j \leq f_j \leq \bar{f}_j, j = 1, \dots, m\}$, $I_\nu = \{\nu \in R_n, \underline{\nu}_i \leq \nu_i \leq \bar{\nu}_i, i = 1, \dots, n\}$, которая накладывает ограничения на возможные положения интервалов I_j , содержащих f_j , и их размеры. Пусть $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ – центры, а $l = (l_1, \dots, l_m)^T$ – полудлины этих интервалов (т.е. $I_j \sim \{c_j, l_j\}$, $j = 1, \dots, m$), тогда эти ограничения запишутся как $(c, l) \in D(A, I_f, I_\nu | \xi)$, где $D(A, I_f, I_\nu | \xi)$ – подмножество R^{2m} , зависящее от A, I_f, I_ν и ξ :

$$D(A, I_f, I_\nu | \xi) =$$

$$\{c, l : \xi_i - \bar{\nu}_i \leq \sum_{j=1}^m a_{ij}c_j - \sum_{j=1}^m |a_{ij}|l_j \leq \sum_{j=1}^m a_{ij}c_j + \sum_{j=1}^m |a_{ij}|l_j \leq \xi_i - \underline{\nu}_i; \\ \underline{f}_j \leq c_j - l_j \leq c_j + l_j \leq \bar{f}_j, 0 \leq l_j < \infty, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}. \quad (3)$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы A . Если в задаче интервального оценивания вектора $f \in R_m$ требуется определить интервалы I_1, \dots, I_m , удовлетворяющие условиям (3) и имеющие *максимальные длины*, то такие интервалы определяют *неизбежную* погрешность [Пытьев, 2006]¹⁰ оценивания, основанного на данных измерений ξ_1, \dots, ξ_n . В этом случае задача интервальной редукции сводится к следующей:

$$q(l^*) = \max_{(c, l) \in D(A, I_f, I_\nu | \xi)} q(l), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

Мера погрешности $q(l)$ выбирается исследователем исходя из нужд конкретной задачи. Например, для оценивания k -й координаты вектора f $q(l) = l_k$, а для оценивания f “в целом” можно взять $q(l) = \sum_{j=1}^m l_j$. Для линейных функций $q(\cdot)$ (4) сводится к задаче линейного программирования.

Обозначим

$$\mathcal{M}(A, I_f, I_\nu | \xi) = \{f \in R_m, \underline{f}_j \leq f_j \leq \bar{f}_j, j = 1, \dots, m, \xi_i - \bar{\nu}_i \leq \\ \leq \sum_{j=1}^m a_{ij}f_j \leq \xi_i - \underline{\nu}_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Задача оптимального выбора f как задача интервального оценивания каждой его компоненты с *гарантированной точностью* и определения *возможной* погрешности

¹⁰Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. – М.: Физматлит, 2006.

[Пытьев, 2006] ставится как m задач на минимум $l_j \sim \min, j = 1, \dots, m$, при условии $\mathcal{M}(A, I_f, I_\nu | \xi) \subset [c_1 - l_1, c_1 + l_1] \times \dots \times [c_m - l_m, c_m + l_m]$, определяющем минимальный по включению прямоугольный параллелепипед, содержащий $\mathcal{M}(A, I_f, I_\nu | \xi)$. Каждое решение $\widehat{c}_j(x), \widehat{l}_j(x)$ определит интервальную оценку $\widehat{I}_j(x) \sim \{\widehat{c}_j(x), \widehat{l}_j(x)\}$ координаты f_j , отвечающую результату измерения ξ , центр $\widehat{c}_j(x)$ интервала $\widehat{I}_j(x)$ оценит f_j с *возможной* погрешностью $\widehat{l}_j(x)$,

$$|f_j - \widehat{c}_j(x)| \leq \widehat{l}_j(x), \quad j = 1, \dots, m.$$

Если не оговорено специально, далее везде под погрешностью для интервальной модели подразумевается неизбежная погрешность.

Теоретико-возможностная модель в задаче редукции. [Пытьев, 2000]¹¹ Пусть модель эксперимента задана совместным распределением возможностей значений следующих нечетких элементов: выходного сигнала ξ измерительной компоненты ИВС, ее входного сигнала φ , сформированного в системе в процессе измерения в результате взаимодействия измеряемого объекта, среды и измерительной компоненты, и параметра η исследуемого объекта

$$\mu^{\xi, \varphi, \eta}(x, f, y), \quad (x, f, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{F} \times \mathcal{U}.$$

Значение $\mu^{\xi, \varphi, \eta}(x, f, y)$ равно возможности равенств $\xi = x, \varphi = f, \eta = y$. Маргинальное распределение

$$\mu^{\xi, \eta}(x, u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mu^{\xi, \varphi, \eta}(x, f, u), \quad (x, u) \in \mathcal{R} \times \mathcal{U},$$

определяет модель интерпретации измерения, позволяющую, в частности, получить оценку значения параметра $\eta = u$, основанную на результате измерения $\xi = x$.

Задачу интерпретации измерения можно понимать как задачу оптимального оценивания значения параметра исследуемого объекта, минимизирующего, например, возможность ошибки оценивания $P(d(\cdot)) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \min(\mu^{\xi, \eta}(x, u), l(u, d(x))) \sim \min_{d(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}} \cdot$.

Здесь функция $d(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}$ определяет правило оценивания, согласно которому результату измерения $\xi = x$ ставится в соответствие значение $\eta = u = d(x)$ параметра исследуемого объекта; $l(x, y)$ – возможность потерь, сопутствующих решению $y \in \mathcal{Y}$ в ситуации, определенной значением $x \in \mathcal{X}$.

В **первой главе** для стохастической модели измерений проводится сравнение качества ИВС на основе контактного измерителя температуры для различных приближенных моделей контактного измерителя. Критерием качества является апостериорная погрешность измерений на ИВС.

Контактный измеритель температуры представляет собой следующее устройство [Азизов, 1967]¹². Пусть к однородному полупространству $x > l$, температуру поверхности которого требуется измерить, присоединен слой $0 < x < l$ теплопроводящего материала с коэффициентом температуропроводности a^2 , причем при $x = 0$ поддерживается нулевая температура. Контактный обмен тепла (нагрев) в точке происходит

¹¹Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. – М.: УРСС, 2000. – 190 с.

¹²Азизов А.М., Гордов А.Н. Точность измерительных преобразователей. – Л.: Энергия, 1967. – 300 с.

по закону Ньютона

$$-q(t) = \gamma[f(t) - u(l, t)],$$

где $q(t)$ — поток тепла через поверхность $x = l$, γ — коэффициент теплообмена, $f(t)$ — температура поверхности, которую требуется измерить, $u(l, t)$ — граничная температура слоя. Предполагается, что мы можем измерить (зафиксировать с ошибкой) либо температуру в некоторой точке слоя, либо среднюю температуру в слое.

В диссертации сравниваются между собой две приближенные модели контактного измерителя температуры, основанные на модели датчика первого порядка с сосредоточенными параметрами. Использование этих приближенных моделей позволяет уменьшить вычислительную сложность задачи редукции. Обозначим оператор модели датчика первого порядка, зависящий от параметров α и β , как $A(\alpha, \beta)$, а модели контактного измерителя температуры — как A_c . Как известно, температура в точке x слоя в момент времени t определяется следующим выражением:

$$u(x, t) = \gamma \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2(\lambda_n + \gamma^2)} \right]^{-1} \sin \sqrt{\lambda_n} x \times \\ \times \frac{a^2 \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_n + \gamma^2}} e^{-a^2 \lambda_n (t - \tau)} f(\tau) d\tau \equiv A_c f, \quad (5)$$

где λ_n — n -ый корень уравнения $tg \sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\gamma}$.

Вместо оператора A_c при решении задач редукции для ИВС на основе контактного измерителя предлагается использовать оператор $A(\alpha, \beta)$, параметры которого выбираются двумя способами.

Параметры для первой приближенной модели определяются соотношением

$$\alpha, \beta \sim \min_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} \|A_c - A(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\|^2, \quad (6)$$

а второй — из выражения для первого члена ряда (5):

$$\alpha = 1, \quad \beta = a^2 \lambda_1. \quad (7)$$

Для этих моделей проведено сравнение (“фактических”) погрешностей измерений на соответствующих ИВС. На рис. 1 приведены зависимости “фактической” погрешности редукции для ИВС на основе контактного измерителя в случае приближенной модели (7) (рисунок а) и (6) (рисунок б) от положения датчика. На рисунках цифрой 1 обозначены кривые для случая протяженного датчика, цифрой 2 — для случая датчика пренебрежимо малых размеров. Как видно из графиков, “фактическая” (апостериорная) погрешность в случае модели (7) больше, чем в случае модели (6).

Таким образом, распространенный прием, состоящий в отбрасывании всех членов ряда, кроме первого, в данном случае не приводит к лучшей с точки зрения точности измерений на ИВС модели. Вместе с тем, учитывая вычислительную простоту модели (7), в работе для нее указан способ нахождения оптимальных параметров датчика, минимизирующих погрешность измерений на ИВС в рамках данной модели.

Кроме того, вычисления показали (см. рис. 1), что в случае модели (6) погрешности измерений для протяженного и точечного датчиков практически одинаковы. Поэтому в данном случае, если известна модель усреднения, нет смысла стремиться

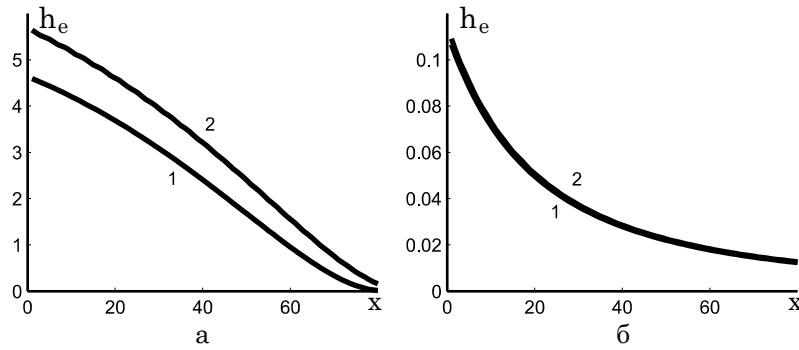


Рис. 1.

к максимальному уменьшению размеров датчика.

Во **второй главе** рассматриваются задачи оптимального синтеза ИВП на основе датчиков первого и второго порядка для интервальных моделей [Пытьев, 2004]. Для стохастической модели измерений такие задачи решены в [Волков, 2000], [Пытьев, 2004].

Рассмотрим задачи “покоординатного” оценивания входного сигнала f и оценивания его “в целом” для интервальной модели.

Задаче “покоординатного” оценивания соответствует мера погрешности $q(l) = l_j$, поэтому (4) запишется как

$$l_j^* = \max_{(c,l) \in D(A, I_f, I_\nu | \xi)} l_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (8)$$

где множество $D(A, I_f, I_\nu | \xi)$ определено неравенствами (3). Решения $c_j^*(\xi)$, $l_j^*(\xi)$ этой задачи определяют интервалы $I_j^*(\xi) \sim \{c_j^*(\xi), l_j^*(\xi)\}$, $j = 1, \dots, m$, являющиеся интервальными оценками координат $f_j \in I_j^*(\xi)$, $j = 1, \dots, m$, вектора f . При этом оптимальной оценкой координаты f_j является центр $c_j^*(\xi)$ интервала $I_j^*(\xi)$, а его полудлина $l_j^*(\xi)$ оценивает максимальную погрешность, $|f_j - c_j^*(\xi)| \leq l_j^*(\xi)$, и тем самым определяет гарантированную точность интерпретации $c_j^*(\xi)$ как значения f_j , $j = 1, \dots, m$.

Задача “покоординатного” оценивания (8), (3) является, как уже отмечалось, задачей линейного программирования. Существует ряд численных методов для решения таких задач. В рассмотренных публикациях не удалось обнаружить каких-либо методов аналитического решения задач вида (4), (3) в частном случае обратимой матрицы оператора прибора A и отсутствия ограничений на f (модель $[A, I_\nu]$).

В диссертации для этого случая получен следующий результат, позволяющий решать задачи “покоординатного” оценивания аналитически:

Т е о р е м а 2. Пусть в модели $[A, I_\nu]$ A – невырожденная $m \times m$ -матрица. Тогда

$$c_k(\xi) = \sum_{i=1}^m a_{ki}^- (\xi_i - (\bar{\nu}_i + \underline{\nu}_i)/2), \quad k = 1, \dots, m,$$

и погрешность $q(l^*) = l_k^*$ редукции для модели $[A, I_\nu]$ есть

$$l_k^* = \frac{1}{2} \min_{i=1, \dots, m} \frac{\bar{\nu}_i - \underline{\nu}_i}{|a_{ik}|}, \quad (9)$$

где a_{ik} , a_{ik}^- , $i, k = 1, \dots, m$, – элементы матрицы A и A^{-1} соответственно.

Задача оценивания f “в целом” для случая, когда в качестве меры погрешности выбирается величина $q(l) = \min_j l_j$, имеет следующий вид:

$$\min_j l_j^* = \max_{(c,l) \in \mathbb{D}(A, I_f, I_\nu | \xi)} \min_j l_j. \quad (10)$$

Если найдено ее решение $I_j^* \sim \{c_j^*, l_j^*\}$, $j = 1, \dots, m$, то вектор c оценит f с гарантированной точностью, определенной неравенством $\min_j |f_j - c_j^*(\xi)| \leq \min_j l_j^*$.

В диссертации получен следующий результат, дающий метод аналитического решения задачи (10), (3):

Т е о р е м а 3. Пусть в модели $[A, I_\nu]$ A – невырожденная $m \times m$ -матрица. Тогда решение задачи (4) для $q(l) = \min_j l_j$ есть

$$c_k^*(\xi) = \sum_{i=1}^m a_{ki}^-(\xi_i - (\bar{\nu}_i + \underline{\nu}_i)/2), \quad k = 1, \dots, m,$$

$$q^* = l_1^* = \dots = l_m^* = \frac{1}{2} \min_{i=1, \dots, m} \frac{\bar{\nu}_i - \underline{\nu}_i}{\sum_{k=1}^m |a_{ik}|},$$

где a_{ik} , a_{ik}^- , $i, k = 1, \dots, m$, – элементы матрицы A и A^{-1} соответственно.

На основе этих результатов в диссертации получены выражения для погрешностей интервальной редукции в случае ИВП на основе датчиков первого и второго порядков. Например, для датчика первого порядка погрешность интервальной редукции (8) есть

$$l_k^* = \frac{\bar{\nu} - \underline{\nu}}{2} \begin{cases} 1/|a_{k-1k}| = \frac{\Delta \beta^2}{|\alpha|} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\alpha} \Delta}\right)^{-2}, & \alpha \beta > 0 \\ 1/|a_{mk}| = \frac{\Delta \beta^2}{|\alpha|} e^{\frac{\beta}{\alpha} (1-k)\Delta} \left|e^{-\frac{\beta}{\alpha} \Delta} + e^{\frac{\beta}{\alpha} \Delta} - 2\right|^{-1}, & \alpha \beta < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $\bar{\nu}_i = \bar{\nu}$, $\underline{\nu}_i = \underline{\nu}$, $i = 1, \dots, m$; Δ – величина шага сетки, используемой при вычислении матрицы оператора A . Для задачи (10) при тех же предположениях получена следующая оценка:

$$q^* \approx \frac{\bar{\nu} - \underline{\nu}}{2} / \frac{\alpha}{\beta |\alpha|} (1 - e^{-\beta/\alpha}).$$

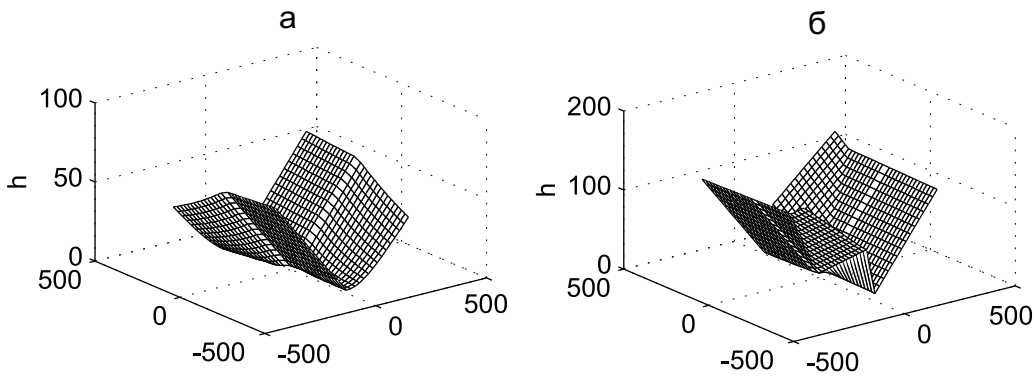


Рис. 2.

Графики этих зависимостей приведены на рис. 2, а (для задачи (8)) и б (для зада-

чи (10)). Зависимости погрешностей измерений для ИВП на основе датчика второго порядка, а также для модели погрешности $q(l) = \sum_{i=1}^m l_i$, представлены в диссертации. Для каждой комбинации параметров эти зависимости показывают, какой точностью будет обладать ИВП на основе датчика с такими значениями параметров. Поэтому эти результаты могут быть использованы при проектировании датчиков, которые предполагается использовать в составе ИВП, для оптимизации точности измерений на соответствующем ИВП.

Результаты расчетов показали, что зависимости погрешностей измерений, выполненных на ИВП и на ИП как таковом, от параметров существенно отличаются. Значит, требования к параметрам ИП, обеспечивающие максимальную точность измерения на ИВП, отличны от тех, которые обеспечивают максимальную точность измерения на ИП как таковом, без использования ВП. Это утверждение совпадает с выводом, следующим из аналогичных расчетов для стохастической редукции.

В **третьей главе** рассмотрены задачи оптимального синтеза ИВП на основе датчика температуры с распределенными параметрами.

Пусть имеется бесконечно тонкий теплоизолированный теплопроводящий стержень длины l . Будем считать, что на каждом из его концов граничные условия одинаковы для всех точек, тогда в пределах любого поперечного сечения стержня температура одинакова и в каждый момент времени зависит лишь от координаты x . Пусть на стержне расположены источники тепла с плотностью $f(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, и на его концах поддерживается заданный температурный режим, согласно которому температура $u = u(x, t)$ как функция координаты $x \in [0, L]$ и времени $t \in [0, T]$ удовлетворяет при $x = 0$ и $x = l$ условиям:

$$a_1 u'_t(0, t) - b_1 u(0, t) = 0, \quad |a_1| + |b_1| \neq 0; \quad a_2 u'_t(l, t) + b_2 u(l, t) = 0, \quad |a_2| + |b_2| \neq 0,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые коэффициенты.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ температура стержня равна нулю, тогда температура $u = u(x, t)$ стержня может быть получена как решение следующей краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 \leq x \leq l$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ a_1 u'_t(0, t) - b_1 u(0, t) = 0, & |a_1| + |b_1| \neq 0, \\ a_2 u'_t(l, t) + b_2 u(l, t) = 0, & |a_2| + |b_2| \neq 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь u – температура в точке x в момент времени t , a – коэффициент теплопроводности.

Пусть измеряется температура u стержня в точке x в момент времени t . Тогда $u = Af + \nu$, где A – некоторый интегральный оператор, а ν – ошибка измерения.

Если справедливо представление $f(x, t) = g(x)h(t)$, $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$, то можно рассмотреть задачи восстановления пространственной части $g(\cdot)$ при известной функции $h(\cdot)$, либо временной части $h(\cdot)$ при известной $g(\cdot)$.

Рассмотрим первую из них. Пусть известна функция $h(\cdot) : [0, T] \rightarrow R_1$. Тогда, обозначив $I_i(t) = \int_0^t \exp(-a^2 \lambda_i(t - \tau)) h(\tau) d\tau$, $t \in [0, T]$, получим, что в фиксированный

момент времени t пространственное распределение температуры есть

$$u(x, t) = \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} I_i(t) (2/l) \sin(\sqrt{\lambda_i} x) \sin(\sqrt{\lambda_i} y) g(y) dy, \quad x \in [0, L], t \in [0, T].$$

Рассмотрим ситуацию, когда в момент времени τ_0 происходит мгновенный нагрев стержня, т.е. пусть

$$u(x, t) = \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} (2/l) \sin(\sqrt{\lambda_i} x) \sin(\sqrt{\lambda_i} y) \exp(-a^2 \lambda_i (t - \tau_0)) g(y) dy \equiv \tilde{A}_s g(\cdot),$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

и требуется определить средние значения g_i , $i = 1, \dots, n$, функции $g(x)$ на n отрезках $[0; l/n]$, $[l/n; 2l/n]$, \dots , $[(n-1)l/n; l]$ стержня.

Пусть измерения температуры проводятся в нескольких местах стержня одновременно в момент времени $t = t_0 > \tau_0$. В момент времени t_0 снимаются показания расположенных на стержне измерительных элементов – средние значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ температуры на отрезках стержня $[0; l/n]$, $[l/n; 2l/n]$, \dots , $[(n-1)l/n; l]$, соответственно.

Модель формирования измерений запишем как $\xi_i = u_i(t_0) + \nu_i$, $i = 1, \dots, n$, где $u_i(t_0)$ – истинные средние значения температуры, $\nu \equiv \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ – шум измерения. В свою очередь, $u(t_0) = A_s g$; здесь $u(t_0) \equiv \{u_1(t_0), \dots, u_n(t_0)\}$, $g \equiv \{g_1, \dots, g_n\}$, A_s – матрица интегрального оператора \tilde{A}_s (13) в ортонормированной системе функций из $\mathcal{L}_2[0, l]$:

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{\Delta_x}} \begin{cases} 1, & x \in [(i-1)\Delta_x, i\Delta_x] \\ 0, & x \notin [(i-1)\Delta_x, i\Delta_x] \end{cases}, \quad i = 0, \dots, n, \quad \Delta_x = l/n.$$

Пусть теперь наоборот $g(\cdot)$ известна, а $h(\cdot)$ – нет. Обозначим

$$I_i(x) = \sin(\sqrt{\lambda_i} x) \int_0^l \sin(\sqrt{\lambda_i} y) g(y) dy, \quad x \in [0, L],$$

тогда зависимость температуры стержня в точке x_0 от времени

$$u(x, t) = \int_0^T \sum_{i=1}^{\infty} I_i(x) (2/l) \exp(-a^2 \lambda_i (t - \tau)) h(\tau) d\tau, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T].$$

Если в системе присутствует единственный источник тепла, расположенный в точке y_0 , то $I_i(x) = \sin(\sqrt{\lambda_i} x) \sin(\sqrt{\lambda_i} y_0)$ и

$$u(x, t) = \int_0^T \sum_{i=1}^{\infty} (2/l) \sin(\sqrt{\lambda_i} x) \sin(\sqrt{\lambda_i} y_0) \exp(-a^2 \lambda_i (t - \tau)) h(\tau) d\tau \equiv \tilde{A}_t h(\cdot),$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14)$$

Пусть требуется определить средние значения h_j , $j = 1, \dots, m$, функции $h(t)$ за промежутки времени $[0; T/m]$, $[T/m; 2T/m]$, \dots , $[(m-1)T/m; T]$. Для получения такой оценки будем измерять в точке x_0 среднюю температуру стержня на этих временных интервалах. В данном случае в системе присутствует единственный измерительный

элемент, показания которого – средние значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ температуры стержня на интервалах времени $[0; T/m], [T/m; 2T/m], \dots, [(m-1)T/m; T]$, соответственно.

Модель измерений есть $\xi_j = u_j(x_0) + \nu_j, j = 1, \dots, m$, где $u_j(x_0)$ – истинные средние значения температуры стержня в точке x_0 , $\nu \equiv \{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ – шум измерения. В свою очередь, $u(x_0) = A_t h$; здесь $u(x_0) \equiv \{u_1(x_0), \dots, u_m(x_0)\}$, $h \equiv \{h_1, \dots, h_m\}$, A_t – матрица интегрального оператора \hat{A}_t (14) в ортонормированной системе функций из $\mathcal{L}_2[0, l]$:

$$c_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_t}} \begin{cases} 1, & t \in [(j-1)\Delta_t, j\Delta_t] \\ 0, & t \notin [(j-1)\Delta_t, j\Delta_t] \end{cases}, j = 0, \dots, m, \Delta_t = T/n.$$

В рамках интервальной модели в этой главе диссертации получены зависимости погрешностей измерений на ИВП от параметров датчика – места измерения (в случае оценивания временного распределения) и от времени измерения (в случае оценивания пространственного распределения). Эти зависимости для случая краевой задачи первого рода и интервальной модели (10) приведены на рис. 3, а и б, соответственно. На рисунках x_0 – координата положения датчика, t_0 – время измерения.

Характер этих зависимостей совпадает с таковым для стохастической редукции: погрешность тем меньше, чем больше величина сигнала.

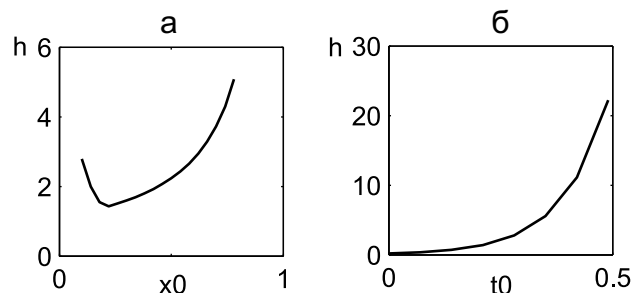


Рис. 3.

В этой главе показано, что методы классической теории решения некорректных задач, разработанной А.Н.Тихоновым [Тихонов, 1974]¹³, [Dorofeev, 2002]¹⁴ не могут быть использованы для решения задач оптимального синтеза ИВП по той причине, что не обеспечивают при прочих равных условиях максимальной гарантированной точности измерений на ИВП. Этот факт иллюстрируется на примере задачи покомпонентного оценивания сигнала в рамках интервальной модели редукции. Априорные погрешности, полученные классическими методами и методами интервальной редукции, приведены на рис. 4 в виде соответствующих коридоров. Штриховыми линиями на этом рисунке показаны верхняя и нижняя границы априорного коридора для z . Пунктирной линией показано точное решение; знаками “о” отмечены границы коридора, найденного методами классической теории некорректных задач; знаки “*” указы-

¹³А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.

¹⁴К.У. Dorofeev, N.N. Nikolaeva, V.N. Titarenko, A.G. Yagola. New approaches to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity. // Inverse and Ill-posed Problems. – 2002. – Volume 10, No. 2. – pp. 107–212.

вают границы коридора, полученного методами интервальной редукции для случая возможной погрешности. Как видно из рисунка, его ширина оказывается меньше, чем ширина коридора, найденного методами классической теории некорректных задач.

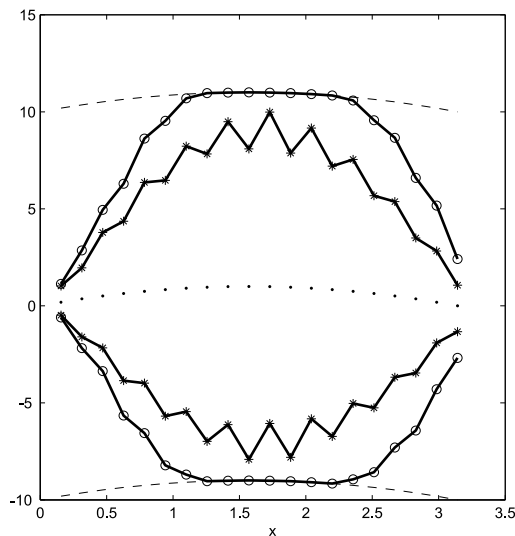


Рис. 4.

Четвертая глава посвящена сравнительному анализу результатов вычислительного эксперимента по оптимальному синтезу ИВП на основе датчика первого порядка при одном фиксированном параметре для интервальной, стохастической и теоретико-возможностной моделей.

Здесь приведены (см. рис. 5) зависимости минимальных при фиксированном параметре α значений погрешности от α и множества оптимальных значений параметра β для каждой модели. На рис. 5 пары зависимостей (а) и (б) соответствуют интервальной модели (а – погрешность вычисляется как $\sum_j l_j$, б – как $\min_j l_j$), (в) стохастической, а (г) – теоретико-возможностной моделям (в последнем случае в качестве меры качества оценивания выступала необходимость ошибки); вертикальными линиями отмечена окрестность нуля (на оси α), исключенная из рассмотрения. В левом столбце сплошными линиями показаны зависимости погрешности минимальных по β значений погрешности от α , а в правом – зависимости соответствующих значений β , на которых эти минимумы достигаются, от α .

Как показали расчеты, можно подобрать такое множество D^* значений α и β , что в случае каждой модели соответствующие им значения погрешности будут либо совпадать с теми, которые получаются при оптимальных значениях параметров α и β , либо будут близки к ним.

В качестве D^* было выбрано множество оптимальных значений параметров α и β для одной из интервальных моделей (рис. 5 б); как показали вычисления, оно меньше всех остальных зависит от реализации шума. Множество D^* изображено на всех расположенных справа графиках штриховой линией. Соответствующие значе-

ниям $\alpha, \beta \in D^*$ величины погрешностей приведены на левых рисунках штриховыми линиями.

Заметим, что даже противоположные оптимальным значения β из D^* в случае (г) соответствуют практически тем же величинам погрешности. Как видно из графиков (а) и (в), для остальных моделей отличия еще меньше. Таким образом, множество D^* может быть использовано для оптимального синтеза ИВП на основе датчика первого порядка при фиксированном значении параметра α в рамках каждой из рассмотренных моделей.

В **Заключении** приводятся основные результаты, полученные в диссертации:

1. разработаны численно-аналитические методы оценивания гарантированной точности измерений на ИВП для интервальной модели;
2. с помощью этих методов решены задачи редукции измерений и оптимального синтеза ИВП на основе датчиков первого и второго порядков общего назначения, а также датчика с распределенными параметрами для измерения временного и пространственного распределений плотности тепловых источников, в рамках интервальной модели;
3. проведено сравнение предельного качества ИВП на основе датчика первого порядка при одном фиксированном параметре для интервальной, стохастической и теоретико-возможностной моделей;
4. разработан комплекс алгоритмов и программ для решения задач оптимального синтеза ИВП на основе параметрических датчиков;
5. на примере одной задачи для уравнения теплопроводности проведено сравнение интервальной редукции с методами классической теории некорректных задач; показано, что методы классической теории не оптимальны в задачах синтеза ИВС.

Список работ автора по теме диссертации

1. Волков Б.И., Новицкий Д.М. Анализ погрешностей измерений температуры, обусловленных неточностью модели измерительно-вычислительного преобразователя. // Измерительная техника. – 2004. – № 3. – с. 24–27.

2. Новицкий Д.М., Пытьев Ю.П., Волков Б.И. Об измерительно-вычислительных системах на основе датчиков первого и второго порядков. // Математическое моделирование. – 2006. – т.18, №6. – с. 15-28.

3. Волков Б.И., Новицкий Д.М. Измерительно-вычислительные преобразователи в задачах тепловых измерений. // 8-ая Всероссийская научно-техническая конферен-

ция "Состояние и проблемы измерений". Тез. докл. – М.: 2002. – с. 113-114.

4. *Волков Б.И., Новицкий Д.М.* Математические модели измерительно-вычислительных преобразователей для измерения температуры. // 7-е Всероссийское Собрание-семинар "Инженерно-физические проблемы новой техники". Тез. докл. – М.: 2003. – с. 106-107.

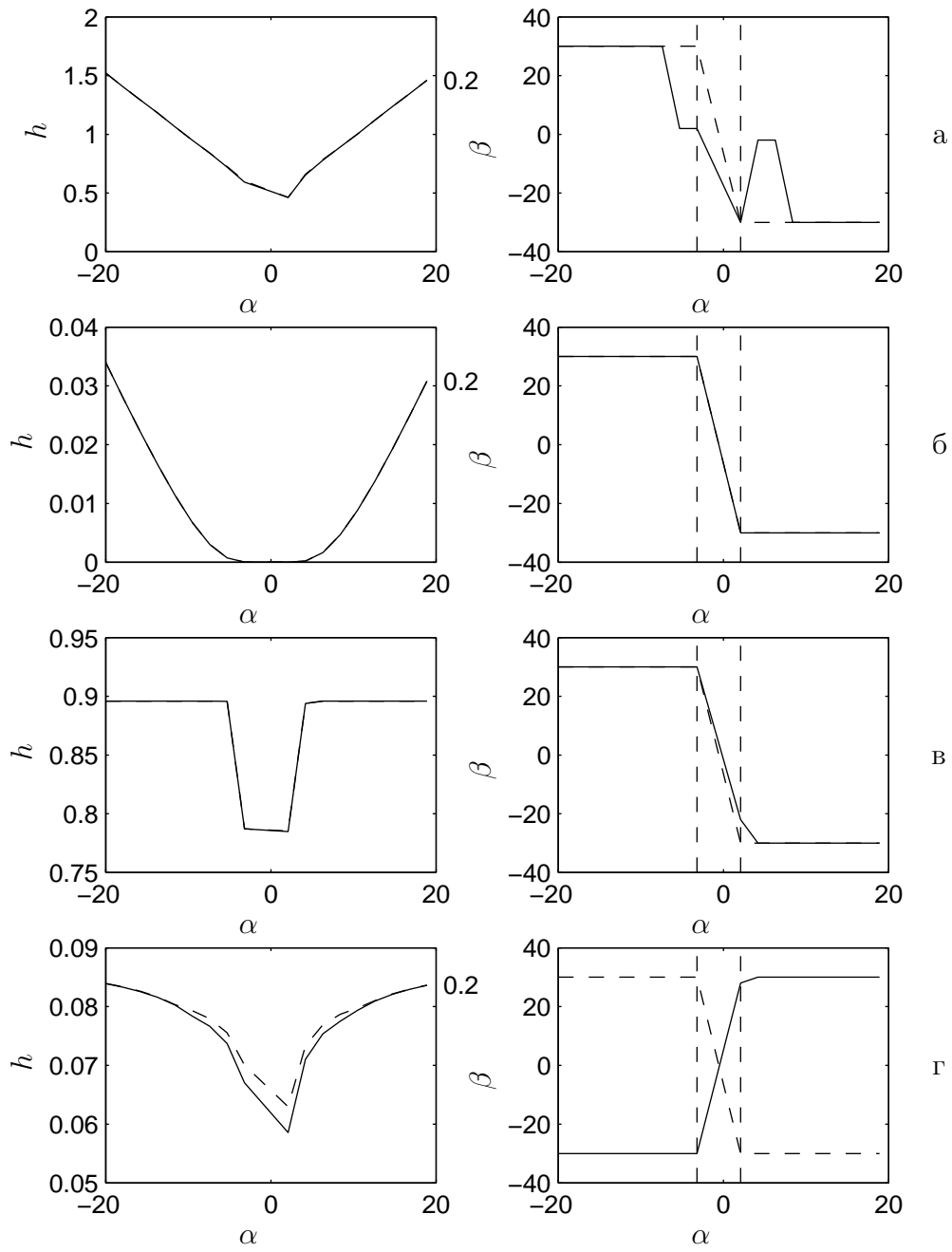


Рис. 5.