

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА,
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ,
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 551.46

ВАСИЛЬЕВ МИХАИЛ ПЕТРОВИЧ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И
ТОНКАЯ СТРУКТУРА СЛОИСТЫХ ТЕЧЕНИЙ

Специальность 25.00.29 – физика атмосферы и гидросферы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006 год

Работа выполнена на филиале кафедры физики моря и вод суши физического факультета Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова в Институте проблем механики РАН

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор К.В. Показеев
Научный консультант:	кандидат физико-математических наук, В.Г. Байдулов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Зырянов доктор физико-математических наук доцент А.В. Кистович
Ведущая организация:	НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита состоится “ 14 ” декабря 2006 г. в 15 час. на заседании диссертационного совета Д 053.05.81 по геофизике в Московском Государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ауд. СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан “ 14 ” ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,

В.Б. Смирнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена изучению структурной устойчивости общих свойств моделей геофизической гидродинамики и частных видов течений, по отношению к смене типа модели. Усложнение модели происходит за счет “малых” факторов двух видов: векторных геометрических (размерности задачи, типа обтекаемых препятствий, характера внешних сил) и скалярных динамических (учет эффектов вращения Земли, неоднородности жидкости, диссипативного характера течений). Отдельно исследовались процессы установления течений неоднородной жидкости и их зависимость от выбора модели.

Актуальность темы:

В связи с появлением высокоточных средств глобального мониторинга атмосферы Земли и океана, а также с необходимостью совершенствования качества прогноза динамики геофизических систем и перехода к среднесрочному и долгосрочному прогнозированию, актуальной оказывается задача разработки адекватных физико-математических моделей, учитывающих одновременно большое число определяющих факторов динамического и диссипативного типов, нелинейный и нестационарный характер протекающих процессов, сложную геометрию течения.

Вплоть до настоящего времени остается актуальной задача исследования природы тонкой структуры геофизических систем, процессов ее формирования, устойчивости, взаимодействия с другими элементами течений, а также влияния на процессы переноса примеси и энергии.

Принимая во внимание нелинейность моделей гидродинамики и широкий спектр упрощенных моделей важным представляется исследование и сравнительный анализ их общих свойств методами теории групп Ли. Ввиду большого числа определяющих факторов, учет которых часто приводит к появлению малых параметров в системе уравнений движения, делает актуальной задачу изучения структурной устойчивости течений по отношению к малым изменениям выбранной модели. Качественно исследовать такие эффекты представляется естественным на примере течений около тел правильной формы – плоскости, цилиндре, сфере – традиционных объектах гидродинамики.

Цель работы: Целью данной работы является

- Изучение общих свойств распространенных моделей геофизической гидродинамики, отражающих основные физические принципы механических систем, а также свойства пространства и времени.
- Исследование влияния гипотез использованных при построении распространенных упрощенных моделей на структуру групп симметрий исходной системы уравнений геофизической гидродинамики.
- Изучение процессов формирования одно- и двумерных слоистых течений и их структурной устойчивости к модификации модели течения по степени сложности от однородной жидкости до стратифицированной жидкости с диффузией;
- Исследование зависимости установившихся периодических течений от частоты колебаний тела и их устойчивости по отношению выбранной модели.
- Изучение возможности расширения области применения теоретико-групповых методов для построения приближенных решений задач теории стратифицированных течений за счет использования приближенных групп симметрии.
- Разработка программ компьютерной алгебры, реализующих процедуру поиска приближенных групп симметрии уравнений геофизической гидродинамики.

Методы исследований:

При выполнении диссертационной работы использовались методы теории непрерывных групп, теории возмущений, интегральных преобразований, асимптотического анализа. При проведении вычислений и представления решений широко использовались методы компьютерной алгебры.

Научная новизна: В работе получены следующие результаты:

- На основе сравнительного теоретико-группового анализа показаны изменения физических и пространственно-временных свойств моделей геофизических течений при переходе от глобальных моделей к локальным, выявлено полное механико-кинематическое содержание перехода к приближению Буссинеска и пограничного слоя в неоднородных жидкостях.
- Впервые на примере слоистых течений стратифицированной жидкости детально изучен процесс формирования тонкой структуры геофизических течений. Показано

качественное изменение свойств течений при смене модели (от модели однородной жидкости к модели стратифицированной жидкости с диффузией). В ряде случаев выявлена неравномерность предельного перехода к моделям стационарных течений.

- Впервые для периодических слоистых течений с диссипацией двух видов выявлено наличие резонансной частоты колебаний генератора, когда амплитуда колебаний частиц жидкости не затухает с удалением от источника (неравномерный переход к режиму установившихся колебаний).
- Показано, что в многокомпонентной среде пограничный слой всегда расщепляется на плотностной и скоростной независимо от значений коэффициентов диссипации.
- Показано, что использование приближенных симметрий в теории неоднородных жидкостей позволяет строить автомодельные решения с заданной степенью точности в задачах, не допускающих точные группы растяжений.
- Разработан и реализован пакет программ поиска приближенных групп симметрий систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическая значимость:

Полученные результаты могут быть использованы при построении новых моделей геофизических систем, являющихся основой долгосрочных прогнозов их динамики. В частности на базе могут быть уточнены представления о тонкой структуре океанических и атмосферных течений и ее влиянии на интегральные характеристики геофизических процессов.

На защиту выносятся:

- Результаты сравнительного анализа групп симметрий уравнений геофизической гидродинамики и приближенных моделей.
- Решение и анализ задач формирования одно- и двумерных слоистых течений в линейно стратифицированной жидкости.
- Решение и анализ задач динамики одно- и двумерных периодических слоистых течений.
- Классификация групп приближенных симметрий уравнений стратифицированного пограничного слоя в зависимости от соотношения между основными безразмерными

- комплексами (числами Рейнольдса, Фруда, Шмидта) и их применение для решения геофизических задач;
- Программы расчета приближенных симметрий уравнений геофизических течений;

Публикации: Результаты работы опубликованы в 9 научных публикациях.

Апробация работы: Основные результаты были представлены на Всероссийской научно-молодежной школе “Возобновляемые источники энергии”. (Москва. 2003), Научной конференции “Ломоносовские чтения” (Москва, 2004), Четвертой всероссийской научной конференции “Физические проблемы экологии” (Москва, 2004), международной конференции “Fluxes and Structures in Fluids” (Москва, 2005); неоднократно докладывались на семинаре кафедры физики моря и вод суши физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Объединенном семинаре “Динамика природных систем”, ИПМех РАН.

Структура и объем диссертации: Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 105 наименований и двух приложения. Общий объем диссертации 111 страниц, включая иллюстрации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении Обосновывается актуальность работы по сравнительному анализу геофизических моделей, структурной устойчивости их общих свойств и свойств характерных типов течений. Приводится обзор работ по теме, определены основные виды задач.

В первой главе вводятся основные характеристики и понятия неоднородных, вращающихся жидкостей, базовые термодинамические соотношения между ними, приводятся уравнения движения геофизической гидродинамики. Обсуждаются граничные и начальные условия, распространенные приближения. В приближении несжимаемой жидкости выведены уравнения стратифицированных течений, в том числе и в приближении Буссинеска. Эффекты вращения рассматриваются в рамках геометрии двух видов: сферической (глобальные модели) и плоской (локальные модели). Приведены важные с практической точки зрения уравнения стратифицированного пограничного

слоя. Теоретико-групповой анализ (как точный, так и приближенный) всех приведенных моделей проводится в следующей главе.

Отдельно обсуждаются основные размерные характеристики и безразмерные комплексы, входящие в модели, определяется система малых параметров. Формулируются базовые требования к построению приближенных моделей геофизических течений.

Во второй главе изучены общие свойства базовой модели геофизических течений и распространенных ее приближений в зависимости от геометрических, динамических и диссипативных факторов. Инвариантные свойства моделей демонстрируются на примере автомодельных решений.

В первом параграфе главы 2 обсуждаются группы симметрий уравнений вращающейся стратифицированной жидкости находящейся в поле плоского и центрально-симметричного поля силы тяжести. Для несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска уравнения движения с учетом вращения Земли с угловой скоростью Ω , вязкости и диффузии имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + S \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) S &= \kappa \Delta S \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – скорость, S – концентрация примеси, P – давление, отнесенное к единичной плотности, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость вращения Земли, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, ν и κ – коэффициенты кинематической вязкости и диффузии соли, соответственно.

В геофизической гидродинамике используются две основные модели: глобальная, когда течения происходят в рамках сферической геометрии в центрально симметричном поле силы тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$ и локальные, в приближении плоской Земли и однородном поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Однако, кроме естественных предположений о том, что выбор модели должен осуществляться с учетом масштаба течений, детального сопоставления свойств моделей до сих пор не проводилось. Вторым распространенным приближением гидродинамики неоднородных сред является приближение Буссинеска. Величина эффектов плавучести характеризуется характерным размером (масштабом стратификации $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$), собственным временем – периодом ($T_b = 2\pi / N$) и часто-

той ($N = \sqrt{g/\Lambda}$) плавучести. При переходе к исходной системе уравнений движения несжимаемой жидкости первое из приведенных выше уравнений должно быть переписано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho(S)} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$$

Естественным средством анализа общих свойств физических моделей являются непрерывные группы. В сферически симметричном поле силы тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$ с осью вращения Oz группа симметрии порождается генераторами, отражающими такие фундаментальные свойства физических систем как однородность времени $X_1 = \partial_t$ (временные сдвиги); взаимосвязь между давлением и концентрацией примеси $X_2 = \partial_S - gr \partial_P$, свободу выбора давления с точностью до произвольной функции времени $X_\pi = \pi(t) \partial_P$. Эти свойства являются общими для всех вышеприведенных моделей.

Кроме того, не зависимо от использования приближения Буссинеска, глобальные модели геофизики обладают симметрией поворотов относительно вертикальной оси $X_3 = \partial_\varphi$ (повороты вокруг оси Oz);

В остальном свойства сферической и плоской моделей существенно различаются. В силу центральной симметрии поля тяготения глобальные модели в приближении Буссинеска обладают в неинерциальной системе координат изотропией пространства относительно осей $O\tilde{x}$ и $O\tilde{y}$, вращающихся вместе с Землей с угловой скоростью Ω . Генератор группы поворотов относительно оси $O\tilde{y}$ имеет вид

$$X_4 = -2 \cos \tilde{\varphi} \partial_\vartheta + 2 \operatorname{ctg} \vartheta \sin \tilde{\varphi} \partial_\varphi + 2 \sin \tilde{\varphi} \left(r \Omega + \frac{1}{\sin \vartheta} w \right) \partial_u + \\ + 2 \left(r \Omega \cos \vartheta \cos \tilde{\varphi} - \frac{1}{\sin \vartheta} u \sin \tilde{\varphi} \right) \partial_w + (r \Omega)^2 \sin 2\vartheta \cos \tilde{\varphi} \partial_P$$

здесь $\tilde{\varphi} = \varphi + \Omega t$, $r \sin \vartheta \sin \tilde{\varphi} = \tilde{y} = \operatorname{inv}$, $r \sin \vartheta \cos \tilde{\varphi} = \tilde{x} = \operatorname{inv}$.

Модели плоской Земли в силу действия двух однородных полей сил Кориолиса и тяжести в разных направлениях не допускают свойств изотропии пространства вообще.

Однако, с другой стороны использование постоянного по направлению поля силы тяжести увеличивает число симметрий локальных моделей за счет другого основного физического принципа – принципа относительности Галилея, расширенного за счет всех поступательно движущихся систем координат.

$$X_\chi = \chi(t)\partial_x + \dot{\chi}(t)\partial_u - (\ddot{\chi}(t)x + 2\dot{\chi}(t)\Omega y)\partial_P;$$

$$X_\eta = \eta(t)\partial_y + \dot{\eta}(t)\partial_v - (\ddot{\eta}(t)y - 2\dot{\eta}(t)\Omega x)\partial_P;$$

$$X_\zeta = \zeta(t)\partial_z + \dot{\zeta}(t)\partial_w - \ddot{\zeta}(t)z\partial_P.$$

где $\chi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ – произвольные функции времени, физическое содержание которых – закон движения системы координат относительно исходной в направлениях x , y и z соответственно.

В моделях со сферически симметричным полем силы тяжести существование выделенной точка пространства – центра симметрии – приводит к полному отсутствию симметрий связанных с однородностью пространства. Дополнительной симметрией в этом случае является модифицированная за счет эффектов вращения симметрия автомодельных преобразований с генератором

$$X_5 = 2t\partial_t + r\partial_r - 2\Omega t\partial_\varphi - v\partial_v - u\partial_u - (2\Omega r \sin \vartheta + w)\partial_w - 3S\partial_S - 2\left(P + r^2\Omega^2 \sin^2 \vartheta\right)\partial_P$$

Наличие симметрий автомодельных преобразований характерно для многих гидродинамических моделей и широко используется для построения точных решений. В случае плоской геометрии присутствие вращения (эффекты Кориолиса) делает невозможным наличие у модели любых симметрий растяжения.

Особенности, вносимые приближением Буссинеска в геофизические модели, изучались на примере уравнений стратифицированной жидкости записанных в отсутствии сил Кориолиса для однородного поля сила тяжести. Поскольку полный список симметрий уравнений стратифицированных течений был приведен в литературе ранее, далее анализируются только наиболее существенные изменения, вносимые приближением Буссинеска.

Отличительной чертой общих уравнений несжимаемой стратифицированной жидкости, является точное следование принципу относительности Галилея без возможности его расширительного толкования. В этом случае генераторы групп преобразований совпадают с генераторами уравнений газовой динамики и имеют вид

$$X_{6...8} = t\partial_{x_i} + \partial_{u_i} \text{ (Принцип относительности Галилея);}$$

Анализ показывает, что расширительное толкование принципа относительности Галилея для уравнений записанных в приближении Буссинеска происходит из-за пренебрежения зависимостью плотности от солёности в члене, содержащем давление, и,

таким образом, из-за придания стратифицированной жидкости свойства баротропности, которое выполняется не для всех течений.

Второй отличительной чертой приближения Буссинеска является нарушение равенства гравитационной и инерционной масс, следствием этого факта является появление анизотропии при переходе в свободно падающую систему координат в однородном поле силы тяжести. Если исходная модель инвариантна относительно трех групп вращения в горизонтальной и вертикальных (с модификацией) плоскостях

$$X_9 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v \text{ (вращения в горизонтальной плоскости);}$$

$$X_{10,11} = \left(\frac{gt^2}{2} + z \right) \partial_{x_i} - x_i \partial_z + (gt + w) \partial_{v_i} - v_i \partial_w$$

то исходные уравнения Буссинеска инвариантны только по отношению к поворотам в горизонтальной плоскости.

Таким образом сравнение общих свойств симметрии выявило значительное различие между свойствами глобальной и локальных моделей геофизических течений, когда поля сил тяжести и Кориолиса считаются однородными. Переход к сферически симметричному полю силы тяжести вместе с эффектами вращения естественным образом приводят к потере свойства однородности пространства. Этой же причиной вызвана и потеря модельными уравнениями инвариантности по отношению к преобразованиям Галилея. В тоже время изотропия пространства сохраняется не только по отношению к поворотам вокруг оси Oz , но также и относительно двух других осей системы координат, однако теперь координатная система должна вращаться вместе с Землей с угловой скоростью Ω .

Сравнительный анализ групп симметрий уравнений несжимаемой стратифицированной жидкости с учетом эффектов вращения, стратификации, в приближении Буссинеска и при отказе от него показал, что нарушение принципа эквивалентности гравитационной и инерционной масс приводит к потере изотропии пространства в выделенной падающей с ускорением свободного падения системы координат (состояние невесомости отсутствует), остается только инвариантность по отношению к поворотам в горизонтальной плоскости. Другим следствием замены члена $\nabla P/\rho(S)$ на $\nabla(P/\rho_0)$ в приближении Буссинеска является фактическое придание жидкости свойств баротропности, в результате, как и в случае однородной несжимаемой жидкости, принцип относительности Галилея расширяется за счет всех поступательно движущихся относительно

друг друга систем координат.

Второй параграф главы 2 посвящен анализу симметрий уравнений стратифицированного пограничного слоя и использованию групп растяжения для построения инвариантных решений. Уравнения стратифицированного пограничного слоя, записанные для плоскости, наклоненной на угол α к горизонту, имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g S \sin \alpha \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} &= \kappa \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + (u \sin \alpha + v \cos \alpha) / \Lambda \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Группа симметрий уравнений пограничного слоя во многом совпадает с группой уравнений несжимаемой стратифицированной жидкости, однако в ней, как и в случае однородной жидкости, отсутствуют группы вращения. Эта анизотропия заранее навязана неравноправием осей x и y , следующим из условий построения модели. Однако, если несжимаемость вместе с условием баротропности приводят к эквивалентности всех систем координат, движущихся поступательно с произвольным ускорением, то пренебрежение поперечной компонентой скорости в одном из уравнений движения расширяет класс таких систем. В поперечном направлении эквивалентными оказываются также и системы координат движущиеся и с вращением, и с деформацией.

$$X_\eta = \eta(t, x) \partial_y + (\eta_t + \eta_x u) \partial_v + \frac{\cos \alpha}{\Lambda} \eta \partial_S - \frac{g}{2\Lambda} \sin 2\alpha \int \eta dx \partial_P$$

Преобразование поперечной компоненты скорости при этом будет определяться конвективным переносом закона движения $\eta(t, x)$ вдоль тангенциальной компоненты скорости. Непосредственные вычисления показывают, что таким же свойством обладают и уравнения пограничного слоя в однородной жидкости. Обычно указывается на зависимость закона движения только от времени, и генератор X_η приводится в виде

$$X_\eta = \eta(t) \partial_y + \eta_t \partial_v.$$

В работе найдены все расширения допускаемой группы преобразований при частных значениях угла наклона α ($\alpha = 0, \pi/2$).

В качестве примеров использования групп симметрии рассмотрены краевые задачи двух типов. Одна из них характерна для задач о распространении тепла вызванная разностью температур в нуле и на бесконечности, а другая типична для динамики стра-

тифицированных течений, когда границы тел являются непроницаемыми для диффузионных потоков примеси, а на бесконечности возмущения, вызванные движущимся телом, затухают, и распределение солёности становится близким к исходной стратификации.

В случае горизонтального движения пластины происходит расширение группы растяжения

$$X_1 = x\partial_x + u\partial_u, \quad X_2 = y\partial_y - 2u\partial_u - v\partial_v, \quad X_3 = S\partial_S.$$

что позволяет решать широкий класс задач.

В задаче с краевыми условиями первого рода (задача об источнике)

$$u = v = 0, \quad S = S_0, \quad y = 0$$

$$u = U_\infty, \quad S = S_\infty, \quad y \rightarrow \infty$$

для построения автомодельной замены переменных генератор группы растяжения должен выражаться через генераторы базиса как

$$X = 2 * X_1 + 1 * X_2 + 0 * X_3 = 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v. \quad (1)$$

$$z = y\sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}, \quad u = U_\infty f', \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}(zf' - f), \quad \psi = \sqrt{vxU_\infty}f(z), \quad S = \sigma(z)$$

В задаче об обтекании горизонтальной пластинки потоком линейно стратифицированной жидкости с диффузией граничные условия для солёности становятся второго рода

$$u = v = 0, \quad S_y = 0, \quad y = 0$$

$$u = U_\infty, \quad S = -\frac{y}{\Lambda}, \quad y \rightarrow \infty$$

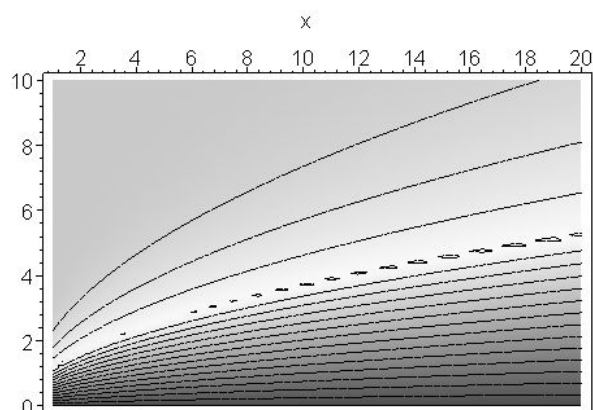
что приводит к изменению линейной комбинации базисных генераторов группы растяжения, с помощью которой уравнения пограничного слоя могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и вместо формулы (1) имеем

$$X = 2 * X_1 + 1 * X_2 + 1 * X_3 = 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v + S\partial_S. \quad (2)$$

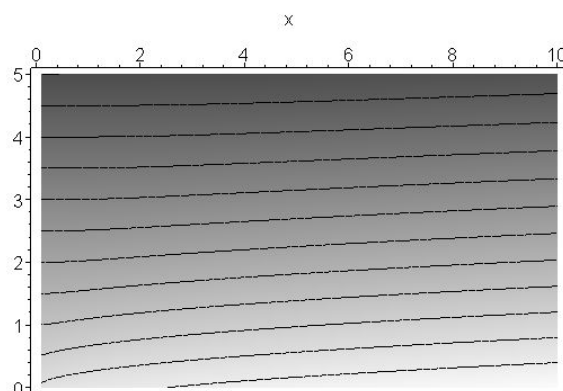
$$z = y\sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}, \quad u = U_\infty f', \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{vx}}(zf' - f), \quad S = -\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}\sigma(z), \quad \psi = \sqrt{vxU_\infty}f(z)$$

После перехода к автомодельным переменным приведенные выше задачи описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, решение которых строятся методом сращиваемых асимптотических разложений.

Решения описывают расщепленный (на скоростной и плотностной) пограничный слой, функции скорости и солёности на некотором удалении от края пластины являются гладкими монотонными функциями независимых переменных задачи.



Горизонтальная компонента скорости u



Солёность S

В отсутствии диффузии в стационарном пределе солёность и функция тока связаны друг с другом соотношением $S = F(\psi)$. Вид функциональной зависимости определяется из краевых условий, причем свобода выбора функции оказывается настолько большой, что в качестве решения можно построить такую функцию солёности, которая одновременно удовлетворяла бы и заданным условиям первого рода на пластине и бесконечности, и обеспечивала бы условие непротекания на пластине. А во второй задаче выполнение условия на бесконечности налагает связь $\sigma = f$, что одновременно обеспечивает и условие непротекания на пластине.

Таким образом, построение решений приведенных выше краевых задач оказывается возможным благодаря широкой группе автомодельных преобразований допускаемых уравнениями пограничного слоя около горизонтальной пластины. Если движение границы происходит под углом горизонту, то группа симметрии сужается, и физический анализ задач усложняется. Однако, и в этом случае методы теории непрерывных групп можно применять для построения приближенных решений гидродинамических уравнений.

Третий параграф главы 2 посвящен построению приближенных симметрий стационарных двумерных уравнений стратифицированных течений и изучению их зависимости от соотношения между основными определяющими параметрами задачи в основном приближении пограничного слоя, когда $Re \gg 1$.

Стационарные двумерные уравнения стратифицированного пограничного слоя записываются в безразмерном виде для переменных функция тока ψ — полная соле-

ность S . При этом отдельно рассматриваются два случая: первый, когда эффекты диффузии малы, и соленость линейным образом связана с функцией тока. Второй случай соответствует существенному вкладом эффектов диффузии в динамику течения, а концентрация примеси является дополнительной функционально независимой переменной задачи описываемой отдельным уравнением второго порядка.

В первом случае уравнения движения сводятся к единственному уравнению относительно функции тока

$$\left[\Psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \Psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \right] \nabla^2 \Psi + \frac{\gamma}{Fr} \Psi_x = 0,$$

где $Re = Ul/\nu$ – число Рейнольдса, l и U – характерный размер и скорость натекающего потока, $\frac{\gamma}{Fr} = \left(\frac{Nl}{U} \right)^2$, Fr – число Фруда, N – частота плавучести, $\gamma = l/\Lambda$ – безразмерный обратный масштаб стратификации.

В втором случае определяющие уравнения в приближении Буссинеска образуют систему уравнений второго порядка, которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_z \partial_x - \Psi_x \partial_z - \frac{1}{Re} \Delta \right\} \Delta \Psi + \frac{\gamma}{Fr} S_x &= 0 \\ \Psi_z S_x - \Psi_x S_z - \frac{1}{Sc} \Delta S &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где $Sc = \nu/\kappa$ – число Шмидта.

Здесь и далее будем рассматривать три возможных типа соотношений (по порядку величины) между числами Рейнольдса и Фруда, т.е. между инерцией, силами вязкости с одной стороны и силами плавучести с другой.

А. Баланс “инерция – вязкость $Re \sim \varepsilon^{-2}$ – плавучесть” $Fr \sim \varepsilon^2$;

В. Баланс “инерция – вязкость $Re \sim \varepsilon^{-2}$ ” слабо доминирует над плавучестью $Fr \sim \varepsilon^1$;

С. Баланс “инерция – вязкость $Re \sim \varepsilon^{-2}$ ” сильно доминирует над плавучестью $Fr \sim 1$;

При этом симметрии каждой модели ищутся приближённо с точностью до первого порядка малости

$$X = X_0 + \varepsilon X_1.$$

Анализ полученных симметрий первого порядка показывает, что в случае, когда силы вязкости находятся в балансе с силами плавучести, симметрии первого порядка получаются простым удвоением симметрий нулевого порядка. Иначе говоря, прибли-

женные симметрии нулевого порядка оказываются устойчивыми, и в первом приближении происходит так называемое наследование симметрий.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае (С), когда эффекты плавучести малы, и силы инерции определяют инвариантную структуру уравнения вплоть до первого порядка малости. С этой точки зрения наиболее интересным случаем является случай слабого доминирования сил инерции над силами плавучести (В). В этом случае из двух симметрий растяжения с генераторами X_3 и X_4 в первом порядке малости устойчивой оказывается только их комбинация. Однако наличие симметрий первого порядка с генераторами Y_4^1 и Y_5^1 , а также Y_2 вместе с Y_μ дает возможность строить приближенно инвариантные решения задач, в которых эффекты плавучести существенно проявляются внутри пограничного слоя.

В теории пограничного слоя широко используются автомодельные решения. Однако, чтобы удовлетворить краевым условиям (например постоянства набегающего потока на бесконечности) часто необходимо иметь несколько генераторов групп растяжения. Для построения такого решения из списка генераторов (В) необходимо выбрать такую комбинацию, чтобы после построения редуцирующей замены граничные условия были удовлетворены в рамках новых зависимых и независимых переменных. Чтобы построить такую замену переменных рассматривается линейная комбинация трех операторов растяжения

$$Z = Y_4 + a Y_4^1 + b Y_5^1 = (4 + a\varepsilon) x \partial_x + (1 + b\varepsilon) y \partial_y + (3 + (a - b)\varepsilon) \psi \partial_\psi.$$

Значения параметров a и b выбираются таким образом, чтобы редуцированная задача с точностью до $\bar{o}(\varepsilon)$ удовлетворяла краевым условиям, причем в данном случае влияние эффектов плавучести будет сказываться и на масштабах толщины пограничного слоя.

Учет эффектов диффузии усложняет определяющие уравнения и существенно расширяет номенклатуру допускаемых типов течений, границы между которыми будут определяться балансными соотношениями между безразмерными комплексами системы (3). В приближении пограничного слоя балансные соотношения (А), (В) и (С) дополняются характерной величиной солености, масштаб которой выбран исходя из предельного случая отсутствия диффузии.

В результате проведенных расчетов расклассифицированы симметрии первого порядка уравнений стратифицированного пограничного слоя в зависимости от соотно-

шений между величинами безразмерных комплексов (чисел Рейнольдса, Фруда, Шмидта). Показано, что использование приближенных симметрий позволяет строить автомодельные решения с заданной степенью точности в задачах, не допускающих точные группы растяжений.

Третья глава посвящена изучению зависимости свойств слоистых течений стратифицированной жидкости, как на фазе формирования, так и для установившихся колебаний в зависимости от размерности задач, параметров стратификации и диффузии. Начиная с работ Л. Прандтля, на примере подобных течений в геофизике традиционно моделируются процессы в океане и атмосферы, возникающие при обтекании препятствий. При этом простота геометрии позволяет детально разобрать процесс формирования тонкой структуры течений.

В первом параграфе главы 3 изучались задачи формирования одно и двумерных слоистых течений и их структурная устойчивость при переходе от модели однородной к стратифицированной жидкости. Уравнения движения слоистых течений имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \hat{L}u - gS \sin \alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \kappa \hat{L}S + \frac{1}{\Lambda} u \sin \alpha$$

где для плоскости $\hat{L} = \partial^2 / \partial \eta^2$, для цилиндра $\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

На основании точных решений начально-краевой задачи, построенных с использованием преобразования Лапласа, детально исследован процесс формирования тонкой структуры течений стратифицированной жидкости. В качестве модельных были рассмотрены задачи формирования плоскопараллельных течений, возникающих около наклоненных к горизонту плоскости и цилиндра, движущихся вдоль самих себя. Трансформация свойств решений изучалась при последовательном переходе от модели однородной жидкости к неоднородной и модели учитывающей диффузию стратифицирующей примеси. Показано, что, несмотря на малость параметров отвечающих за эффекты стратификации и диффузии, величина их вклада относительно других эффектов (сил инерции и вязкости) определяется не только значением скалярных параметров (чисел Фруда и Шмидта), но в значительной мере и динамическими факторами. В силу большого различия по величине скалярных параметров в работе были выделены четыре временные области (три области малых времен – вязких, плавучести и диффузионных, а также области больших времен), на границах которых происходит смена модели течения. Показано, что предельный переход $t \rightarrow \infty$ является неравномерным как в случае

плоской, так и цилиндрической геометрии для всех моделей за исключением модели стратифицированной среды с диффузией. Переход к стационарным моделям ведет не только к нерегулярности двойных предельных переходов, но часто и к необходимости переформулировки краевых условий.

Показано, что слабые эффекты стратификации, регулярным образом описываемые уравнениями движения, со временем меняют глобальное поведение течения и приводят к формированию тонкой структуры течения, включая сингулярные эффекты диффузии. В работе отдельно выделены стационарные модели, применимость которых для описания процессов в окружающей среде каждый раз нуждается в обосновании, особенно, когда исследуются предельные переходы между смежными геометрическими задачами или моделями.

Проведенные расчеты временной эволюции течения позволили выделить два характерных типа поведения скорости в зависимости от расстояния до плоскости. На малых расстояниях первоначально сильное вязкое вовлечение жидкости в движение, чередуется сменой направления скорости и возникновением противотечения большой амплитуды. Следующие смены периодов доминирования сил плавучести и вязкости приводят к постепенной адаптации среды к внесенным возмущениям. В тоже время на больших расстояниях возмущения заметной амплитуды приходят спустя некоторое время после старта, причем их величина примерно на порядок меньше чем в области малых расстояний. Максимум амплитуды колебаний наступает тем позже, чем дальше находится выбранная точка наблюдений. После достижения максимального значения амплитуда колебаний медленно затухает со временем.

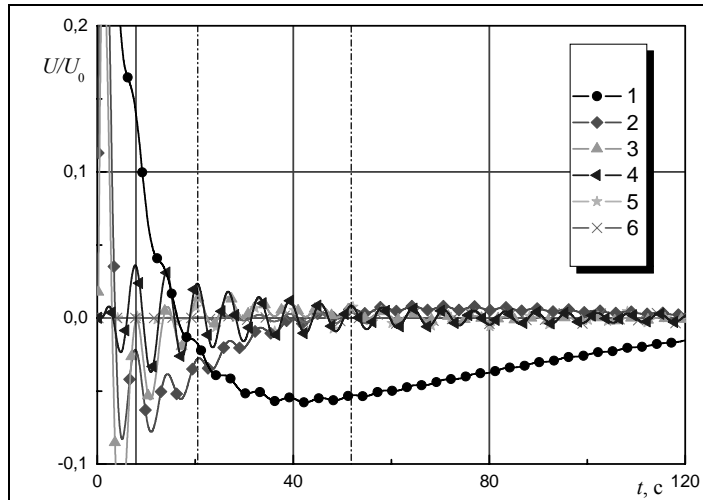
Смена типа течения будет происходить при переходе к большим временам существенно превышающим диффузионные. В этом пределе эффектами диффузии пренебрегать уже нельзя, и решение приближается к стационарному, пространственные характеристики которого определяются комбинационным масштабом длины

$$l = \left[4\nu\kappa / (N \sin \alpha)^2 \right]^{1/4}.$$

Представленные в работе разложения решения в виде временных рядов – асимптотических рядов вида

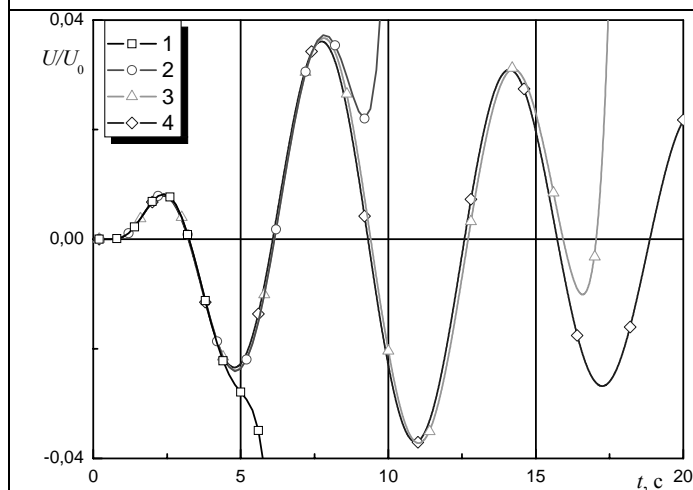
$$\frac{u}{U_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu t}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4Nt \sin \alpha)^{2n} \sum_{m=1}^n P_{nm} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu t}}\right)^m i^{4n-m} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

здесь $i^n \operatorname{erfc}(z)$ – кратный интеграл вероятности, P_{nm} – коэффициенты разложения.



Эволюция скорости течения неоднородной жидкости вблизи наклонной плоскости.

Кривые рассчитаны для $\alpha = 90^\circ$, $N = 0,99 \text{ с}^{-1}$. 1 – 6 – $\eta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.5, 1.0, 1.5 \text{ см}$.



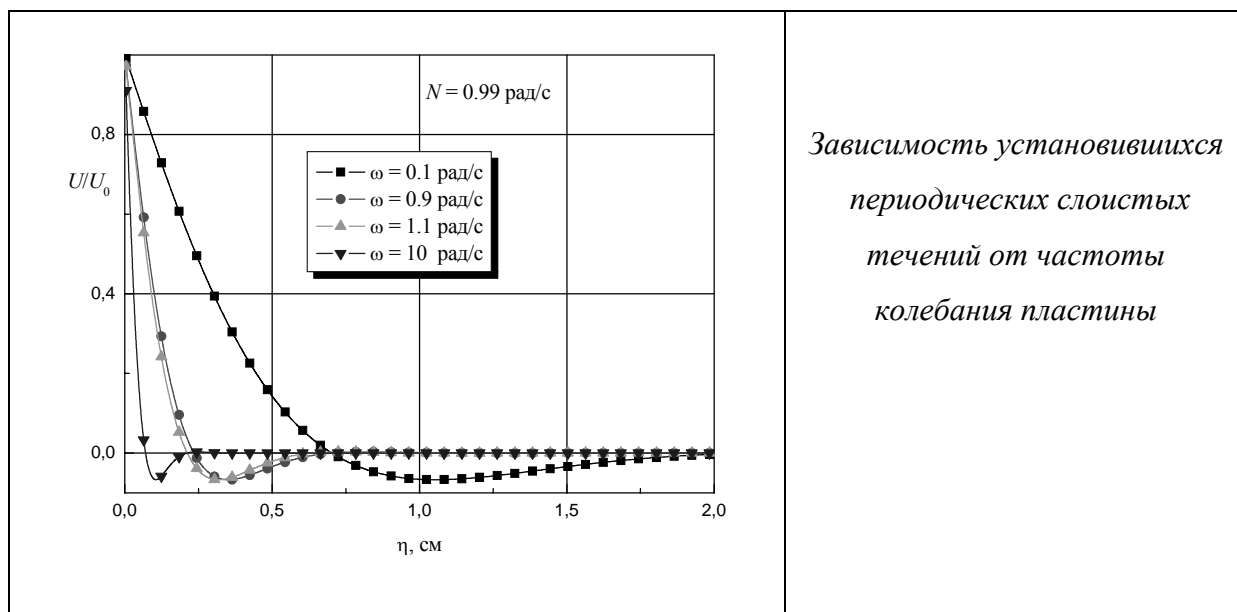
Эволюция скорости течения неоднородной жидкости на больших расстояниях от плоскости согласно представлению в виде временных рядов на расстоянии от пластины $\eta = 0.5 \text{ см}$. Кривые рассчитаны для $\alpha = 90^\circ$, $N = 0,99 \text{ с}^{-1}$, при ограничении ряда суммой с $n = 5, 10$ и 20 членами, кривая 4 соответствует аналитическому решению, полученному для стратифицированной среды без диффузии

Такое представление решения позволило регулярным образом описать течения на существенно нестационарной фазе их эволюции, что особенно важно для моделей учитывающих диффузию, когда аналитическое решение в явном виде найти не удастся.

Во втором параграфе главы 3 исследуется влияние периодического движения границы на структуру колебаний стратифицированной среды при исключительно вязком механизме вовлечения. На примере движения плоской и цилиндрической границ проанализирована трансформация картины установившихся колебаний при последова-

тельном усложнении модели течения от вязкой однородной жидкости к вязкой стратифицированной и стратифицированной жидкости с диффузией.

В результате перехода к модели стратифицированной жидкости в показатель затухания Стокса $\gamma_0 = \sqrt{\omega/2\nu}$ (здесь ω – частота колебаний границы) периодического течения однородной жидкости, эффекты плавучести вносят существенную поправку $\gamma_N = \sqrt{|\omega^2 - N^2 \sin^2 \alpha|/2\nu\omega}$, уменьшая его величину. Анализ зависимости показателя затухания γ_N от частоты колебаний границы показывает сходство в поведении течений при больших ($\omega \gg N \sin \alpha$) и малых ($\omega \ll N \sin \alpha$) значениях частот, что существенно отличает их от течений однородной жидкости. Причем в первом случае эффекты стратификации малы и $\gamma_N \approx \gamma_0 \sim \sqrt{\omega}$, а во втором наличие отличной от нуля частоты плавучести в γ_N (второго механизма колебаний) приводит к росту затухания характеристик течения с уменьшением частоты колебаний границы ($\gamma_N \sim 1/\sqrt{\omega}$).



Если колебания границы происходят с частотой равной эффективной величине частоты плавучести $N_{\text{эф}} = N \sin \alpha$, то к моменту установления колебаний вся жидкость приходит в движение и для такой частоты колебания границы условие затухания возмущений на бесконечности не выполняется.

Учет эффектов диффузии приводит к расщеплению единого пограничного слоя на два подслоя разной толщины, с характерными масштабами длины

$$l_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{\omega^2}{4} (\kappa^{-1} + \nu^{-1})^2 + \beta^2} \pm \frac{\omega}{2} (\kappa^{-1} + \nu^{-1}) \right|^{-1}, \text{ где } \beta^2 = \frac{|\omega^2 - N^2 \sin^2 \alpha|}{\nu \kappa}.$$

Показано, что в моделях с диффузией пограничный слой всегда разделен на два подслоя независимо от значения диссипативных параметров жидкости, причем толщина скоростного (вязкого) пограничного слоя существенно зависит от соотношения между частотой вынужденных колебаний, частотой плавучести и углом наклона пластины.

$$l_{\kappa} = l_{+} \sim \sqrt{\kappa/\omega}, \quad l_{\nu} = l_{-} \sim \omega/\omega_N \sqrt{\nu/\omega}, \text{ где } \omega_N = \sqrt{|\omega^2 - N^2 \sin^2 \alpha|}.$$

Как и в случае среды без диффузии существует вырожденный случай колебаний с частотой $\omega = N \sin \alpha$, когда у характеристического уравнения появляется двукратный нулевой корень. В этом случае дифференциальный оператор в пространстве образов Лапласа распадается на два коммутирующих оператора

$$\nu'' = 0 \text{ и } \nu'' = i \frac{\omega}{\nu_{\text{эф}}} \nu, \quad \nu_{\text{эф}} = \frac{\nu \kappa}{\nu + \kappa} \approx \kappa.$$

первый из них отвечает стационарному решению задачи об импульсном старте пластины с постоянной скоростью, второй – его же нестационарной части с эффективным коэффициентом вязкости, вторая возможная интерпретация – установившиеся колебания плоскости в жидкости с эффективным коэффициентом вязкости.

В третьем параграфе главы 3 исследуется влияние нелинейности на двумерные стационарные вихревые течения идеальной несжимаемой жидкости и равномерность предельного перехода от стратифицированной среды к однородной. Решения определяющего уравнения

$$\{\psi_{\varphi} \partial_r - \psi_r \partial_{\varphi}\} \Delta \psi + \frac{S_0}{Fr} [r \cos \varphi \partial_r - \sin \varphi \partial_{\varphi}] \psi = 0 \quad (4)$$

строятся методом разделения переменных в цилиндрической системе координат (r, φ) .

$$\psi = \sum_{n=0} \psi_n(r) \exp(in\varphi)$$

Предварительный анализ уравнений однородной жидкости показал, что решения, состоящие из любого конечного числа членов (содержащие конечное число мод по φ) отвечают линейной связи между завихренностью и функцией тока. Связям нелинейного типа (собственно нелинейным особенностям гидродинамических уравнений) отве-

чают бесконечное число членов ряда Фурье, подстановка которого в определяющие уравнения приведет к рекуррентным дифференциальным уравнениям второго порядка относительно функций $\psi_n(r)$, причем нулевой член разложения – функция $\psi_0(r)$ – остается произвольным. Общность решения представленного разложения обусловлена наличием одной произвольной функции одного аргумента и двумя счетными наборами постоянных интегрирования системы рекуррентных дифференциальных уравнений.

Анизотропия уравнений стратифицированной жидкости вносит значительные изменения в вид решения. Использование свойств дискретной симметрии по угловой переменной φ

$$\psi(-\varphi) = -\psi(\varphi) \text{ и } \psi(\pi - \varphi) = \psi(\varphi)$$

позволяет, не решая задачу, определить, что разложение в ряд Фурье функции тока должно содержать только синусы нечетного аргумента.

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(r) \sin((2n+1)\varphi)$$

Уравнение (4) может быть один раз проинтегрировано

$$\Delta\psi = F(\psi) + \frac{S_0}{Fr} r \sin \varphi$$

А в широко распространенном случае линейной связи между завихренностью и функцией тока решение опять, как и в случае однородной жидкости, описывается функциями Бесселя.

В Приложении 1. приведены необходимые сведения из теории точных и приближенных непрерывных групп непрерывных преобразований.

Приложение 2. содержит блок-схему и текст программы расчета приближенных групп симметрии стационарных уравнений стратифицированной жидкости.

Публикации по теме диссертации

1. Васильев М.П. Приближенные симметрии и приближенно инвариантные решения уравнений стратифицированных течений и пограничного слоя // Всероссийская научно молодежная школа “Возобновляемые источники энергии” г. Москва. 2003 г. Тезисы докладов. С. 160.

2. Васильев М.П. Приближенные симметрии и приближенно инвариантные решения уравнений стратифицированных течений и пограничного слоя // Ломоносовские чтения. г. Москва. 2004 г. Тезисы докладов. С. 172.
3. Васильев М.П. Анализ совместного влияния нелинейности и диссипации на структуру течений стратифицированной жидкости // Четвертая всероссийская научная конференция «Физические проблемы экологии» Москва. 22 – 24 июня 2004 г. Тезисы докладов. С. 40 – 41.
4. Васильев М.П. Взаимодействие диссипативных и нелинейных факторов в стратифицированном пограничном слое около горизонтальной пластинки // Сборник научных трудов «Физические проблемы экологии (Экологическая физика)». 2005. № 13. С. 55 – 69.
5. Байдулов В. Г., Васильев М.П. Инвариантные и приближенно инвариантные решения задач о движении горизонтальной пластины в стратифицированной и/или вращающейся жидкости // Международная конференция “Потоки и структуры в жидкостях”. Москва. 20 – 23 июня 2005 г. Тезисы докладов. С. 190.
6. Baydulov V.G., Vasiliev M.P. Approximate Groups of Transformations and Asymptotic Solutions of the Stratified Liquid Boundary Layer Equations // Selected Papers of the International conference “Fluxes and Structures in Fluids”. Moscow, Russia, June 20 – 23, 2005. Moscow. IPM RAS. 2006. P. 41 – 45.
7. Васильев М.П. Влияние эффектов плавучести, нелинейности и диссипации на структуру стационарных двумерных течений стратифицированной жидкости // Научная конференция “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентности”. Москва. Февраль, 2006 г.
8. Байдулов В.Г., Васильев М.П. Формирование тонкой структуры слоистых стратифицированных течений // Известия РАН Механика жидкости и газа, 2006 (в печати)
9. Байдулов В.Г., Васильев М.П., Показеев К.В. Структурная устойчивость общих свойств моделей геофизической гидродинамики // Вестник МГУ. Физика и астрономия, 2006 (в печати)

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И
ТОНКАЯ СТРУКТУРА СЛОИСТЫХ ТЕЧЕНИЙ

Васильев Михаил Петрович