

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи

ХОХЛОВ Антон Александрович

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА И ИХ
МОДИФИКАЦИИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ
ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 — “Математическое
моделирование, численные методы и комплексы
программ”

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва

2007

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор Т.Г.Елизарова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук А.Е.Луцкий

кандидат физико-математических наук Е.В.Шильников

Ведущая организация:

Институт проблем механики Российской Академии Наук

Защита состоится “____” _____ 2007 г. в ____ час. ____ мин. на заседании диссертационного совета К 501.001.17 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ауд. ____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан “____” _____ 2007 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета К 501.001.17,

доктор физико-математических наук

П.А.Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность

Актуальными задачами численного моделирования газодинамических течений являются задачи с внешними источниками энергии. К таким проблемам относятся расчеты течений излучающего газа, исследование возможностей управления потоками с помощью энергозатрат, расчеты активных сред в резонаторах газовых лазеров, задачи горения и многие другие практически важные вопросы.

Эффективным подходом к численному решению задач газовой динамики является использование численных алгоритмов, основанных на квазигазодинамических (КГД) уравнениях [1], [2], [3], которые можно рассматривать как модификации уравнений Навье-Стокса.

Дополнительные слагаемые, отличающие эти уравнения от системы Навье—Стокса, носят диссипативный характер и выполняют роль искусственных регуляризаторов для разностных алгоритмов решения задач вязкой аэродинамики. Однако соответствующие выражения были получены в предположении об отсутствии внешних источников и стоков тепла.

Цели работы

Основные цели настоящей работы:

1. Обобщение КГД системы для случая течений с внешними источниками или стоками энергии таким образом, чтобы КГД уравнения имели диссипативный характер.
2. Создание и тестирование соответствующего комплекса программ для неструктурированных пространственных сеток. Сопоставление вычислительных характеристик КГД алгоритма и алгоритма, основанного на системе Навье-Стокса.
3. Численное моделирование влияния процесса ионизации газа на

характеристики пограничного слоя (вблизи поверхности) с целью управления сопротивлением летательного аппарата.

Научная новизна работы

1. Используя методику [2], — вывод КГД уравнений для неподвижного объема — эти уравнения впервые обобщаются на случай течений вязкого газа с внешними источниками тепла. Для построенных уравнений доказана теорема о неубывании полной термодинамической энтропии, что демонстрирует диссипативный характер построенной модели.
2. На примере задач сверхзвукового течения вязкого газа в ударной волне и в окрестности пластины продемонстрированы преимущества и недостатки КГД модели и модели Навье—Стокса.
3. Показано, что аккуратный учет коэффициента второй вязкости позволяет с точностью порядка 30% моделировать профиль плотности в ударной волне на основе газодинамических уравнений. Раньше считалось, что такая точность достигается только на основе существенно более сложных кинетических моделей.

Научная и практическая значимость работы

1. Разработанная математическая модель для расчета течений с внешними тепловыми источниками реализована в виде комплекта программ для решения задач на неструктурированных сетках в областях сложной формы. Программы оптимизированы и оттестированы и могут использоваться для расчетов широкого круга нестационарных сверхзвуковых и дозвуковых течений.
2. Проведено численное моделирование течения умеренно разреженного газа вблизи пластины в зоне действия электрического разряда. В результате расчетов сделаны оценки параметров эксперимента для изучения возможностей управления пограничным слоем с целью уменьшения силы сопротивления аппарата.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Построены квазигазодинамические уравнения для описания течения вязкого газа с внешними источниками энергии. Построено уравнение баланса энтропии, доказывающее диссипативный характер полученной модели.
2. Разработан численный алгоритм расчета нестационарных газодинамических течений с внешним энергоподводом с использованием неструктурированных сеток. Тестирование алгоритма (в отсутствие энергоподвода) проведено на задачах о дозвуковом течении в следе за круговым цилиндром и сверхзвуковом течении в окрестности плоской пластины.
3. С целью оптимизации параметров экспериментальной установки проведено параметрическое исследование задачи о сверхзвуковом обтекании пластины в присутствии электрического разряда в условиях умеренно разреженного газа. Получены оценки для параметров экспериментальной установки.
4. Решена задача о структуре фронта ударной волны в аргоне и азоте. Показано существенное влияние второй вязкости на форму профиля плотности для умеренно разреженных течений. Продемонстрировано, что форма профиля плотности, вычисленная с помощью уравнений Навье-Стокса, соответствует данным натуральных экспериментов существенно лучше, чем считалось ранее.
5. На примере задач о течении в окрестности пластины, в следе за цилиндром и в ударной волне проведено сопоставление эффективности подходов КГД и НС и сделаны выводы о целесообразности и эффективности того и другого метода в конкретных задачах.

Апробация работы

Результаты, полученные в диссертации, представлялись на следующих конференциях:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2005”, Москва, 2005,
2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2006”, Москва, 2006,
3. Международная конференция “Тихонов и современная математика”, Москва, 2006,
4. ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, London, 2007,
5. 2nd European Conference for Aerospace Science, 1-6 July, Brussels, 2007,

а также семинарах:

1. в институте проблем механики РАН (Москва, 11 апреля 2007 г.),
2. на кафедре молекулярной физики (Москва, физический факультет МГУ, 25 апреля 2007 г.),
3. в институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН (Москва, 31 мая 2007 г.).

Результаты использовались при создании коммерческого пакета программ для расчета пространственных нестационарных вязких течений в рамках научного центра GDT Software Group (Тула).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-07-90230.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 3 приложений. Общий объем диссертации 108 страниц. Диссертация содержит 4 таблицы, 54 рисунка и список литературы из 63 названий.

Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, дана характеристика работы и кратко изложено содержание по главам.

В **первой главе** производится вывод КГД уравнений с источниками тепла. Используется методика, описанная в [2]. Полученные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} j_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p &= \rho_\star F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i &= \\ &= j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ij} u_j + Q, \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} j_i &= \rho(u_i - w_i), \quad w_i = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho F_i \right), \\ \rho_\star &= \left(\rho - \tau \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \Pi_{\text{NS}ij} + \tau \rho u_i \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} p - F_j \right) + \\ &+ \tau \delta_{ij} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1) Q \right), \end{aligned}$$

$$\Pi_{\text{NS}ij} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right),$$

$$q_i = q_{\text{NS}i} - \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + p u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho} \right),$$

$$q_{\text{NS}i} = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_i} T.$$

Здесь p , u_i , ρ , T — давление, скорость, плотность и температура газа, F_i — компоненты внешней силы, Q — мощность тепловых источников. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Для этих уравнений получена формула для производства энтропии

$$X = \varkappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\Pi_{NS\,ij} \Pi_{NS\,ij}}{2\eta T} + \frac{\tau \rho}{T} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i \right)^2 + \\ + \frac{\tau \rho}{T \varepsilon} \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{\rho} \right)^2 + \frac{\tau p}{\rho^2 T} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i \right)^2 + \frac{Q}{T_\star},$$

где

$$T_\star = T \cdot \left(1 + \tau \left(\frac{1}{\varepsilon} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{\varepsilon \rho} \right) \right)^{-1},$$

откуда следует, что при условии малости параметра τ производство энтропии является неотрицательным. Приведенное выражение в отсутствие источников тепла совпадают с ранее выведенными, например, в [2], а при $\tau = 0$ — с соответствующим выражением для уравнений Навье-Стокса.

Во **второй главе** излагается алгоритм решения КГД уравнений на треугольной сетке. Используется метод конечного объема [3] для аппроксимации пространственных производных и явная схема по времени. Рассматриваются вопросы быстродействия такого алгоритма для нынешнего поколения вычислительных машин.

Далее затрагивается вопрос о возможности автоматической настройки шага по времени в задачах установления и приводится соответствующий эвристический алгоритм. Обосновывается необходимость подобной автоматизации.

Третья глава посвящена тестированию алгоритма на задаче об обтекании прямого кругового цилиндра с образованием дорожки Кармана. Полученный в численном эксперименте период колебаний сравнивается с вычисленным по формуле

$$T = \frac{D}{u_0 \text{Sh}},$$

где D — диаметр цилиндра, u_0 — скорость невозмущенного потока, Sh — число Струхалия, зависящее лишь от числа Рейнольдса. Моделирование проводилось для $Re = 90$

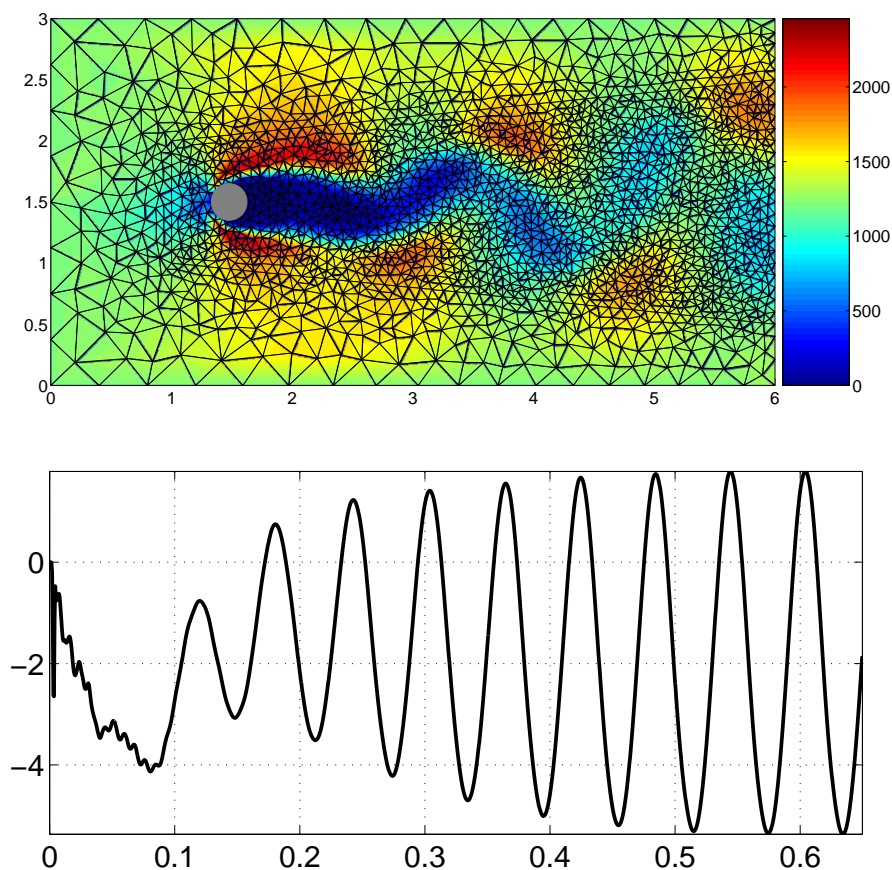


Рис. 1: Дорожка Кармана. Вверху: график $u^2(x, y)$ в некоторый момент времени, показана расчетная сетка. Внизу: зависимость вертикальной компоненты скорости u_y от времени t в точке ($x = 2.5$ м, $y = 2$ м).

Расчетная сетка и зависимость вертикальной компоненты скорости от времени в некоторой фиксированной точке изображены на рисунке 1.

Период, полученный в численном эксперименте отличается от вычисленного не более, чем на 10%, что вполне объяснимо конечным размером сетки. Проводится вычисление на более подробной сетке, что позволяет улучшить этот результат. Окончательное значение $T_{\text{exp}} = 0.057$ сек, вычисленное теоретически значение — $T =$

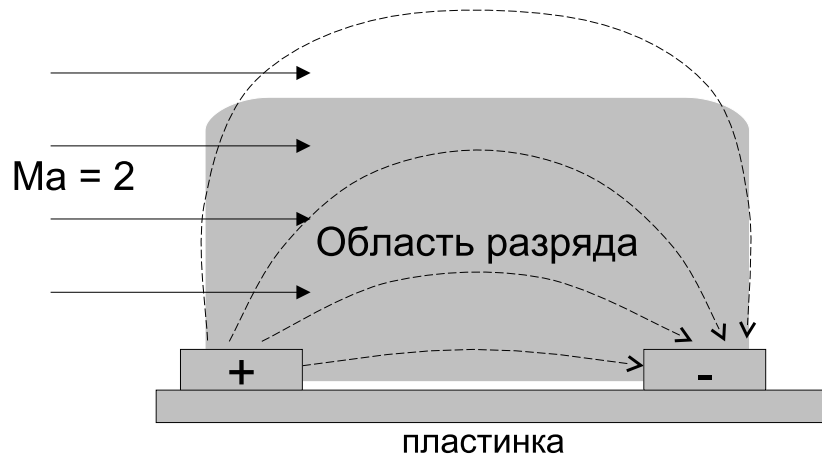


Рис. 2: Обтекание пластинки: схема экспериментальной установки.

0.053 сек.

В четвертой главе решается задача об обтекании горизонтальной пластинки при наличии (модельного) электрического разряда вблизи ее поверхности. Работа проводилась в сотрудничестве с экспериментальной группой, проводившей моделирование методом Монте-Карло и эксперимент в аэродинамической трубе. Упрощенная схема экспериментальной установки приведена на рисунке 2.

Использование КГД уравнений позволило значительно сократить время счета и получить результат за приемлемое время, даже используя схему первого порядка. На рисунке 3 показаны профили скорости, полученные при помощи разных методов. Таблица 1 демонстрирует преимущество КГД подхода.

Были получены профили скорости, согласующиеся с экспериментом в отсутствие разряда, а также оценены тепловая мощность и величина электрического поля в разряде, при которых воздействие

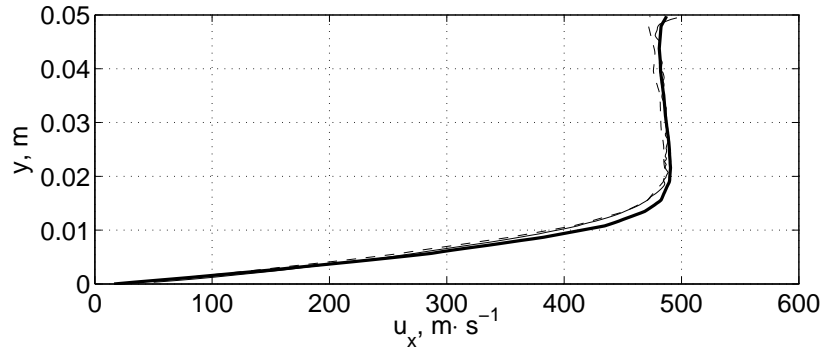


Рис. 3: Обтекание пластинки: сравнение методов между собой. Профили скорости для $x = 0.1\text{ м}$. Тонкая сплошная линия — Монте-Карло, толстая сплошная — КГД, штриховая — Навье-Стокс.

	КГД	Навье-Стокс
Шаг счета	$5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$
Количество шагов до сходимости	200	3300
Общее время вычисления	5 мин	87 мин

Таблица 1: Обтекание пластинки: сравнение времени счета при помощи метода КГД уравнений ($\tau \neq 0$) и Навье-Стокса ($\tau = 0$).

на характер обтекания пластинки становится заметным. Влияние электрического поля и нагревания на профиль скорости показано на рисунке 4. Примечательно, что согласия с экспериментом удается достичь даже на простой модели без учета реальной структуры поля и эффектов взаимодействия поля с плазмой (как, например, в [4]).

В **пятой главе** рассматривается задача о структуре фронта одномерной ударной волны в аргоне и азоте. Стационарная система уравнений Навье-Стокса сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений и решается методом стрельбы по параметру. На примере азота демонстрируется влияние второй вязкости на толщину ударной волны. Введение второй вязкости и использование уточненных данных о зависимости коэффициента вязкости от температуры позволило получить результат, отличающийся от эксперимента не более чем на 30% в диапазоне чисел Маха от 1.5 до 10. Традиционно считается, что расчет с помощью уравнений Навье-

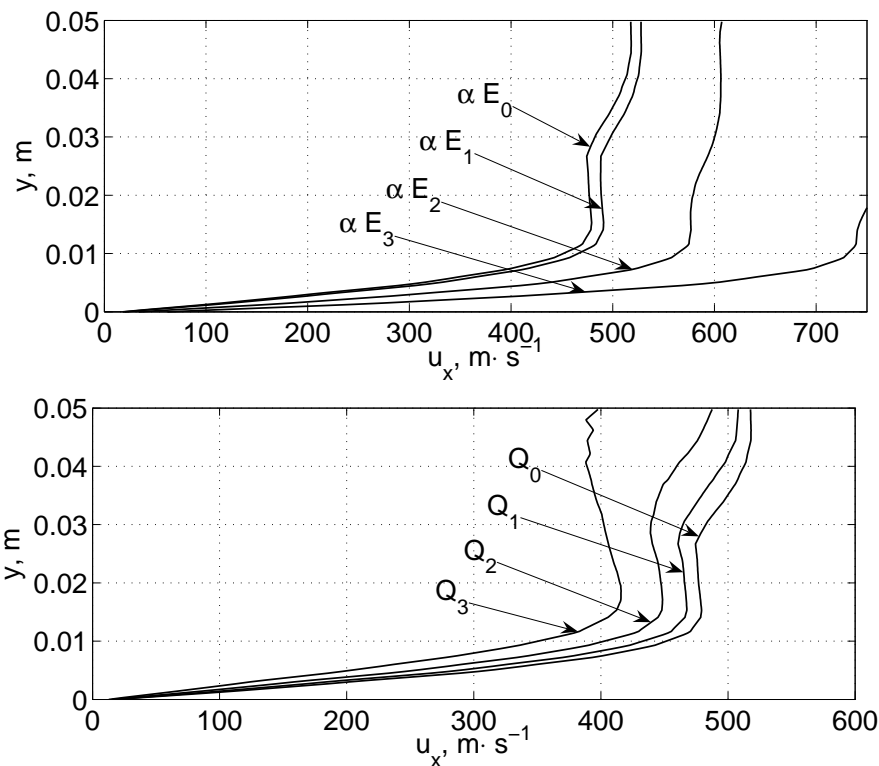


Рис. 4: Обтекание пластинки: профили скоростей для $x = 0.07$ м в зависимости от величины приложенного электрического поля ($\vec{F} = \alpha \rho e N a \vec{E} / m_{air}$, $\alpha E_0 < \alpha E_1 < \alpha E_2 < \alpha E_3$) — сверху, и мощности источников тепла ($Q_0 < Q_1 < Q_2 < Q_3$) — снизу.

Стокса в этой задаче дает результат, отличающийся от эксперимента по крайней мере в 2 раза. Полученные графики зависимости обратной ширины волны от числа Маха для аргона и азота приведены на рисунке 5.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации и намечены пути дальнейшего развития.

Приложение 1 посвящено некоторым практическим вопросам построения сеток и работы с ними. Рассмотрены некоторые коммерческие и свободные пакеты для триангуляции, описан процесс построения и экспорта сетки из пакета Comsol Multiphysics.

В **приложении 2** приведены наиболее важные фрагменты программного кода, использовавшегося для решения КГД уравнений на

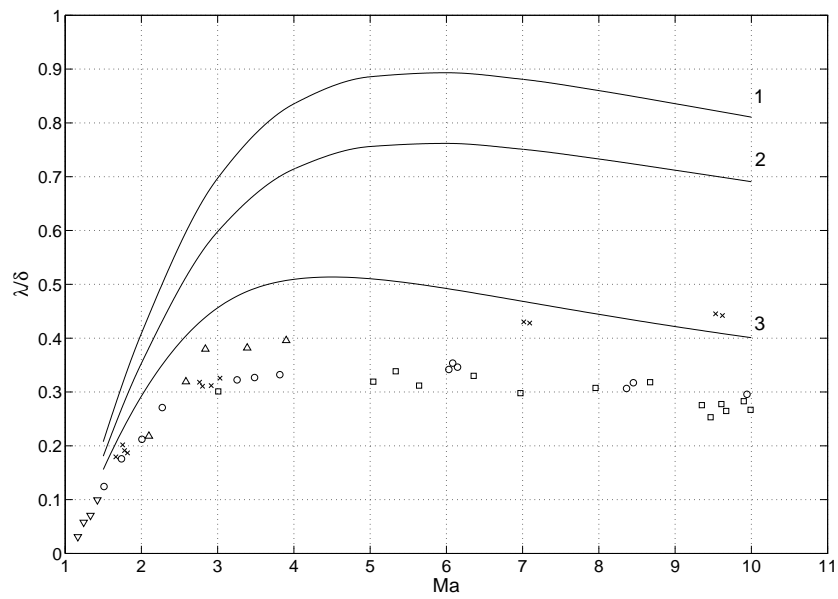
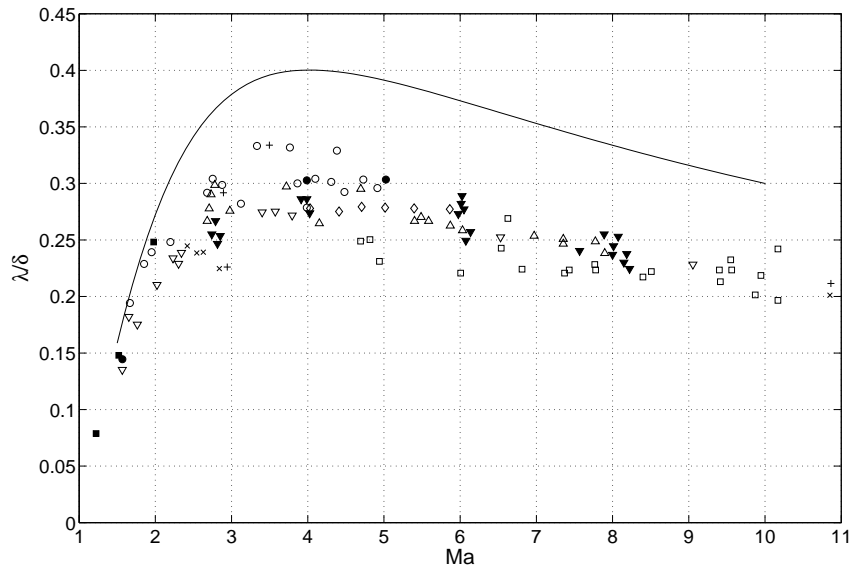


Рис. 5: Сверху: обратная ширина ударной волны λ_{∞}/δ в сравнении с данными экспериментов для аргона, сплошная линия - расчет, маркеры - данные экспериментов. Внизу: обратная ширина в сравнении с данными экспериментов для азота (маркеры), сплошные линии — расчет без второй вязкости (1), с упрощенной второй вязкостью (2), с полной второй вязкостью (3).

треугольной сетке.

В приложение 3 вынесены выражения, полученные для КГД уравнений в случае неидеального газа. В этом общем случае теорема об энтропии пока не доказана, однако в случае газа Ван-дер-Ваальса производство энтропии оказывается положительным вдали от критической точки.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

- [1] Елизарова Т.Г., Хохлов А.А. Численное моделирование структуры ударной волны путем решения стационарных уравнений Навье-Стокса. // Вестник Московского университета, серия 3, Физика. Астрономия. - 2006. - No 3. - с.28-32.
- [2] Елизарова Т.Г., Хохлов А.А. Численный алгоритм для моделирования течений газа с внешними источниками тепла. // Международная конференция “Тихонов и современная математика”, Москва, 19-25 июня 2006 г. Тезисы докладов секции Математическое моделирование. - с.57 – 58.
- [3] Елизарова Т.Г., Хохлов А.А. Квазигазодинамические уравнения для течений газа с внешними источниками тепла. // Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия. - 2007. - No 3. - с. 10-13.
- [4] Elizarova T.G., Khokhlov A.A., Montero S. Numerical simulation of shock wave structure in nitrogen. // Physics of Fluids. - 2007. - vol. 19(no 6). - 068102 (4 pages).
- [5] Хохлов А.А. Моделирование структуры ударной волны методом стрельбы. // Тезисы международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2005”. Секция “Физика”. - часть 1. - с. 109-111.
- [6] Хохлов А.А. Численное моделирование воздействия электрического разряда на пограничный слой. // Тезисы международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2006”. Секция “Физика”. - часть 1. - с. 131-133.
- [7] Elizarova T.G., Khokhlov A.A., Sheretov Yu.V. Quasi-gasdynamics numerical algorithm for gas flow simulations. // ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, 26-29 March 2007, University of Reading, UK. Abstract and Proceedings.

- [8] Menier E., Lago V. , Khokhlov A., Lengrand J.C., Elizarova T.G. Influence of a DC discharge on a Supersonic rarefied air flow over a flat plate: a numerical study. // 2nd European Conference for Aerospace Science, 1-6 July, 2007, Brussels, Belgium. Abstract.

Цитируемая литература

- [1] Елизарова Т.Г., Четверушкин Б. Н. Кинетический алгоритм для расчета газодинамических течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1985. - Т. 25, №10. - С. 1526-1533.
- [2] Шеретов Ю. В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. - Тверь, 2000.
- [3] Елизарова Т.Г., Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. - М.: Мир., 2007.
- [4] Суржиков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006.