Московский Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова.

Физический факультет

на правах рукописи

Рыжаков Глеб Владимирович

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЕ ПРЕДЕЛЫ КВАНТОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

Специальность: 01.04.02 — «теоретическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук.

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук А. М. Чеботарёв
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук О. Г. Смолянов
	кандидат физико-математических наук Е. Р. Лубенец
Ведущая организация:	Математический институт РАН им. В. А. Стеклова

Защита состоится «16» ноября 2006 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета К 501.001.17 Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ауд. ____.

С диссертационной работой можно ознакомится в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан «___» октября 2006 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета К 501.001.17 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

П. А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Открытая квантовая система представляет собой квантовую систему, взаимодействующую с классическим или квантовым окружением (резервуаром), имеющим большое или бесконечное число степеней свободы. Примерами открытых систем могут служить кристаллическая структура, отдельный атом или интерферометр, взаимодействующие с электромагнитным излучением или другими внешними полями, переносящими энергию. Точное решение уравнения, описывающего эволюцию открытой системы, обычно не известно и поэтому рассматривается более простая эволюция квантовой системы усреднённая по состоянию окружения (редуцированная эволюция).

В квантовом случае, редуцированная динамика описывается квантовым кинетическим уравнением для матрицы плотности или двойственным уравнением для операторов из алгебре наблюдаемых. Вывод квантовых кинетических уравнений, начиная с работ Н. Н. Боголюбова, и исследованных в работах И. Р. Пригожина, Л. ван Хова, Е. Дэвиса, А. С. Холево, С. В. Козырева, И. В. Воловича, относится к числу актуальных задач современной математической физики. Общий вид эволюционного уравнения, разрешающий оператор которого — квантовая динамическая полугруппа — равномерно непрерывен и имеет вид вполне положительного отображения, сохраняющего единичный оператор, был описан Г. Линдбладом и, независимо, В. Горини, А. Коссаковским и Е. Ч. Дж. Сударшаном.

В диссертации показано, что решение ряда задач, связанных с выводами решений квантовых кинетических уравнений, тесно связано с другим классом важных задач современной математической физики — предельным переходом к точечному взаимодействию, изучавшимся в работах Ф. А. Березина, Л. Д. Фадеева, С. Альберио, С. Г. Крейна, Р. А. Минлоса и др. В результате такого переходы возникают квантовые стохастические дифференциальные уравнения. Исследованием КСДУ занимались, в частности, Р. Л. Хадсон и К. Р. Партасарати. Они развили бозонное и фермионное стохастические исчисления, получили некоммутативные аналоги формулы Ито. В работах А. М. Чеботарёва показано, что решение квантового стохастического дифференциального уравнения унитарно эквивалентно задаче Коши для уравнения

Шрёдингера с генератором, который реализуется как симметричная краевая задача. В диссертационной работе выводится предельный разрешающий оператор в случае некоммутирующих ограниченных операторных коэффициентов и показывается в явном виде наличие краевого условия для предельного генератора.

Среди физических приложений, для описания которых возможно применение результатов диссертационной работы, можно назвать модельную задачу взаимодействия квантового осциллятора с окружением, представляющим собой пучок фотонов. Такие задачи возникают, к примеру, при построении математической модели детектора гравитационных волн. Данная модель изучалась У. Люиселлом, В. Б. Брагинским, Ф. Я. Халили, К. Брифом, А. Маном, П. Л. Найтом, А. Ф. Пейсом, М. Дж. Коллетом К. В. Гардинером и др.

Цель работы. Изучение модельных физических задач, связанных с точечным взаимодействием системы и её окружения. Рассмотренные в диссертации задачи являются достаточно сложными с точки зрения математики поскольку в результате предельных переходов задача Коши для уравнения Шрёдингера превращается в начально-краевую задачу с операторными коэффициентами в граничных условиях. В диссертации, так же, проявляется связь между такими пределами и квантовыми стохастическими дифференциальными уравнениями, которые, в свою очередь, позволяют перейти к квантовым кинетическим уравнениям, описывающие усреднённую по состоянию окружения необратимую эволюцию системы.

Методы исследования. В диссертации используются строгие методы математической физики.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Найдена асимптотика по t семейства разрешающих операторов уравнения Шрёдингера с гамильтонианом с некоммутирующими ограниченными коэффициентами, действующем в произведении гильбертовых пространств, и зависящим от действительного параметра α. Вычислен стохастический предел $\alpha \to 0$, который физически соответствует переходу к точечному взаимодействию.

2. Получен в явном виде предельный генератор разрешающего оператора, выведено предельное уравнение, которому он подчиняется и предельное квантовое стохастическое дифференциальное уравнение в форме Хадсона—Партасарати.

3. На основе полученной асимптотики предельного оператора построено точное решение.

4. Основываясь на явном виде предельного разрешающего оператора изучена эволюция различных открытых квантовых систем, в частности, квантового осциллятора с диссипацией, взаимодействующего с излучением при наличии силы, действующей на осциллятор. К этой же задаче применён другой подход — решено стохастическое дифференциальное уравнение для редуцированной матрицы плотности осциллятора в координатном представлении.

5. Получено квантовое кинетическое уравнение для произвольной наблюдаемой с использованием явного вида предельного разрешающего оператора.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами, работающими в области исследования стохастических дифференциальных уравнений, открытых систем в физике и электронике.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Научная конференция «Ломоносовские чтения-2000»,
- Научная конференция «Ломоносов-2001»,
- Научная конференция «Ломоносовские чтения-2004».
- Научная конференция «Девятнадцатые международные Плехановские чтения».

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ, руководитель — академик В. П. Маслов.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация изложена на 138 страницах и состоит из введения и трёх глав. Библиография содержит 67 наименований.

Краткое содержание диссертационной работы

Во введении даётся обзор исследований, связанных с темой диссертации, приводятся определения основных понятий, даётся краткий обзор основных результатов диссертации.

Следует отметить, что задача, рассматриваемая в диссертации, в случае уравнения с коммутирующими операторными коэффициентами, рассматривалась в работах А. М. Чеботарёва, Д. В. Викторова, М. Грегоратти и др. Обобщение этих результатов на уравнение с некоммутирующими коэффициентами, важное для приложений в физических задачах, является сложной с точки зрения математического анализа. Подход к решению этой задачи, развиваемый в данной работе, состоит в следующем. Сначала изучается необходимое условие, которому должен удовлетворять формальный генератор уравнения, соответствующему пределу точечного взаимодействия. Затем, строится полугруппа унитарных операторов, имеющая найденный генератор, и устанавливается однозначная связь между предельными генераторами и КСДУ, для которого известны теоремы существования и единственности решения. Таким образом, обосновывается существенная самосопряжённость ранее найденных генераторов. Важно отметить, что связь между операторными коэффициентами исходного уравнения и предельной задачи является существенно нелинейной.

В первой главе рассматривается асимптотика по t семейства разрешающих операторов уравнения Шрёдингера, зависящего от действительного параметра α и рассматривается стохастический предел $\alpha \to 0$. Учитывая, что коэффициенты исходного уравнения Шрёдингера не зависят от времени, полученных оценок достаточно для вычисления в явном виде предельного генератора разрешающего оператора и вывода предельного уравнения, которому он подчиняется. Также выводится предельное квантовое стохастическое дифференциальное уравнение в форме Хадсона—Партасарати. Затем, на основе полученное асимптотики предельного оператора строится точное решение.

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — алгебра ограниченных операторов действующих в $\mathcal{H}$, $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ — симметричное фоковское пространство. Рассмотрим уравнение для оператора эволюции U_t

$$\frac{dU_t}{dt} = iHU_t, \quad U(0) = I \tag{1}$$

с гамильтонианом H, действующем в тензорном произведении $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$, где

$$\begin{gathered} H = H_0 \otimes I - I \otimes i\nabla + H_{\text{int}}, \\ H_{\text{int}} = K \otimes \Lambda(g) + R \otimes A^\dagger(g) + R^* \otimes A(g), \end{gathered} \tag{2}$$

причем $K^* = K$, $H_0^* = H_0$ и R — ограниченные операторы,

$$\Lambda(g) = \int dx\, g(x)\, a^\dagger(x) a(x), \quad A(g) = \int dx\, \overline{g}(x)\, a(x),$$

$A^\dagger(g) = A^*(g)$, $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $a(x)$ и $a^\dagger(x)$ — плотности операторов уничтожения и рождения.

Вместо фиксированной функции g, входящей в определение гамильтониана H_{int}, будем рассматривать семейство неотрицательных финитных функций $g_\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1]$, которое имеет пределом дельта-функцию:

$$\lim_{\alpha \to 0} \int f(x) g_\alpha(x)\, dx = f(0)$$

для любой непрерывной ограниченной функции f, причем диаметр $d_g(\alpha)$ носителя функции g_α стремится к нулю при $\alpha \to 0$. С физической точки зрения, такой предел соответствует модели точечного взаимодействием системы с окружением. Формальный предел семейства гамильтонианов $\lim\limits_{\alpha\to 0} H^{\alpha}_{\text{int}}$ является *сингулярно возмущённым оператором*, так как результат его действия на векторы вида $\psi(v)\otimes r$, где $\psi(v)\in\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ — когерентный вектор, $v(0)=0$, $r\in\mathcal{H}$, равен нулю, а линейная оболочка таких векторов плотна в $\mathfrak{H}$.

В дальнейшем, где это не приводит к путанице, будем опускать индекс α. Случай, когда операторы K, R и H_0 коммутируют, рассмотрен в [5]. В диссертационной работе рассматривается обобщение на случай некоммутирующих операторов.

Рассмотрим уравнение (1) в представление взаимодействия, порождаемое оператором $\widehat{H}_0 = H_0\otimes I - I\otimes i\nabla$, не зависящим от g:

$$\frac{d\widetilde{U}(t)}{dt} = iH(t)\widetilde{U}(t), \quad \widetilde{U}(t) = e^{-i\widehat{H}_0 t}U_t \tag{3}$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(t) &= e^{-i\widehat{H}_0 t} H_{\text{int}} e^{i\widehat{H}_0 t} \\ &= K(t)\otimes\Lambda_t(g) + R(t)\otimes A^{\dagger}_t(g) + R^*(t)\otimes A_t(g), \end{aligned}\tag{4}$$

где $K(t)$ и $R(t)$ — непрерывные по норме семейства ограниченных операторов

$$K(t) = e^{-iH_0 t}Ke^{iH_0 t}, \quad R(t) = e^{-iH_0 t}Re^{iH_0 t},$$

а операторы $\Lambda_t(g)$, $A_t(g)$ и $A^{\dagger}_t(g) = A^*_t(g)$ являются неограниченными:

$$\begin{aligned} \Lambda_t(g) &= e^{-t\nabla}\Lambda(g)e^{t\nabla} = \int dx\, g(x-t)\, a^{\dagger}(x)a(x), \\ A_t(g) &= e^{-t\nabla}A(g)e^{t\nabla} = \int dx\, g(x-t)\, a(x). \end{aligned}$$

В качестве тотального множества, задающего область определения данных операторов, возьмём линейную оболочку $\mathcal{L}_\varepsilon$ множества

$$\begin{aligned} E^S_\varepsilon = \bigl\{\phi(f)\colon \phi(f)\in E^S,& \\ &\|f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant\varepsilon, \|f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes L_2} < 1, f\in W^1_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\mathbb{R})\bigr\}, \end{aligned}$$

где E^S — множество когерентных векторов, $0<\varepsilon\leqslant 1$. Линейная оболочка такого множества плотна в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$; рассматриваемые операторы — сильно непрерывное по t семейство операторов, действующие из E_ε^S в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$. С помощью него введём следующую норму в $\mathfrak{H}$:

$$p(X) = \sup_{\psi,h} \|Xh \otimes \psi\|_{\mathfrak{H}}, \text{ где } \psi \in E_\varepsilon^S,\ h \in \mathcal{H}, \qquad (5)$$
$$\text{причём } \|\psi\|_{\Gamma^S} = \|h\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

Свойства преднормы для $p(X)$ проверяются непосредственно. Свойство нормы $p(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ следует из линейности рассматриваемых операторов и тотальности множества E_ε^S. Норма $p(X)$ определяет локально выпуклую топологию в $\mathfrak{H}$.

Пусть $K_\Lambda(t) = \int_0^t K(s)\Lambda_s(g)\,ds$ и $K_g(t,u) = \int_0^t K(s)g(u-s)\,ds$. Положим

$$R(t,u) = e^{-iK_g(t,u)}\, e^{-iK_\Lambda(t)} R(t) e^{iK_\Lambda(t)}$$

и рассмотрим семейство операторов

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_\alpha(t) = e^{iK_\Lambda(t)} \exp\Bigg\{ -\int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \int du\, \widetilde{R^*}(\tau,u)\widetilde{R}(s,u) \\ \times g(u-\tau)g(u-s)\Bigg\} \\ \times \exp\left\{ i\int dw\, a^\dagger(w) \int_0^t d\tau\, g(w-\tau)\widetilde{R}(\tau,w)\right\} \\ \times \exp\left\{ i\int dw \int_0^t d\tau\, \widetilde{R^*}(\tau,w)\, a(w) g(w-\tau)\right\}.\end{aligned}$$

Семейство операторов $U_\alpha(t)$ корректно определено на $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_\varepsilon \otimes \mathcal{H}$, его зависимость от α обусловлена семейством функций g_α. Найдём асимптотику разрешающего оператора уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (4).

Теорема 1.5. *Пусть $H(t)$ определено в (4). Тогда для любых единич-*

ных векторов $\psi \in E_\varepsilon^S$, $h \in \mathcal{H}$ справедлива сильная оценка

$$\left\| \left(\widetilde{U}_\alpha(t+\Delta t) - \exp\Big\{ \int\limits_t^{t+\Delta t} H(\tau) d\tau \Big\} \widetilde{U}_\alpha(t) \right) h \otimes \psi \right\|_{\mathfrak{H}}$$
$$= O\big(\Delta t^{3/2}\big) C_1(\psi) + O(\sqrt{t\,\Delta t})\, C_2(\psi) + O(\min(\sqrt{\alpha}, \sqrt{t}, \sqrt{\Delta t})) C_3(\psi),$$

где $C_j(\psi)$, $j=1,2,3$ — некоторые положительные функционалы

Рассматривая теперь оператор $U(t) = e^{i\widehat{H}_0 t}\widetilde{U}(t)$, получаем следствие данной теоремы.

Теорема 1.6. *Пусть H_α определено в (2). Тогда для любых единичных векторов $\psi \in E_\varepsilon^S$, $h \in \mathcal{H}$ справедлива сильная оценка*

$$\|(U_\alpha(t) - \exp\{iH_\alpha\, t\})\, h \otimes \varphi\|_{\mathfrak{H}} = C_1(\varphi) O\big(t^{3/2}\big),$$

где C_1 — некоторый положительный функционал, действующий в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$.

Рассмотрим предел семейства операторов U_α при

$$\lim_{\alpha \to 0} g_\alpha = \delta(x).$$

Выражение для действия предельного оператора на произвольный когерентный вектор $\psi(f)$ можно записать явно:

$$\begin{aligned} \psi^t(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\alpha\to 0} U_\alpha(t)\psi(f) &= \exp\{i(H_0)_5 t\} \\ &\times \exp\left\{ - \big(R^* \left(\exp\{iK\} - iK - 1\right) (iK)^{-2} R\big)_3\, t \right\} \\ &\times \exp\left\{ i \int\limits_0^t d\tau\, \left(R^*\, \left(e^{iK} - 1\right) (iK)^{-1}\right)_1 f(\tau) \right\}, \psi\big(f^t\big) \end{aligned} \qquad (6)$$

предельная функция $f^t(x)$ равна

$$f^t(x) = r(x) \left(f(x+t) + h(x) \right),$$

причём

$$
\begin{aligned}
h(x) &= iI_{(-t,0)}(x)\left(\left(1-e^{-iK}\right)(iK)^{-1}R\right)_2,\\
r(x) &= \exp\left\{i\,(K)_4\,I_{(-t,0)}(x)\right\}.
\end{aligned}
$$

Индексы у операторов определяют порядок их действия.

Вычислим краевое условие, которому удовлетворяет предельный вектор состояния, а также предельный генератор семейства групп U_α. Учитывая теорему 1 и тот факт, что генератор (2) не зависит от времени, краевое условие и предельный генератор можно найти используя семейство $U_\alpha(t)$. Определим следующие специальные операторы уничтожения:

$$
A_\pm\psi(v) \overset{\mathrm{def}}{=} v(\pm 0)\psi(v)\,, \quad v\in W_2^1(\mathbb{R}\setminus\{0\}).
$$

Из (6) следует, что

$$
\begin{aligned}
A_-\psi^t(f) &= \left[\left(e^{iK}\right)_4 f(t) + i\left(e^{iK}\right)_4\left((1-e^{-iK})(iK)^{-1}R\right)_2\right]\psi^t(f)\\
A_+\psi^t(f) &= f(t)\psi^t(f),
\end{aligned}
$$

откуда получаем краевое условие для ψ^t:

$$
\left(A_- - e^{iK}A_+ - i(e^{iK}-1)(iK)^{-1}R\right)\psi^t = 0. \tag{7}
$$

Для вывода предельного уравнения учтём, что

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right) I_{(-t,\,0)}(x) = 0
$$

при $x\neq 0$, откуда следует, что такое же соотношение выполняется и для аргумента когерентного вектора:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right) f^t(x) = 0.
$$

Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi^t = \Big[\nabla &+ i\left(R^*(e^{iK}-1)(iK)^{-1}\right)_1 f(t) - i(H_0)_5\\
&- \left(R^*\left(\exp\{iK\}-iK-1\right)(iK)^{-2}R\right)_3\Big]\,\psi^t.
\end{aligned}
$$

Устремляя t к нулю и учитывая краевое условие, имеем

$$-i\left(\frac{d}{dt}U(t)\psi(f)\right)\Big|_{t=0} = \big[-i\nabla + R^*(e^{iK}-1)(iK)^{-1}A_+ + H_0 + iR^*\left(\exp\{iK\}-iK-1\right)(iK)^{-2}R\big]\,\psi(f)\,.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.8. *Сильным резольвентным пределом семейства операторов (2) при $g_\alpha \to \delta$ является оператор*

$$H = -i\nabla + H_0 + R^*(e^{iK}-1)(iK)^{-1}A_+ + iR^*\left(\exp\{iK\}-iK-1\right)(iK)^{-2}R,$$

имеющий в качестве области определения подмножество векторов из $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H})$, удовлетворяющих краевому условию (7).

Исходя из явного вида предельного разрешающего оператора можно вывести стохастическое дифференциальное уравнение, которому оно подчиняется. Рассмотрим предел

$$\lim_{t\to+0}\big(\psi(w),\,\big(U(t+dt)-U(t)\big)\psi(v)\big)_{\Gamma^S} = \big(\psi(w),\,M(dt)\psi(v)\big)_{\Gamma^S},$$

где стохастический дифференциал $M(t)$ не должен зависеть от выбора конкретных когерентных векторов $\psi(w)$ и $\psi(v)$. Опуская промежуточные выкладки, запишем выражение для стохастического дифференциала $M(dt)$ в форме Хадсона—Партасарати:

$$M(dt) = \left(e^{iK}-1\right)d\Lambda_t + \left(e^{iK}-1\right)(iK)^{-1}iR\,dA_t^\dagger + iR^*\left(e^{iK}-1\right)(iK)^{-1}\,dA_t + \left(H_0 + R^*(e^{iK}-iK-1)(iK)^{-2}R\right)dt.$$

Для формулировки основного результата первой главы, введём вспомогательное понятие *упорядоченного операторозначного когерентного вектора* $\psi_{\mathcal{N}}(J)$. По определению, это вектор фоковского пространства, элементами которого являются операторы некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$, имеющий вид:

$$\psi_{\mathcal{N}}(H) = \overleftarrow{\exp}\left\{\int dx\,a^\dagger(x)J(x)\right\}|0\rangle, \quad J \in L_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\mathbb{R}).$$

Упорядочение в хронологической экспоненте ведётся по аргументам $x \in \mathbb{R}$ оператора $J(x)$. Таким образом, при действии компоненты $\phi_n(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} F(x_1)F(x_2)\dots F(x_n)$ упорядоченного когерентного вектора $\psi(J)_{\mathcal{N}}$ на элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}$ вначале действует оператор с наименьшим аргументом $x_m = \min(x_1, \dots, x_n)$, затем оператор с аргументом $\min(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_m\})$ и т.д. Каждая компонента такого вектора симметрична по своим аргументам: $\phi_n(\dots x_i \dots x_j \dots) = \phi_n(\dots x_j \dots x_i \dots)$ при $\forall\, n, 1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Получим в явном виде выражение для действия оператора $U(t)$ на упорядоченный когерентный вектор $\psi_{\mathcal{N}}(h)$ с аргументом

$$h(x) = h_0(x) + h_1(x) I_{(-T,0)}(x), \tag{8}$$

где $h_0(x)$ — числовая функция, $h_1(x)$ — ограниченная при любом x операторозначая функция со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T > 0$. Такой вид начального состояния выбран с целью возможности проверки группового свойства разрешающего оператора. Пусть

$$\begin{aligned}
\widehat{R} &= (1 - e^{-iK})(iK)^{-1} R, \\
\widehat{R}_2 &= R^* \left(\exp\{iK\} - iK - 1\right)(iK)^{-2} R, \\
W^t(x) &= L^t(t) h(x+t) L^t_-(t) I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x) + V(x,t), \\
V(x,t) &= L^t(-x) e^{iK} (h(x+t) + i\widehat{R}) L^t_-(-x) I_{(-t,0)}(x), \\
L^t(z) &= \overleftarrow{\exp} \left\{ i \int\limits_{t-z}^{t} d\tau \left(H_0 + i\widehat{R}_2 + h(\tau)\widehat{R^*} \right) \right\}, \\
L^t_-(z) &= (L^t(z))^{-1}.
\end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.10. *Предельный разрешающий оператор $U(t)$, являющийся пределом решений уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (2) действует на когерентный вектор вида $\psi_{\mathcal{N}}(h)$, где h — операторозначная функция вида (8), следующим образом:*

$$U(t)\psi(h) = \psi_{\mathcal{N}}\big(W^t\big)\ L^t(t), \tag{9}$$

Семейство операторов $U(t)$ из (9) является унитарным коциклом: $U^\dagger(t) = U^{-1}(t)$, $U(s)U(t) = U(t+s)$, что проверяется непосредственными вычислениями. Вблизи нуля оператор $U(t)$ совпадает с приближённым оператором $U^l(t)$:

$$\left\| \left(U(t) - U^l(t)\right) \psi \right\|_{\mathfrak{H}} = O(t^{1+\beta}),$$

для любых $\psi \in E_\varepsilon^S$, $\|\psi\| = 1$ и $\beta > 0$.

Во второй главе рассматривается ряд физических приложений построенного асимптотического решения. Один из самых важных — случай взаимодействия квантового осциллятора с излучением при наличии диссипации и внешней силы, вообще говоря, зависящей от времени, действующей на осциллятор.

Гамильтонианом таково взаимодействия является оператор, действующий в пространстве $l_2 \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R})) \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ вида:

$$\begin{gathered} H = H_0 + H_{\mathrm{S}E} + H_{\mathrm{S}L}, \\ H_0 = \Omega\, b^\dagger b \otimes I \otimes I - I \otimes i\nabla_1 \otimes I - I \otimes I \otimes i\nabla_2, \\ H_{\mathrm{S}E} = i\, g \int dx\, g_\epsilon^1(x) \left(I \otimes a^\dagger(x) \otimes b - I \otimes a(x) \otimes b^\dagger\right), \\ H_{\mathrm{S}L} = i\alpha(b^\dagger + b) \otimes I \otimes \left(\int dx\, g_\epsilon^2(x)\, a^\dagger(x) a(x) + f(t)\right). \end{gathered}$$

Функции $g_\epsilon^{1;2}(x)$ стремятся к дельта-функции при $\epsilon \to 0$.

Для любого единичного вектора $\Upsilon \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ обозначим через $P(\Upsilon)$ проектор вида:

$$P(\Upsilon)\psi = (\Upsilon,\, \psi)\, \Upsilon, \quad \forall \psi \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R})).$$

Пусть начальное состояние окружения не является чистым, а представляет собой суперпозицию когерентных состояний:

$$\rho_b = \frac{1}{\pi M'} \int P\left(\xi I_{(0,T)}\right)\, e^{-|\xi|^2/M'} d(\mathrm{Re}\, \xi)\, d(\mathrm{Im}\, \xi).$$

Здесь M' — действительный параметр, T — произвольное положительное число. Пусть, также, осциллятор в начальный момент времени находиться в нормированном когерентном состоянии $\rho_{\mathrm{osc}} = |r\rangle\langle r|$. Тогда, выражение для редуцированной матрицы плотности имеет вид:

$$\rho_{\mathrm{osc}}(t) = \frac{1}{1+M} \;:\exp\left\{-\frac{\left(b^\dagger - r^*(t) - Q^\dagger(t)\right)(b - r(t) - Q(t))}{1+M}\right\}:\,,$$

где

$$Q(t) = i\alpha \int\limits_{-t}^{0} e^{i\Omega\tau - \frac{g^2}{2}\tau} a^\dagger(\tau) a(\tau)\, d\tau, \quad M = \left| \frac{g\,(1 - e^{i\Omega t - \frac{g^2}{2}t})}{-i\Omega + \frac{g^2}{2}} \right|^2 M',$$

$$r(t) = r^* e^{-i\Omega t - \frac{g^2}{2}t} + i\alpha \int\limits_{0}^{t} e^{i\Omega\tau - \frac{g^2}{2}\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Для этой же задачи развивается другой метод. Решается стохастическое дифференциальное уравнение для матрицы плотности осциллятора. Уравнение для матрицы плотности запишем в виде:

$$\begin{aligned} d\rho(x_1, x_2) \\ = &\left(-\frac{i}{h}(H(x_1) - H(x_2)) \right. \\ &\left. \quad + \frac{\lambda}{4}((x_1 - a) + (x_2 - a))^2 \right) \rho(x_1, x_2) dt \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda}{2}}((x_1 - a) + (x_2 - a))\rho(x_1, x_2) dQ \\ &+ \Big\{ \sigma b(x_1) b(x_2) \rho(x_1, x_2) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \left[b_+(x_1)\, b(x_1)\, \rho(x_1, x_2) + b_+(x_2)\, b(x_2)\, \rho(x_1, x_2) \right] \Big\} dt, \end{aligned} \tag{10}$$

где $H(x)$ — гамильтониан в координатном представлении, $b(x)$ и $b_+(x)$ — дифференциальные операторы вида:

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right),\ b_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right).$$

Пусть в начальный момент времени осциллятор находится в основном состоянии:

$$\rho_0(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \right), \tag{11}$$

а действительные параметры λ и σ характеризуют степень взаимодействия осциллятора с окружением и степень диссипации соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Решение уравнения (10) с начальным условием (11) имеет вид:*

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{N(t)}{\sqrt{\pi}}\exp\Bigg(\frac{R_1(t)}{2}(x_1-x_2)^2+ip(t)x_1 \\ +\frac{R_2(t)}{2}\left((x_1-q(t))^2-(x_2-q(t))^2\right) \\ -ip(t)x_2-r(t)(x_1-q(t))(x_2-q(t))\Bigg), \quad (12)$$

где неизвестные $R_{1,2}(t)$ и $r(t)$ подчиняются системе уравнений Рикатти

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}R_1(t)=-\lambda+2\Omega R_1(t)R_2(t)-\dfrac{\sigma}{2}-\sigma r(t) \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\sigma r(t)^2-\sigma R_1(t)-\dfrac{1}{2}\sigma R_2(t)^2, \\ \dfrac{d}{dt}R_2(t)=\Omega+\Omega r(t)^2+2\Omega r(t)R_1(t)+\Omega R_2(t)^2-\sigma r(t)R_2(t), \\ \dfrac{d}{dt}r(t)=\lambda+2\Omega r(t)R_2(t)-\sigma r(t)^2+\sigma r(t), \end{cases}$$

с начальными условиями $R_1(0)=-1$, $R_2(0)=0$, $r(0)=1$. Величины $p(t)$ и $q(t)$ являются зависимыми случайными величинами, распределёнными по нормальному закону и подчиняющимися системе уравнений:

$$\begin{cases} dp=Pdt+\rho\,dQ, \\ dq=Edt+\eta\,dQ, \end{cases}$$

где

$$P=-\Omega q-\frac{\sigma}{2}p-F\sin(wt), \quad E=\Omega p-\frac{\sigma}{2}q,$$
$$\rho=-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\frac{R_2(t)}{r(t)}, \quad \eta=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{r(t)}.$$

Предэкспоненциальный множитель $N(t)$ равен $\sqrt{r(t)}$.

При достаточно больших t, величины $R_{1,2}$ и r принимают значения, близкие к стационарным. В этом случае, величины ρ и η можно считать постоянными.

На основе полученного решения построена редуцированная матрица плотности для состояния осциллятора для таких значений t:

$$\rho_a(x_1,x_2,t)=\frac{N(t)}{\sqrt{1+2r(t)D_q(t)}}\exp\left\{-\frac{\mathfrak{B}}{2(1+2r(t)D_q(t))}\right\}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= a_t x_1^2+\overline{a_t}x_2^2+b_t x_1+\overline{b_t}x_2+c_t x_1 x_2+2M_q^2(t)r(t),\\
a_t &= -2R_1(t)D_q(t)r(t)+2D_p(t)D_q(t)r(t)\\
&\quad +R_2(t)i+2R_2(t)D_{pq}(t)-R_1(t)-2D_{pq}(t)^2r(t)\\
&\quad -2ir(t)D_{pq}(t)+D_p(t)-r(t)^2D_q(t)+R_2(t)^2D_q(t),\\
b_t &= 4iD_{pq}(t)M_q(t)r(t)-4iD_q(t)M_p(t)r(t)\\
&\quad -2r(t)M_q(t)-2iM_p(t)-2iR_2(t)M_q(t),\\
c_t &= -4R_2(t)D_{pq}(t)+4D_{pq}(t)^2r(t)-2R_2(t)^2D_q(t)\\
&\quad +2R_1(t)+2r^2(t)D_q(t)-4D_p(t)D_q(t)r(t)\\
&\quad +2r(t)+4R_1(t)D_q(t)r(t)-2D_p(t).
\end{aligned}$$

В последнем выражении величины $M_q(t)$ и $M_p(t)$ имеют смысл средних значений величин $q(t)$ и $p(t)$, распределённых нормально:

$$\begin{aligned}
M_p(t) &= F\int\limits_0^t e^{-\frac{\sigma}{2}(t-\tau)}\sin(w\,\tau)\cos(\Omega(t-\tau))d\tau\\
&= \frac{2F}{\omega_1}\Big\{e^{(-\frac{\sigma\,t}{2})}\left(\Omega_1\sin(\Omega\,t)-\Omega_2\cos(\Omega\,t)\right)\\
&\quad +\Omega_2\sin(w\,t)-\left(8\,w^3+2\,w\,\sigma^2-8\,w\,\Omega^2\right)\cos(w\,t)\Big\},\\
M_q(t) &= F\int\limits_0^t e^{-\frac{\sigma}{2}(t-\tau)}\sin(w\,\tau)\sin(\Omega(t-\tau))d\tau\\
&= \frac{2F}{\omega_1}\Big\{e^{(-\frac{\sigma\,t}{2})}\left(-\Omega_1\cos(\Omega\,t)-\Omega_2\sin(\Omega\,t)\right)\\
&\quad +\Omega_1\sin(w\,t)-8\,\sigma\,w\,\Omega\,\cos(w\,t)\Big\},
\end{aligned}$$

а $D_p(t)$, $D_q(t)$ и $D_{pq}(t)$ — элементы их матрицы ковариаций, которые также вычислены явно:

$$
\begin{aligned}
D_p(t) &= \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} R_-^2(t-\tau) d\tau \\
&= \frac{e^{(-\sigma\, t)}}{2\omega_2} \left(-d_1 \sin(2\,\Omega\, t) + d_2 \cos(2\,\Omega\, t) - d_3 - \rho^2\, \sigma^2\right) \\
&\quad + \frac{d_4 - 2\,\rho\,\eta\,\sigma\,\Omega}{\omega_2}, \\
D_q(t) &= \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} R_+^2(t-\tau) d\tau \\
&= \frac{e^{(-\sigma\, t)}}{2\omega_2} \left(d_1 \sin(2\,\Omega\, t) - d_2 \cos(2\,\Omega\, t) + d_3 - \rho^2\, \sigma^2\right) \\
&\quad + \frac{d_4 + 2\,\rho\,\eta\,\sigma\,\Omega}{\omega_2}, \\
D_{pq}(t) &= \int\limits_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} R_-(t-\tau) R_+(t-\tau) d\tau \\
&= \sigma \frac{e^{(-\sigma\, t)}}{2\omega_2} \left(\, d_2 \sin(2\,\Omega\, t) + d_1 \cos(2\,\Omega\, t)\right) \\
&\quad + \sigma \frac{\rho^2\,\Omega - \eta^2\,\Omega + \rho\,\eta\,\sigma}{\omega_2}.
\end{aligned}
$$

Здесь введены обозначения

$$R_+(t) = \rho \sin(\Omega t) + \eta \cos(\Omega t), \quad R_-(t) = \rho \cos(\Omega t) - \eta \sin(\Omega t),$$

$$
\begin{gathered}
\omega_1 = (8\, w\, \Omega)^2 - (\sigma^2 + 4\, w^2 + 4\, \Omega^2)^2, \quad \omega_2 = (\sigma^2 + 4\, \Omega^2)\sigma, \\
\Omega_1 = 2\, \Omega\, \sigma^2 - 8\, w^2\, \Omega + 8\, \Omega^3, \quad \Omega_2 = \sigma^3 + 4\, \sigma\, \Omega^2 + 4\, \sigma\, w^2, \\
d_1 = 2\, \eta^2\, \sigma\, \Omega - 2\, \rho^2\, \sigma\, \Omega - 2\, \rho\, \eta\, \sigma^2, \quad d_2 = \rho^2\, \sigma^2 - 4\, \rho\, \eta\, \sigma\, \Omega - \eta^2\, \sigma^2, \\
d_3 = 4\, \rho^2\, \Omega^2 + \eta^2\, \sigma^2 + 4\, \eta^2\, \Omega^2, \quad d_4 = 2\, \eta^2\, \Omega^2 + \rho^2\, \sigma^2 + 2\, \rho^2\, \Omega^2.
\end{gathered}
$$

Кроме того, найдены условия регистрации малой силы. Такая задача возникает, в частности, при построении математической модели детектора гравитационных волн.

В третьей главе зная явный вид предельного разрешающего оператора для уравнения (1), находится выражение для частичного следа произвольного оператора $B \in \mathcal{H}$ по состоянию окружения. Для произвольного когерентного вектора $\psi(h)$ из E_ε^S рассмотрим частичное среднее в фоковском пространстве, являющееся элементом из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$P_t(B) = (U_t\psi(h),\, B\,U_t\psi(h))_{\Gamma^S}.$$

Теорема 3.2. *Функция $P_t(B)$ удовлетворяет уравнению Линдблада*

$$\frac{d}{dt}P_t(B) = P_t(\mathcal{L}_t(B)),$$

генератор которого имеет вид $\mathcal{L}_t(B) = \widehat{R}_t^* B \widehat{R}_t - W_t^* B - BW_t$, *где*

$$\widehat{R}_t = (e^{iK} - 1)(iK)^{-1}R + e^{iK}h(t),$$
$$W_t = i\left(H_0 + (\sin K - K)K^{-2}\right) - \frac{1}{2}\widehat{R}_t^*\widehat{R}_t.$$

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. М. Чеботарёву за помощь в работе и полезные обсуждения.

Список публикаций

[1] Рыжаков Г. В., Синёв А. М. *О влиянии среднего числа фотонов на резонансный квантовый предел для интерференционной гравитационной антенны,* Научная конференция «Ломоносовские чтения-2000».

[2] Рыжаков Г. В. *Вывод квантового стохастического уравнения для модели интерференционного детектора гравитационных волн,* Научная конференция «Ломоносов-2001».

[3] Чеботарёв А. М., Чуркин А. В., Рыжаков Г. В., Синёв А. М. *О резонансном квантовом пределе для интерференционной гравитационной антенны,* Вестник МГУ, серия 3. Физика. Астрономия. **5**, 2001, стр. 33–36.

[4] Chebotarev A. M., Tchourkin A. V., Ryzhakov G. V., Sinev A. M. *A solvable model of gravitational wave detector and the standart quantum limit,* Russ. J. Math. Phys. **10**, 2, 134–141 (2003)

[5] Chebotarev A. M., Ryzhakov G. V. *On the Strong Resolvent Convergence of the Schrödinger Evolution to Quantum Stochastics,* Mathematical Notes **74**, 5. pp. 717–733 (2003)

[6] Чеботарёв А. М., Рыжаков Г. В. *О стохастических уравнениях, являющимися сильными резольвентными пределами уравнений Шрёдингера,* Научная конференция «Ломоносовские чтения-2004».

[7] Рыжаков Г. В. *Асимптотические решения квантового стохастического уравнения Лиувилля для осциллятора с учётом диссипации,* Russ. J. of Math. Phys., **12**, 3, p. 386 (2005).

[8] Рыжаков Г. В. *Марковское приближения для частичного среднего обратимой эволюции в произведении векторных пространств*, Девятнадцатые международные плехановские чтения, тезисы докладов. (2006)

[9] Рыжаков Г. В. *Резольвентные пределы квантовой эволюции открытых систем*, Матем. заметки, (2006), **80**, 3. с. 476–480.