

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА**

**Физический факультет
кафедра математики**

На правах рукописи

Петрова Юлия Юрьевна

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В МНОГОСВЯЗНЫХ
ВОЛНОВОДНЫХ ОБЛАСТЯХ**

01.01.03 - математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва 2006

**Работа выполнена на кафедре математики физического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.**

**Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор В.П. Моденов.**

**Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.Б. Самохин,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник В.В. Лопушенко.**

**Ведущая организация: Московский государственный институт
электроники и
математики (технический университет).**

**Защита диссертации состоится 20 апреля 2006 года в ___ ч ___ мин на
заседании Диссертационного совета К 501.001.17 в Московском
государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992,
Москва, ГСП-2, Ленинские горы, д.1, стр. 2, МГУ, Физический факультет,
аудитория СФА.**

**С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова.**

Автореферат разослан «___» _____ 2006 года.

**Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор**

П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследований

Стремительный прогресс современной радиотехники и микроэлектроники сопровождается быстрым развитием теории и проектирования волноведущих систем и обладает ярко выраженной тенденцией к исследованию коротковолновой части сантиметрового и миллиметрового диапазона. При изучении волноводно-резонансных процессов в этом диапазоне длин волн возрастает требование к точности проводимых расчетов и характеристик рассматриваемых систем. Размеры волноводных неоднородностей становятся соизмеримы с длиной волны, что требует рассматривать подобные задачи в многомодовом приближении, учитывая, таким образом, высшие типы волн и их дифракционное взаимодействие. Асимптотические методы и методы теории цепей не всегда могут обеспечить необходимую точность, а физический эксперимент часто является достаточно сложным, длительным и дорогостоящим, поэтому на первый план выходит разработка и обоснование математических методов решения волноводных задач в строгой электродинамической постановке.

В последнее время теория волноводов интенсивно развивается. Большое количество научных работ посвящено изучению волновых процессов и явлений, математическому моделированию различных систем и разработке математических методов и алгоритмов их исследования. Ряд основных вопросов математической теории волноводов был разработан в работах А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Г.В. Кисунько, П.Е. Краснушкина, Л.А. Вайнштейна, Б.З. Каценеленбаума. Весьма широкое применение в теории нерегулярных волноводов получил математически обоснованный А.Г. Свешниковым неполный метод Галеркина. Обширный круг задач был решен на основе этого метода и его модификаций в работах А.С. Ильинского, В.П. Моденова и других авторов.

В современной электронике широкое применение находят различные волноведущие системы: многоканальные линии передачи, устройства

деления и умножения электромагнитной энергии, многоканальные и многозвенные фильтры, волноводные резонаторы и т.д.

Математическое моделирование физических процессов, происходящих в этих системах, приводит к необходимости постановки, теоретического исследования и численного решения соответствующих краевых задач для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом в многосвязных волноводных областях с границами, имеющими критические точки.

Физические и геометрические особенности определяют математическую специфику рассматриваемых краевых задач: бесконечность и многосвязность волноводных областей, учет условий Мейкснера в критических точках границ этих областей, учет при численном решении краевых задач многомодовости и резонансного характера электромагнитных процессов.

Возникает потребность в разработке и обосновании соответствующего математического аппарата, учитывающего эти особенности, в частности, необходимость обобщения хорошо себя зарекомендовавших при решении подобных задач неполного метода Галеркина, проекционного метода сшивания и метода многомодовых матриц рассеяния (метода S-матриц) на многосвязные волноводные области.

Все это определяет актуальность темы диссертации, посвященной математическому исследованию и разработке алгоритмов для численного решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом в многосвязных волноводных двумерных областях с кусочно-постоянными и кусочно-гладкими границами, имеющими критические точки, а также применению построенных алгоритмов при решении конкретных прикладных задач радиофизики и микроэлектроники.

Цели и задачи работы

Основной целью настоящей работы является следующее.

Математическое исследование краевой задачи для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом в многосвязных волноводных областях, с границами, имеющими критические точки.

Разработка, математическое обоснование и численная реализация алгоритма решения исследуемой краевой задачи, основанного на применении интегральных условий проекционного сшивания, для случая многосвязных областей с кусочно-постоянной границей.

Разработка, математическое обоснование и реализация алгоритма решения рассматриваемой задачи, использующего неполный метод Галеркина и интегральные условия проекционного сшивания, для случая многосвязных областей с кусочно-гладкой границей.

Использование построенных алгоритмов на практике при решении конкретных радиофизических задач.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Математическая постановка и решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом в многосвязных волноводных двумерных областях, с границами, имеющими критические точки.
2. Численные алгоритмы решения данной краевой задачи и их математическое обоснование.
3. Применение рассматриваемых алгоритмов для решения некоторых задач радиофизики и микроэлектроники.

Научная новизна

В данной работе математически поставлена, теоретически исследована и решена численно краевая задача для уравнения Гельмгольца в многосвязных волноводных двумерных областях с кусочно-постоянной и кусочно-гладкой границами, имеющими критические точки, в которых выполнены условия Мейкснера, и кусочно-постоянным или кусочно-непрерывным заполнением. Различия геометрии рассматриваемых многосвязных областей определяют математические особенности используемых алгоритмов. Для областей с кусочно-постоянной границей и кусочно-постоянным заполнением впервые разработан, математически обоснован и реализован алгоритм решения поставленной задачи, основанный

на использовании метода нормальных волн с применением проекционных условий сшивания в интегральном виде. Для областей с кусочно-гладкой границей и кусочно-непрерывным заполнением разработан, математически обоснован и численно реализован алгоритм решения рассматриваемой краевой задачи, который опирается на неполный метод Галеркина и проекционные условия сшивания. Для многосвязных областей с повторяющейся нерегулярностью и кусочно-постоянным заполнением впервые разработан и реализован вычислительный алгоритм решения исследуемой краевой задачи, который базируется на методе многомодовых матриц рассеяния (метод S-матриц) с использованием проекционного метода сшивания для анализа элементарного базового блока.

Практическая значимость

Приведенные в диссертации алгоритмы реализованы в виде комплекса ЭВМ программ и использованы на практике для решения задач дифракции в нерегулярном и локально-нерегулярном плоском волноводе. Получены новые интересные физические результаты. Разработанные в работе алгоритмы, созданные на их основе программы и полученные результаты могут быть использованы в современной микроэлектронике при математическом моделировании и создании систем автоматизированного проектирования различных устройств СВЧ диапазона (многоканальных делителей и сумматоров мощности, многозвенных фильтров, линий передачи, волноводно-диэлектрических резонаторов, базовых элементов и функциональных узлов систем сверхбыстрой обработки информации на объемных интегральных схемах СВЧ и КВЧ и оптического диапазонов, и других), а также в радиофизике (при исследовании волноводно-резонансных процессов).

Апробация работы

Результаты работы докладывались автором на следующих международных и всероссийских конференциях и школах-семинарах:

VII Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2000». Москва. Апрель 2000.

XII Всероссийской школе-конференции по дифракции и распространению волн. Москва. Декабрь 2001.

X Международной школе-семинаре «Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот». Фрязино. Август 2002.

IX Всероссийской школе-семинаре «Физика и применение микроволн». Звенигород. Май 2003.

II Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов». Самара. Сентябрь 2003.

III Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов». Волгоград. Сентябрь 2004.

III Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике». Москва. Январь 2005.

XII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов 2005». Москва. Апрель 2005.

Работа «Компьютерное моделирование плоскостойких металло-диэлектрических волноведущих структур», представленная на Всероссийский конкурс научных работ студентов в области телекоммуникаций за 2001 год, награждена дипломом лауреата конкурса IV степени.

Результаты работы докладывались на научных семинарах:

Семинаре «Численные методы электродинамики» МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессоров А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского. Март 2005.

Научном семинаре кафедры математики физического факультета МГУ под руководством профессора В.Ф. Бутузова. Март 2005.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 13 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения, списка литературы и приложения. Объем работы составляет 114 страниц, включая 16 рисунков, 2 таблицы и список литературы, содержащий 126 работ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор существующих математических методов решения краевых задач для уравнения Гельмгольца в различных волноводных областях. Обосновывается актуальность разработки новых и модификации существующих математических методов и алгоритмов исследования и численного решения краевых задач в многосвязных волноводных областях и областях со сложной геометрией области и границ. Приводится краткое описание содержания диссертации по главам.

Первая глава диссертации посвящена математическому исследованию и решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца в многосвязной волноводной области с кусочно-постоянной границей, имеющей критические точки, и кусочно-постоянным заполнением.

В первом параграфе этой главы рассмотрена строгая математическая постановка краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями Дирихле. Постановка проведена в общем виде с учетом многосвязности области и особенностей границы. Условия излучения на бесконечности, выделяющие единственное решение краевой задачи, сформулированы в виде парциальных условий излучения. Поставлено условие в форме Мейкснера, определяющее поведение решения в окрестности критических точек границы, также необходимое для однозначной разрешимости краевой задачи.

Математическую задачу поставим на примере базовой задачи о разветвлении волновода бесконечной металлической полуплоскостью конечной толщины. Итак, требуется найти решения $u(x, z) = U^j(x, z)$, где $u(x, z)$ - компонента электромагнитного поля $E_y(x, z)$, уравнения Гельмгольца:

$$Lu = \Delta u(x, z) + k^2 \varepsilon^j(x, z)u(x, z) = 0, \quad (j = I, II, III) \quad (1)$$

в двусвязной области $\Omega = \Omega_I \cup \Omega_{II} \cup \Omega_{III}$ с границей $\partial\Omega$, где

$$\Omega_I = \{(x, z) \mid 0 < x < a, -\infty < z < 0\}, \quad \Omega_{II} = \{(x, z) \mid c < x < d, 0 < z < \infty\},$$

$$\Omega_{III} = \{(x, z) \mid b < x < h, 0 < z < \infty\},$$

$$\varepsilon^j(x, z) = \begin{cases} z < 0, & \varepsilon^I = I, \\ z > 0, & \begin{cases} \varepsilon^{II}, & c < x < d, \\ \varepsilon^{III}, & b < x < h. \end{cases} \end{cases}$$

Решение будем искать в виде суммы разложений падающего и рассеянного полей по системе нормальных волн:

$$u(x, z) = \begin{cases} U^I(x, z) = A_{n_0}^I \varphi_{n_0}^I(x) e^{i\gamma_{n_0}^I z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^I \varphi_n^I(x) e^{-i\gamma_n^I z}, \\ U^{II}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{II} \varphi_n^{II}(x) e^{i\gamma_n^{II} z} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{II} \varphi_n^{II}(x) e^{-i\gamma_n^{II} z}, \\ U^{III}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{III} \varphi_n^{III}(x) e^{i\gamma_n^{III} z} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{III} \varphi_n^{III}(x) e^{-i\gamma_n^{III} z}, \end{cases} \quad (2)$$

где $A_{n_0}^I, B_n^{II}, C_n^{III}$ - заданные, а $R_n^I, Q_n^{II}, T_n^{III}$ - искомые коэффициенты разложения, причем R_n^I - коэффициенты отражения, Q_n^{II}, T_n^{III} - коэффициенты прохождения электромагнитной волны, $n_0 = 1$, $\{\varphi_n^j(x)\}$ - системы собственных функций, соответствующие системам собственных значений λ_n^j , задач Штурма-Лиувилля для попе-речных сечений $S^j = const$ с граничными условиями Дирихле на границе ∂S^j :

$$\begin{cases} \varphi_n^j(x)'' + (\lambda_n^j)^2 \varphi_n^j(x) = 0, \\ \varphi_n^j(x) \Big|_{\partial S^j = const} = 0, \end{cases}$$

где $\gamma_n^j = \sqrt{k^2 \varepsilon^j(x, z) - (\lambda_n^j)^2}$ - постоянные распространения, k - волновое число.

Искомые функции должны удовлетворять:

уравнению (1) в двусвязной области Ω ;

граничным условиям Дирихле на идеально проводящих поверхностях:

$$u(x, z)|_{\partial\Omega} = 0; \quad (3)$$

условиям излучения и возбуждения на бесконечности в виде (2) (в рассеянном поле отсутствуют волны, приходящие из $\pm \infty$);

проекционным условиям сшивания в плоскости стыка волноводов, обеспечивающим непрерывность потока энергии:

$$\begin{aligned} \int_0^a U^I(x, z)|_{z=0} \varphi_m^I(x) dx &= \int_c^d U^{II}(x, z)|_{z=0} \varphi_m^I(x) dx + \int_b^h U^{III}(x, z)|_{z=0} \varphi_m^I(x) dx, \\ \int_c^d \frac{\partial U^I(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \varphi_m^{II}(x) dx &= \int_c^d \frac{\partial U^{II}(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \varphi_m^{II}(x) dx, \\ \int_b^h \frac{\partial U^I(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \varphi_m^{III}(x) dx &= \int_b^h \frac{\partial U^{III}(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \varphi_m^{III}(x) dx; \end{aligned} \quad (4)$$

условию Мейкснера в окрестности критических точек границы $\partial\Omega$ (в точках изломов боковой поверхности и угловых точках металлических вставок), заключающемуся в требовании ограниченности энергии электромагнитного поля в любой окрестности V_ρ , содержащей критическую точку:

$$\int_{V_\rho} (|\nabla u(x, z)|^2 + |u(x, z)|^2) dV < \infty.$$

В пространстве $L_2(\Omega)$ системы собственных функций полны и ортогональны. Нормировка выбирается в следующем виде:

$$\int_0^a \varphi_n^I(x) \varphi_m^I(x) dx = \delta_{nm}, \quad \int_c^d \varphi_n^{II}(x) \varphi_m^{II}(x) dx = \delta_{nm}, \quad \int_b^h \varphi_n^{III}(x) \varphi_m^{III}(x) dx = \delta_{nm}. \quad (5)$$

Характерной особенностью исследуемой краевой задачи является необходимость рассмотрения обобщенного решения, учитывающего многосвязность и бесконечность области, и условие Мейкснера в критических точках. Поэтому во втором параграфе также как в работах В.П.

Моденова и С.И. Абгалдаева вводится понятие обобщенного решения краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в рассматриваемой области. В третьем параграфе сформулирована и доказана теорема существования и единственности для обобщенного решения.

Теорема. Обобщенное решение $u(x, z)$ задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (1) в области Ω существует и единственно.

В четвертом параграфе рассматривается реализация вычислительного алгоритма решения поставленной краевой задачи. Подставляя разложения (2) в

проекционные соотношения (4) и пользуясь условием нормировки (5), получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения искомых коэффициентов разложения:

$$Ax = By, \quad (6)$$

где введены блочные операторы и векторы коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} -\beta & -\alpha & I \\ 0 & \gamma^{\text{II}} & \alpha^{\text{T}}\gamma^{\text{I}} \\ \gamma^{\text{III}} & 0 & \beta^{\text{T}}\gamma^{\text{I}} \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} t \\ q \\ r \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & -I \\ 0 & \gamma^{\text{II}} & \alpha^{\text{T}}\gamma^{\text{I}} \\ \gamma^{\text{III}} & 0 & \beta^{\text{T}}\gamma^{\text{I}} \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} c \\ b \\ a \end{vmatrix},$$

$$a = \|A_{n0}^{\text{I}}\|_{n=0 \dots l}, \quad b = \|B_n^{\text{II}}\|_{n=l \dots \infty}, \quad c = \|C_n^{\text{III}}\|_{n=l \dots \infty}, \quad r = \|R_n^{\text{I}}\|_{n=l \dots \infty}, \quad q = \|Q_n^{\text{II}}\|_{n=l \dots \infty}, \quad t = \|T_n^{\text{III}}\|_{n=l \dots \infty}.$$

Элементы матричных операторов имеют вид:

$$\alpha = \|\alpha_{mn}\| = \int_c^d \varphi_n^{\text{II}}(x) \varphi_m^{\text{I}}(x) dx, \quad \beta = \|\beta_{mn}\| = \int_b^h \varphi_n^{\text{III}}(x) \varphi_m^{\text{I}}(x) dx, \quad \gamma^j = \|\delta_{mn} \gamma_n^j\|_{m=l \dots \infty}^{n=l \dots \infty},$$

$\alpha^{\text{T}}, \beta^{\text{T}}$ - транспонированные к α, β матрицы, I - единичная матрица.

Приближенное решение $u^N(x, z) = U_N^j(x, z)$ в каждой частичной области ищется в виде конечного ряда:

$$u^N(x, z) = \begin{cases} U_N^I(x, z) = A_{n0}^I \varphi_{n0}^I(x) e^{i\gamma_{n0}^I z} + \sum_{n=1}^{N_I} R_n^I \varphi_n^I(x) e^{-i\gamma_n^I z}, \\ U_N^{II}(x, z) = \sum_{n=1}^{N_{II}} Q_n^{II} \varphi_n^{II}(x) e^{i\gamma_n^{II} z} + \sum_{n=1}^{N_{II}} B_n^{II} \varphi_n^{II}(x) e^{-i\gamma_n^{II} z}, \\ U_N^{III}(x, z) = \sum_{n=1}^{N_{III}} T_n^{III} \varphi_n^{III}(x) e^{i\gamma_n^{III} z} + \sum_{n=1}^{N_{III}} C_n^{III} \varphi_n^{III}(x) e^{-i\gamma_n^{III} z}. \end{cases}$$

Функция $u^N(x, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), граничным условиям (3), условиям возбуждения и излучения в виде (2). Уравнение (6) решается методом редукции, проводится его замена на приближенное уравнение $A_n x = B_n y$, в котором все бесконечные матрицы заменяются на усеченные, а число учитываемых волн в каждом волноводе соответственно равно $N_I = N_{II} + N_{III}$.

В пятом параграфе проводится обоснование сходимости решения редуцированной СЛАУ относительно амплитуд нормальных волн к точному решению задачи. Для амплитуд нормальных волн вводятся координатные гильбертовы пространства, элементами которых являются бесконечные последовательности комплексных чисел:

$$f_l = \left\{ d \mid d = (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots), \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 (\lambda_n^{j^2}) < \infty \right\},$$

где $\lambda_n^{j^2} = K_j^2 - (\gamma_n^j)^2$. Скалярное произведение и норма в пространстве f_l задаются следующим образом:

$$\|d\|_l = \sqrt{(d, d)}, \quad (d, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \bar{g}_n (\lambda_n^{j^2}), \quad \forall d, g \in f_l.$$

Утверждение 1. Для сходимости решения редуцированной СЛАУ относительно амплитуд нормальных волн $A_n x = B_n y$ к точному решению задачи достаточно существования и непрерывности обратного оператора A^{-1} рассматриваемой системы (6) в координатном пространстве f_l .

Вторая глава диссертации посвящена математическому исследованию и решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом в многосвязной волноводной области с кусочно-гладкой границей, имеющей критические точки.

В первом параграфе проведена физическая и математическая постановка краевой задачи. Рассматривается задача о распространении электромагнитной волны H_{10} в нерегулярном волноводе, состоящем из трех частей: регулярный полубесконечный волновод A шириной a соединяется с нерегулярным переходным участком L длиной l , который в свою очередь соединяется с волноводом шириной h , разветвленным серией металлических вставок конечной толщины t на M регулярных полубесконечных волноводах B_j шириной $b_j, j=1, 2, \dots, M$.

Требуется найти решение уравнения Гельмгольца $u(x, z) = E_y(x, z)$:

$$Lu = \Delta u(x, z) + K^2(x, z)u(x, z) = 0 \quad (7)$$

в области Ω с границей $\partial\Omega$

$$\Omega = \{(x, z) \mid 0 \leq x \leq F(z), -\infty < z < \infty\}, \quad F(z) = \begin{cases} a, & -\infty < z < 0 \\ L(z), & 0 \leq z \leq l, \\ h, & l < z < \infty \end{cases}$$

где $L(z)$ - уравнение боковой поверхности переходного участка;

$$K^2(x, z) = k^2 \varepsilon(x, z), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \varepsilon(x, z) = \begin{cases} \varepsilon^A, & -\infty < z < 0, \quad 0 \leq x \leq a \\ \varepsilon^L, & 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq x \leq L(z) \\ \varepsilon^{B_j}, & l < z < \infty, \quad x_j \leq x \leq x_j + b_j \end{cases},$$

$\varepsilon(x, z)$ - в общем случае комплексная кусочно-постоянная функция координат, функция $L(z)$ выбирается исходя из влияния геометрии переходного участка на величину коэффициента отражения падающей волны:

$$L(z) = \frac{al + (h-a)z}{l}. \quad (8)$$

Искомое решение должно удовлетворять следующим условиям:

граничному условию Дирихле на границе $\partial\Omega$ области Ω :

$$u(x, z)|_{\partial\Omega} = 0; \quad (9)$$

условиям возбуждения и излучения:

$$\begin{aligned} u^A(x, z) &= \varphi_{n0}^A(x) e^{i\gamma_{n0}^A z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \varphi_n^A(x) e^{-i\gamma_n^A z}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad z < 0, \quad n_0 = 1 \\ u^{B_j}(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{B_j} \varphi_n^{B_j}(x) e^{i\gamma_n^{B_j}(z-l)}, \quad x_j \leq x \leq x_j + b_j, \quad z > l, \quad j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (10)$$

где $R_n^A, T_n^{B_j}$ - неизвестные коэффициенты отражения и прохождения, $\varphi_n^A(x), \varphi_n^{B_j}(x)$ - собственные функции волновода A и каждого из волноводов B_j ;

условиям сопряжения ($z_1 = 0, z_2 = l$ - плоскости сочленения подобластей):

$$\begin{aligned} u(x, z)|_{z_{1,2}-0} &= u(x, z)|_{z_{1,2}+0}, \\ \frac{\partial u(x, z)}{\partial n} \Big|_{z_{1,2}-0} &= \frac{\partial u(x, z)}{\partial n} \Big|_{z_{1,2}+0}; \end{aligned} \quad (11)$$

условию Мейкснера в окрестности критических точек границы $\partial\Omega$:

$$\int_{V_\rho} (|\nabla u(x, z)|^2 + |u(x, z)|^2) dV < \infty, \quad (12)$$

где V_ρ - любая окрестность, содержащая критическую точку.

Во втором параграфе рассматривается численный алгоритм решения краевой задачи. Приближенное решение задачи строится на основе неполного метода Галеркина, применение которого к задаче дифракции в нерегулярном волноводе было разработано в работах А.Г. Свешникова. В этом методе краевая задача для уравнения в частных производных сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Суть приближенного метода решения краевой задачи заключается в формулировке системы условий ортогональности обеспечивающей выполнение в энергетическом смысле условий сшивания в плоскости сочленения волноводов и граничных условий на стенках.

Представление для приближенного решения в области нерегулярности выбирается по системе функций, не зависящих от формы волновода. Для этого за счет перехода к другой системе координат производится отображение внутренней области волновода с нерегулярностью на регулярную полосу $\tilde{\Omega} = \{(\xi, \eta) \mid 0 \leq \xi \leq l, -\infty < \eta < \infty\}$ с границей $\partial\tilde{\Omega}$.

Координаты преобразуются следующим образом:

$$\xi = \frac{x}{F(z)}; \quad \eta = z; \quad \frac{x}{F(z)} = \begin{cases} \frac{x}{a}; & -\infty < \eta < 0 \\ \frac{x}{L(z)}; & 0 \leq \eta \leq l \\ \frac{x}{h}; & l < \eta < \infty \end{cases},$$

т.е. имеет место следующий переход

$$x = \frac{(al + (h-a)\eta)\xi}{l}, \quad z = \eta, \quad L(\eta) = \frac{al + (h-a)\eta}{l}, \quad J = \frac{al + (h-a)\eta}{l},$$

где J - якобиан перехода к новым координатам.

В новых координатах уравнение Гельмгольца будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{l^2 + \xi^2 (a-h)^2}{(al + (h-a)\eta)^2} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{(a-h)}{(al + (h-a)\eta)} \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \\ & + 2\xi \frac{(a-h)^2}{(al + (h-a)\eta)^2} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} + k^2 \varepsilon(\xi, \eta) u(\xi, \eta) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия Дирихле на границе $\partial\tilde{\Omega}$ области $\tilde{\Omega}$:

$$u(\xi, \eta)|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \quad (14)$$

Условия излучения и возбуждения в новых координатах:

$$\begin{aligned} u^A(\xi, \eta) &= \varphi_{n_0}^A(\xi) e^{i\gamma_{n_0}^A \eta} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \varphi_n^A(\xi) e^{-i\gamma_n^A \eta}, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad \eta < 0, \quad n_0 = l, \\ u^{B_j}(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{B_j} \varphi_n^{B_j}(\xi) e^{i\gamma_n^{B_j} (\eta-l)}, \quad \xi_j \leq \xi \leq \xi_j + \frac{b_j}{h}, \quad \eta > l, \quad j = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (15)$$

Приближенное решение уравнения (13) с граничным условием (14) и условиями (15) будем искать в виде ряда:

$$u_N(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^N \tilde{A}_n(\eta) \varphi_n(\xi),$$

где $\varphi_n(\xi) = \sin \pi n \xi$ - нормированные собственные функции поперечных сечений $\eta = 0, \eta = l$, N - количество гармоник; $\tilde{A}_n(\eta)$ - неизвестные коэффициенты.

Система дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\tilde{A}_n(\eta)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) получается из требования ортогональности дифференциального оператора приближенного решения $L[u_N]$ к первым N функциям $\varphi_m(\xi)$. Имеет место соотношение:

$$\int_0^l L[u_N^L(\xi, \eta)] \varphi_m(\xi) J d\xi = \int_0^l (\Delta u_N^L(\xi, \eta) + k^2 \varepsilon(\xi, \eta) u_N^L(\xi, \eta)) \varphi_m(\xi) J d\xi = 0.$$

Система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\tilde{A}_m''(\eta) = \sum_{n=1}^N [K_{mn}(\eta) \tilde{A}_n'(\eta) + L_{mn}(\eta) \tilde{A}_n(\eta)], \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где коэффициенты представлены следующими выражениями:

$$K_{mn} = \begin{cases} \frac{(a-h)}{(al + (h-a)\eta)}, & \text{при } m = n \\ (-1)^m 2m \frac{2(a-h)}{(al + (h-a)\eta)} \sum_{n=1}^N \frac{n(-1)^n}{(m^2 - n^2)}, & \text{при } m \neq n, \end{cases},$$

$$L_{mn} = \begin{cases} \pi^2 n^2 \left(\frac{l^2}{(al + (h-a)\eta)^2} + \frac{1}{3} \frac{(a-h)^2}{(al + (h-a)\eta)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(a-h)^2}{(al + (h-a)\eta)^2} - k^2 \varepsilon(\xi, \eta), & \text{при } m = n \\ (-1)^m 2m \frac{2(a-h)^2}{(al + (h-a)\eta)^2} \sum_{n=1}^N \frac{n(-1)^n}{(m^2 - n^2)} \left(1 + \frac{4n^2}{m^2 - n^2} \right) & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений получим с помощью применения проекционных условий сшивания в сечениях $\eta = 0$ и $\eta = l$.

В сечении $\eta = 0$ имеют место интегральные соотношения:

$$\int_0^l u_N^L(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0} \varphi_m^A(\xi) d\xi = \int_0^l u_N^A(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0} \varphi_m^A(\xi) d\xi$$

$$\int_0^l \frac{\partial u_N^L(\xi, \eta)}{\partial n} \Big|_{\eta=0} \varphi_m^L(\xi) d\xi = \int_0^l \frac{\partial u_N^A(\xi, \eta)}{\partial n} \Big|_{\eta=0} \varphi_m^L(\xi) d\xi,$$

в сечении $\eta = l$:

$$\int_{\xi_j}^{\xi_j + \frac{b_j}{h}} u_N^L(\xi, \eta) \Big|_{\eta=l} \varphi_m^{B_j}(\xi) d\xi = \int_{\xi_j}^{\xi_j + \frac{b_j}{h}} u_N^{B_j}(\xi, \eta) \Big|_{\eta=l} \varphi_m^{B_j}(\xi) d\xi$$

$$\int_0^l \frac{\partial u_N^L(\xi, \eta)}{\partial n} \Big|_{\eta=l} \varphi_m^L(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^M \int_{\xi_j}^{\xi_j + \frac{b_j}{h}} \frac{\partial u_N^{B_j}(\xi, \eta)}{\partial n} \Big|_{\eta=l} \varphi_m^L(\xi) d\xi$$

Окончательно краевая задача для системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\tilde{A}_m''(\eta) = \sum_{n=1}^N [K_{mn}(\eta) \tilde{A}_n'(\eta) + L_{mn}(\eta) \tilde{A}_n(\eta)],$$

$$\sum_{n=1}^N [B_{mn} \tilde{A}_n'(0) + C_{mn} \tilde{A}_n(0)] = W_m,$$

$$\sum_{n=1}^N [D_{mn} \tilde{A}_n'(l) + G_{mn} \tilde{A}_n(l)] = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Далее с помощью векторного преобразования краевая задача приводится к удобному для применения численных методов виду и решается методом прогонки.

В третьем параграфе проводится исследование существования и единственности приближенного решения краевой задачи. Основываясь на логике работ А.Г. Свешникова для точного и для приближенного решения выводится энергетическое соотношение вида:

$$Im K^2 \iint_{\Omega} |u_N^L(x, z)|^2 dS + Re \gamma_{n0}^A |R_{n0}^{AN}|^2 + \sum_j^M Re \gamma_{n0}^{B_j} |T_{n0}^{B_j N}|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} Re \gamma_n^A |R_n^{AN}|^2 + \sum_j^M \sum_{n=2}^{\infty} Re \gamma_n^{B_j} |T_n^{B_j N}|^2 = 1.$$

Пользуясь далее аналогичностью энергетического соотношения для точного и для приближенного решений краевой задачи, рассматриваются условия ограниченности, при выполнении которых можно говорить о существовании и единственности приближенного решения.

Утверждение 2. Решение задачи (7-12) существует и единственно, при этом приближенное решение, строится по модифицированной схеме неполного метода Галеркина.

В четвертом параграфе доказана сходимость приближенного решения $u_N(\xi, \eta)$ к точному решению краевой задачи $u(\xi, \eta)$ в пространстве L_2 . Для этого проводится оценка функции $U_N(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - u_N(\xi, \eta)$ при $N \rightarrow \infty$. Для функции $U_N(\xi, \eta)$ выводится соотношение аналогичное соотношению энергетического типа для приближенного решения и доказывается его стремление к нулю при $N \rightarrow \infty$, откуда следует сходимость в среднем приближенного решения к точному.

Утверждение 3. Приближенное решение $u_N(\xi, \eta)$ сходится к точному решению $u(\xi, \eta)$ краевой задачи в пространстве L_2 .

Третья глава посвящена применению представленных алгоритмов при решении некоторых физических задач, в частности при исследовании явления резонансной дифракции и при моделировании устройств СВЧ, в том числе базовых элементов систем сверхбыстрой обработки информации на объемных интегральных схемах СВЧ и КВЧ диапазонов. Первый параграф иллюстрирует многообразие применений в современной микроэлектронике волноведущих структур, включающих в себя разветвления и скачкообразные

нерегулярности. Приводится обзор многоканальных волноведущих устройств: делителей и сумматоров мощности, фильтров.

Во втором параграфе рассматриваются результаты моделирования реальных структур, проводится их теоретическое исследование, сравнение с результатами, полученными другими методами, и физическим экспериментом.

На примере ключевой задачи о ступенчатом сочленении волноводов в разделе 2.1 второго параграфа проведено исследование явления «относительной сходимости» (т.е. сходимости редуцированных решений к различным пределам в зависимости от выбранного способа усечения подсистем СЛАУ). Исследование показало, что наилучший результат получается, если отношение числа волн, взятых в волноводах, будет равно отношению их поперечных сечений.

При исследовании дифракции волны H_{10} на “нижней ступеньке” в волново-де проведено сравнение результатов полученных с помощью алгоритма первой главы, базирующегося на проекционном методе сшивания (ПМС), с результатами, полученными другими методами: методом моментов (ММ) и методом полуобращения матричных уравнений (МПО) (рис. 1). Отношение поперечных сечений волноводов и длина волны при расчетах фиксируются: $ab/a = 0,501$, $\kappa = a/\lambda = 1,3$. Сравнение трех методов показало, что используемый алгоритм обеспечивает хорошую сходимость и достаточную точность результатов.

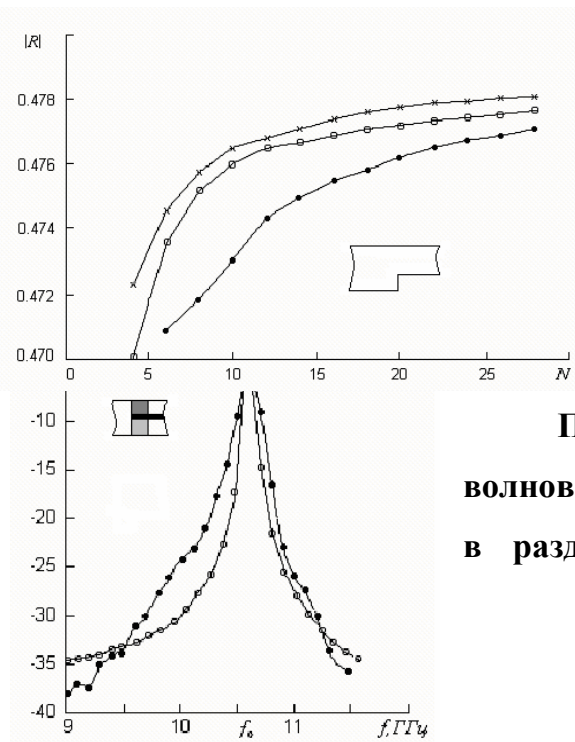


Рис. 1. График зависимости модуля коэффициента отражения $|R|$ от порядка N усечения СЛАУ при расчетах разными методами: ПМС - белые кружки, ММ - черные точки, МПО - крестики.

При моделировании двухканального волноводно-диэлектрического резонатора (ВДР) в разделе 2.2 второго параграфа проведено

сравнение полученных результатов с физическим экспериментом. Рассматривается волновод шириной 23 мм, разделенный металлической полуплоскостью толщиной 0,3 мм на два волновода шириной 12,1 и 10,6 мм с частичным диэлектрическим заполнением $\epsilon^{\text{II}} = \epsilon^{\text{III}} = 2,25$. На рис. 2 представлена амплитудно-частотная характеристика двухканального ВДР, где коэффициент передачи $a = 10 \lg(1 - |R|^2)^{-1}$. Экспериментальная кривая обозначена черными точками, кривая, посчитанная с помощью ПМС – белыми кружками. Из рисунка видно, что расчетные и экспериментальные данные находятся в хорошем соответствии, точно совпадает резонансная частота ($f_0 = 10,6$ ГГц) и значения коэффициента передачи.

В разделе 2.3 представлены результаты моделирования двухканальных и трехканальных делителей и сумматоров мощности. В основу алгоритма расчета заложен алгоритм, рассмотренный во второй главе.

В разделе 2.4 приведены результаты расчета волноведущих систем, состоящих из последовательности идентичных волноводных узлов.

Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика двухканального ВДР. Сравнение с экспериментальными данными.

Рассматривается задача расчета многозвенных фильтров на одиночных и сдвоенных ленточных диафрагмах. Используемый вычислительный алгоритм основан на применении комбинации проекционного метода сшивания и метода декомпозиции (метода S-матриц). На рис. 3 представлены графики зависимости величины $L = -10 \lg |T_{11}|^2$ от частоты f . Для фильтра на одиночных диафрагмах (см. рис. 3, а) проведено сравнение расчетной кривой (сплошная линия) с физическим экспериментом (кружки) и результатами другого метода (квадраты). Для фильтра на двойных диафрагмах (см. рис. 3, б) исследуется влияние на расчетную кривую изменения расстояния по вертикали между металлическими вставками (dc). При увеличении расстояния между вставками прослеживается сужение полосы пропускания фильтра и значительное уменьшение глубины пика. Параметры волноводов: ширина 7,2 мм; толщина одиночных металлических вставок 0,05 мм; толщина двойных металлических вставок 0,007 мм; расстояние между

металлическими вставками l_i и длины вставок p_i могут варьироваться, влияя в свою очередь на различные характеристики исследуемых фильтров.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе.

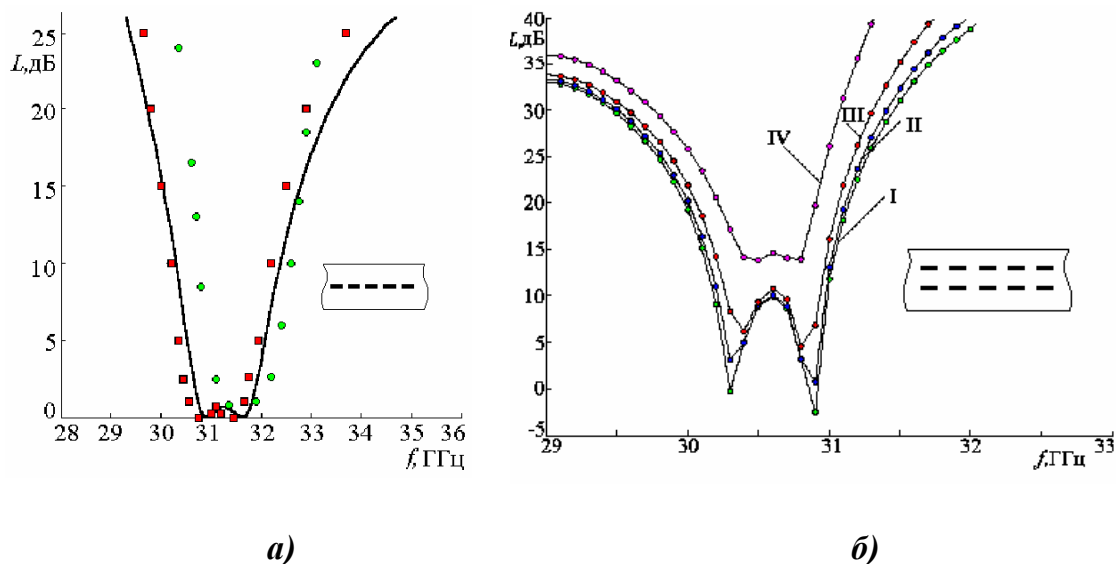


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика структуры с пятью металлическими включениями: а - фильтр на одиночных ленточных диафрагмах, б - фильтр на двойных ленточных диафрагмах ($d_c = 0,36$ мм – линия I; $d_c = 0,66$ мм – линия II; $d_c = 1,36$ мм – линия III; $d_c = 3,36$ мм – линия IV).

Основные результаты

1. Математически поставлена и решена краевая задача для уравнения Гельмгольца в многосвязных волноводных областях, с границами, имеющими критические точки, в которых выполнены условия Мейкснера, и кусочно-непрерывным заполнением.
2. Для областей с кусочно-постоянной границей и кусочно-постоянным заполнением разработан, математически обоснован и реализован алгоритм решения этой задачи, основанный на проекционных условиях сшивания, записанных в интегральном виде.

Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения краевой задачи.

Доказана сходимость численного решения редуцированной системы

линейных алгебраических уравнений к точному решению задачи.

3. Для областей с кусочно-гладкой границей и кусочно-непрерывным заполнением разработан, математически обоснован и численно реализован алгоритм решения рассматриваемой задачи, в основе которого лежит неполный метод Галеркина с применением интегральных проекционных условий сшивания.

Доказаны существование и единственность приближенного решения.

Доказана сходимость приближенного решения к точному решению краевой задачи в пространстве L_2 .

4. Получены новые физические результаты с использованием численной реализации рассматриваемых алгоритмов решения краевой задачи.
5. Проведено исследование предлагаемой математической модели на примере многоканальных делителей мощности и многозвенных фильтров, а также сравнение полученных результатов вычислений с данными физического эксперимента и результатами других вычислительных методов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Владимиру Павловичу Моденову за научное руководство, многочисленные плодотворные дискуссии на всех этапах работы, постоянное внимание и поддержку.

Хотелось бы также выразить искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, доценту Андрею Леонидовичу Делицыну за научное сотрудничество, помощь и ценные советы.

Автор благодарна руководителям семинара «Численные методы электродинамики» профессорам А.Г. Свешникову и А.С. Ильинскому и всем участникам, за внимание к работе и полезные замечания, а также всем сотрудникам кафедры математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Крюкова Ю.Ю. (Петрова) Двумерная задача дифракции на скачкообразных волноводных нерегулярностях // VII Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2000». Сборник тезисов. – М.: Физический факультет МГУ, 2000. – С. 276.
2. Крюкова Ю.Ю. (Петрова), Моденов В.П. Проекционный метод сшивания в теории плоского нерегулярного волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2001. – Т. 41, №9. – С. 1422-1428.
3. Крюкова Ю.Ю. (Петрова), Моденов В.П. Задача дифракции на скачкообразных металлодиэлектрических волноводных нерегулярностях // Труды XII Всероссийской школы-конференции по дифракции и распространению волн. – М.: МФТИ (ГУ), 2001. – Т.2. – С. 376-380.
4. Крюкова Ю.Ю. (Петрова), Моденов В.П. Краевая задача для уравнения Гельмгольца в многосвязной волноводной области с кусочно-постоянной границей // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2002. – №3. – С. 36-40.
5. Крюкова Ю.Ю. (Петрова), Моденов В.П. Электродинамический анализ скачкообразных нерегулярностей плоского волновода // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. – 2002. – Т.10, №2 (34). – С. 71-72.
6. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Задача о резонансной дифракции в многосвязных волноводных областях // Труды IX Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн». – М.: Физический факультет МГУ, 2003. – Т.1. – С. 65-66.
7. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Задачи дифракции в электродинамике плоскостойких металлодиэлектрических волноводящих структур // Прилож. к журн. «Физика волновых процессов и радиотехнические системы». – 2003. – С. 249.

8. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Математическое моделирование резонансной дифракции в волноведущих металлодиэлектрических структурах // Прилож. к журн. «Физика волновых процессов и радиотехнические системы». - 2004. – С.125-126.
9. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Математическое моделирование многоканальных волноводных делителей мощности // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. – 2004. – Т.12, № 2-4 (40). – С. 77-83.
10. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Математическое моделирование волноведущих систем из последовательности базовых блоков // Третья всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике». Тезисы докладов. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. - С. 135-136.
11. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Расчет волноводно-резонансных систем из последовательности базовых блоков // Труды Третьей всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике». - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – С. 190-198.
12. Моденов В.П., Петрова Ю.Ю. Математическое моделирование волноводных многоканальных сумматоров и делителей // Прилож. к журн. «Физика волновых процессов и радиотехнические системы». – 2005. – С. 140-141.
13. Петрова Ю.Ю. Решение уравнения Гельмгольца в многосвязных волноводных областях // XII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов 2005». – М.: Физический факультет МГУ, 2005. – Т. 1 – С. 113-114.