На правах рукописи

Кирпичёв Сергей Борисович

К ПОСТАНОВКЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на Физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор П. А. Поляков
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А. Г. Попов
	кандидат физико-математических наук, доцент М. Л. Акимов
Ведущая организация:	Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН

Защита состоится "24 "мая 2007 в 16 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета К 501.001.17 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, г. Москва, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ауд. СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью организации, просьба направлять по указанному адресу в двух экземплярах не позднее, чем за две недели до защиты.

Автореферат разослан "____"____________ 2007.

Учёный секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук Поляков П.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование релятивистских электродинамических систем, не смотря на солидный возраст классической электродинамики (более 150 лет со дня ее создания), является актуальной задачей современной теоретической физики. Этому в немалой степени обязаны достижения экспериментальной релятивистской сильноточной электроники, высокотемпературной физики плазмы, физики взаимодействия мощных лазерных импульсов с веществом. Кроме этого бурное развитие в последние десятилетия компьютерной техники сделало массово доступными и актуальными методы прямого численного моделирования поведения сложных динамических систем, например, методом крупных частиц. Для математически строгого анализа динамики многочастичных систем необходима однозначная, корректная постановка начальной задачи, которая в релятивистском случае осложнена функциональностью уравнений движения, представляющих собою систему дифференциально–разностных уравнений (ДРУ). Именно анализу этого фактора и посвящена данная диссертация.

Цель работы. Целью работы является теоретический анализ особенностей поведения динамики систем заряженных классических частиц и выявление эффектов обусловленных функциональностью силового взаимодействия. Установление минимальных дополнительных начальных условий, позволяющих получать однозначное решение уравнений движения релятивисткой системы классических заряженных частиц.

Научная новизна. В качестве наиболее важных новых научных результатов диссертации отметим следущее:

- Установлено, что для однозначного определения эволюции системы *одноименно* заряженных частиц, движущихся вдоль прямой, и создаваемого ими электромагнитного поля, в слаборелятивистском случае достаточно задание в начальный момент времени только фазовых переменных частиц.

- Обнаружено, что при ограниченном одномерном движении *двух* частиц (связанное состояние) во внешнем удерживающем потенциале, возникают дополнительные “степени свободы” в зависимости от релятивизма. В то время, как в задаче рассеяния размерность пространства начальных данных остается такой же, как и в механике.

Научная и практическая значимость. Научная и практическая значимость обусловлена прежде всего установлением новых особенностей поведения релятивистских электродинамических систем, важных для понимания, теоретического анализа и моделирования явлений, происходящих в ряде практически важных устройств релятивистской СВЧ электроники, физики плазмы, астрофизики.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений и списка литературы, включающего 110 наименований. Общий объем текста — 80 машинописных страниц. Работа содержит 8 рисунков.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ, в том числе 4 статьи в журналах и сборниках и 7 тезисов докладов на конференциях, список которых приведен в конце автореферата.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на IX Всероссийской школе-семинаре по физике микроволн (Звенигород, Московская обл., 2003 г.), VIII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления в неоднородных средах” (Красновидово, Московская обл., 2002 г.), XI и XIV Международных конференциях по спиновой электронике и гировекторной электродинамике (Фирсановка, Московская обл., 2003 г., 2006 г.), Международной конференции MCC-04 “Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность” (Москва, 2004 г.), Международной конференции FMNS–2005 (South-West University “Neofit Rilski”, Blagoevgrad, 2005).

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В первой главе рассмотрен формализм классической теории “действия на расстоянии”, применяемый далее из соображений удобства. Математически корректная формулировка уравнений движения на микроскопическом уровне позволяет оставить в стороне вопрос о самодействии и радиационной отдаче излучателя, столь дискутируемый в литературе по сей день. В то же время, сохранив характерные нелокальные черты Максвелл–Лоренцевой электродинамики: функциональный характер уравнений движения, потенциалы Лиенара–Вихерта.

Кроме того, консервативность динамики позволяет рассмотреть в такой теории случай релятивистского движения в ограниченной области при *стационарных* внешних условиях: постоянном в некоторой ИСО "внешнем поле", со скалярным потенциалом $\phi(x_1)$. Физически, это соответствует тому, что движение части заряженных частиц (фона) является заданным.

Использована формулировка электродинамики, предложенная Уиллером и Фейнманом в двухмерном пространстве Минковского с постоянной метрикой: это соответствует ограничению движения на прямую в электродинамике с тремя пространственными измерениями. Уравнения движения

$$m_a \left(\frac{\dot{a}_i}{\sqrt{\dot{a}^2}} \right)^{\cdot} = e_a F_{ij} \dot{a}^j, \tag{1}$$

определяются как экстремали функционала действия[1]

$$-\sum_a m_a \int \sqrt{da^2} - \sum_{a<b} \sum e_a e_b \iint \delta\big((a-b)^2\big)\, da db. \tag{2}$$

Напряженности "поля" не зависят от ускорений заряженных частиц:

$$F_{ij}(a) = \sum_{b \neq a} \frac{e_b \dot{b}^2}{2} \left. \frac{(a_i - b_i)\dot{b}_j - (a_j - b_j)\dot{b}_i}{\left|\dot{b}(a-b)\right|^3} \right|_{(b-a)^2=0}. \tag{3}$$

Рассмотрено движение положительных ($e_a > 0$) зарядов на неподвижном противоположно заряженном фоне (потенциал ϕ).

Показано, что двухмерный случай допускает существование выделенных систем координат (лучевые координаты, оси направлены по световым лучам). При параметризации мировых линий одной из координат, число отклоняющихся аргументов в уравнениях движения может быть заметно

[1] Мировые линии частиц обозначаем латинскими буквами a, $b\ldots$ Скалярное произведение a и b представляем как $ab \equiv a_i b^i = g_{ij} a^i b^j$, аналогично: $a^{2n} \equiv (aa)^n$. Точками обозначаются производные по параметру соответствующей мировой линии.

редуцированно: взаимодействие вдоль одной из осей становится “мгновенным”. Для двух частиц существует также параметризация (лестничная), в которой отклонения аргументов являются постоянными.

Во второй главе рассмотрен линейный порядок теории возмущений для некоторых точных решений релятивистской задачи N тел. Размерность подпространства *ограниченных* решений уравнений линейного приближения теории возмущений в классической механике является конечной и не привышает $2N$. В этой связи, естественно заинтересоваться ограниченными решениями и в релятивистском случае. Это может послужить корректной оценкой *снизу* для числа степеней свободы в релятивистской задаче N тел. Действительно, физическим смыслом обладает решение уравнений движения с конечной кинетической энергией частиц; скорости должны быть строго меньше световой. Это условие накладывает некоторые ограничения и на спектр “допустимых” решений теории возмущений, что, возможно, устраняет большую часть неограниченных решений. Однако, любое ограниченное решение в теории возмущений заведомо физично.

Исследовано движение N положительных точечных зарядов, на отрезке длинны L противоположно заряженного неподвижного фона. Система в целом предполагается квазинейтральной. Используем галилеевы координаты системы отсчета, где покоятся заряды фона, а в качестве параметра для мировых линий частиц выберем коодинатное время $t = x_0$.

Обозначим через e и m, соответственно, средние значения зарядов и масс частиц. Удобно ввести среднее расстояние между частицами $\Delta = L/(N+1)$ и использовать данную величину в качестве масштаба. Линейная плотность фона будет $\approx -e/\Delta$, а потенциал фона единичной плотности, действующий на a-й заряд:

$$\phi(a_1) = \ln\left[1 - \frac{4a_1^2}{(N+1)^2}\right]. \tag{4}$$

Откуда условие равновесного ($\dot{a}_1 = 0$) состояния системы[2]:

$$\sum_{b\neq a}^{N} \frac{e_a e_b \epsilon_{ab}}{|a_1 - b_1|^2} + \frac{e_a e N \phi'(a_1)}{N+1} = 0. \tag{5}$$

[2]Символ $\epsilon_{ab} = \mathrm{sgn}\,(a_1 - b_1)$ учитывает упорядоченность зарядов. При переходе к лучевой системе координат $x^{\pm} = (x_0 \pm x_1)/\sqrt{2}$, он является инвариантом: $\epsilon_{ab} = \mathrm{sgn}\,(a^+ - b^+)$.

В случае одинаковых частиц, модель характеризуется единственным безразмерным параметром

$$\alpha = \frac{2e^2}{m\Delta}, \tag{6}$$

отношением потенциальной энергии соседних зарядов к их массе покоя. Представив решение уравнений движения в виде формального ряда по степеням отклонения от невозмущенного ($\delta^0 f = f$) решения: $f + \delta f + \delta^2 f + \dots + \delta^n f + \dots$, в фурье-представлении $\delta a_1(t) \to \delta a_1 \exp(i\omega t)$, для спектра линейных возмущений получим

$$\begin{gathered}\left[\frac{\omega^2}{\alpha} + \frac{\phi''(a_1)N/2}{N+1} - \sum_{b\neq a}^{N} \frac{1}{|a_1 - b_1|^3}\right]\delta a_1 + \\ \sum_{b\neq a}^{N} \frac{\cos(\omega|a_1-b_1|) + \omega|a_1-b_1|\sin(\omega|a_1-b_1|)}{|a_1-b_1|^3}\delta b_1 = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Дальнейший анализ проведен в двух предельных ситуациях.

Для двух частиц, равновесное расстояние между зарядами $d \approx 1.385$ определяется из кубического уравнения. Характеристическое уравнение для (7) сводится к

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{8}{3\omega}\frac{9+d^2}{(9-d^2)^2} + \frac{1+\cos(\omega d)}{\omega d^3} + \frac{\sin(\omega d)}{d^2}. \tag{8}$$

При увеличении степени релятивизма, наблюдается появление новых пар собственнх значений (первая бифуркация при $\alpha \approx 7.85$). В пределе $\alpha \to \infty$, можно аппроксимировать спектр

$$\omega_n = \frac{v_0 + \pi n}{d} + O(\alpha^{-1}), \tag{9}$$

где $v_0 > 0$ является наименьшим корнем

$$\frac{8d^3}{3}\frac{9+d^2}{(9-d^2)^2} + 1 + \cos v_0 + v_0 \sin v_0 = 0. \tag{10}$$

Число собственных значений растет $\propto \alpha/(\pi d)$.

Для $N >> 1$ частиц на отрезке L, уравнения равновесия дают практически равномерное распределение и вклад потенциала ϕ играет роль граничного эффекта, а период решетки Δ является новым независимым параметром задачи.

Решение спектрального уравнения (7) ищем в виде стоячих волн $\exp(ikn)$, где $k \in [0, \pi]$. Откуда спектр решетки определится из нелинейного уравнения

$$\omega^2 = 4\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(nk)\left(\cos(n\omega) + n\omega \sin(n\omega)\right)}{n^3}, \tag{11}$$

Аналогично характеристическому уравнению (8) для пары частиц, в релятивистском случае ($\alpha \to \infty$), ветви спектра $\omega_n(k)$ будут определяться нулями правой части (11); число ветвей растет линейно с α. Это соответствует линейному росту числа собственных значений (7) по α и N.

Третья глава представляет ряд подходов к решению задачи N тел вне рамок теории возмущений. Рассмотренные ниже алгоритмы решения можно использовать для численного моделирования.

В задаче рассеяния ($\phi = 0$), удобно использовать метод сжимающих отображений. Уравнения движения в лучевой системе координат, при параметризации $t = x^-$:

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{\dot{a}^+}}\right)^{\cdot} = \sum_{b \neq a} \frac{Q_{ab}(t)}{|a^+ - b^+|^2}, \tag{12}$$

где

$$Q_{ab}(t) = \frac{2e_a e_b \epsilon_{ab}}{m_a} \left\{ \dot{b}^+(t) + \frac{\left[\frac{1}{\Theta_{ab}} \int_t^{t+\Theta_{ab}} \dot{b}^+(\tau) d\tau\right]^2}{\dot{b}^+\left(t + \Theta_{ab}\right)} \right\}, \tag{13}$$

причем отклонение аргумента $\Theta_{ab}(t) = \epsilon_{ab} |\Theta_{ab}|$ определяется как единственное решение функционального уравнения

$$b^+\left(t + \Theta_{ab}\right) = a^+(t). \tag{14}$$

Метод решения состоит в задании пробных мировых линий частиц, определении $Q_{ab}(t)$ из (13), (14) и решении уравнений движения (12) с заданными начальными условиями $\{a^+(0), \dot{a}^+(0)\}$. При малых кинетических энергиях налетающих частиц, доказана сходимость алгоритма.

Для задачи о финитном движении частиц в удерживающем потенциале $\phi \neq 0$, можно воспользоваться методом редукции дифференциального порядка системы уравнений. Представив правую часть уравнений движения в виде формального ряда по степеням отклонения аргумента, на первой итерации решение определяется из дарвиновского приближения. В последующих итерациях алгоритма определяем производные выше второго порядка из предыдущей итерации.

Учитывая, что отклоняющиеся аргументы $\propto \sup_t \max_a |\dot{a}_1(t)|$, сходимость данного алгоритма удается доказать в слаборелятивистском случае. Когда мала энергия системы (по нерелятивистской формуле) заряженных частиц. В совокупности с задачей рассеяния, данное утверждение показывает, что выполнен *принцип соответствия*: ньютоновы начальные данные определяют единственное решение уравнений движения при достаточно низких энергиях системы.

Для *двух* частиц, как отмечено в первой главе, существует параметризация, в которой отклонения аргументов становятся постоянными. Здесь можно свести задачу к набору зацепляющихся ОДУ (решетка)

$$\begin{aligned} m_a\left(\sqrt{\frac{\dot{q}^+_{n-1}}{2\dot{q}^-_n}}\right)^{\cdot} &= -e_a\dot{q}^+_{n-1}\phi'\left(\frac{q^+_{n-1}-q^-_n}{2}\right) - \\ &\quad \frac{e_ae_b\dot{q}^-_{n-1}}{\left|q^-_n - q^-_{n-1}\right|^2} - \frac{e_ae_b\dot{q}^+_{n-1}}{\left|q^+_n - q^+_{n-1}\right|^2}\frac{\dot{q}^+_n}{\dot{q}^-_n}, \\ m_b\left(\sqrt{\frac{\dot{q}^+_n}{2\dot{q}^-_n}}\right)^{\cdot} &= -e_b\dot{q}^+_n\phi'\left(\frac{q^+_n-q^-_n}{2}\right) + \\ &\quad \frac{e_ae_b\dot{q}^-_{n+1}}{\left|q^-_{n+1} - q^-_n\right|^2} + \frac{e_ae_b\dot{q}^+_n}{\left|q^+_n - q^+_{n+1}\right|^2}\frac{\dot{q}^+_{n+1}}{\dot{q}^-_n}, \end{aligned} \tag{15}$$

и алгебраическим уравнениям сшивки

$$q^\pm_{n+1}(0) = q^\pm_n(1), \qquad \dot{q}^\pm_{n+1}(0) = \dot{q}^\pm_n(1). \tag{16}$$

В задаче рассеяния и движения частиц в ограниченной области, используются различные граничные условия для обрыва цепочки.

При рассеянии, движение "частиц" с $|n| \to \infty$ является ассимптотически свободным. Что позволяет ограничить индекс n конечным интервалом.

Начальные значения $\{q_n(0), \dot{q}_n(0)\}$ при $n \neq 0$, определяются из условий сшивки (16): размерность пространства начальных данных ($q_0^\pm(0)$ и $\dot{q}_0^\pm(0)$) остается такой же, как и в нерелятивистском случае. Отметим, что алгебраические уравнения сшивки могут иметь *конечное* число решений относительно начальных данных: единственное в нерелятивистской области решение может распадаться при высоких энергиях на несколько ветвей, соответствующих одинаковым параметрам рассеяния.

В случае финитного движения выбираются граничные условия Борна–Кармана и задача сводится к поиску решений типа бегущей волны. При слабом отклонении от равновесного распределения (рассмотренного во второй главе), ветви спектра соответствуют действительным собственным значениям уравнения (8).

Выводы

В заключении сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

1. Исследована модель электродинамики Уиллера–Фейнмана в двухмерном пространстве Минковского (движение частиц вдоль прямой). Установлено, что уравнения движения сводятся к системе N ДРУ второго порядка.

2. Рассмотрен спектр линейных возмущений точного решения для равновесного состояния системы N зарядов на однородном противоположно заряженном фоне (одномерный атом Томпсона). Показано, что при увеличении плотности системы в спектре появляются новые собственные значения, отвечающие ограниченным решениям.

3. Доказано (*принцип соответствия*), что ньютоновы начальные данные позволяют выделить единственное решение релятивистской задачи рассеяния или задачи о финитном движении частиц при достаточно низких энергиях системы.

4. В релятивистском случае, задача о движении *двух* заряженных частиц во внешнем поле сведена (лестничная параметризация) к счет-

ному набору зацепляющихся ОДУ (решетка) и алгебраических уравнений сшивки (механика со связями).

5. В задаче рассеяния можно воспользоваться условием асимптотической свободы для обрыва полученной цепочки ОДУ. Это показывает, что размерность задачи остается той же, что и в механике.

6. При финитном движении, использование граничного условия Борна–Кармана позволило строго подтвердить вывод о повышении размерности системы и возникновении новых коллективных "степеней свободы", сделанный на основе анализа спектра линейных возмущений.

Основное содержание диссертационной работы изложено в следующих публикациях:

[1] *Kirpichev S. B., Polyakov P. A.* On the formulation of initial-value problems for systems consisting of relativistic particles // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2007. — Feb. — Vol. 141. — Pp. 1051–1061. .

[2] Релятивистские особенности электромагнитного отклика плазменной среды / Ю. В. Болтасова, С. Б. Кирпичев, П. А. Поляков, А. Е. Русаков // *Радиотехника и электроника.* — 2003. — Т. 48, № 6.

[3] *Кирпичёв С. Б., Поляков П. А.* Постановка начальной задачи для системы релятивистских заряженных частиц // *Электромагнитные волны и электронные системы.* — 2004. — Т. 9, № 6.

[4] *Кирпичёв С. Б., Поляков П. А.* О постановке начальной задачи для системы релятивистских частиц // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2005. — Т. 11, № 1. — С. 211–226.

[5] *Кирпичев С. Б., Поляков О. П., Поляков П. А.* Ленгмюровские волны в тонкой плазменной нити // Труды X Всероссийской школы-семинара "Волновые явления в неоднородных средах". — М.: Физический факультет МГУ, 2006. — Pp. 30–32.

[6] *Кирпичев С. Б., Поляков П. А.* Возмущения точного решения проблемы n тел в классической релятивистской электродинамике //

Сборник статей по материалам XIV Международной конференции по спиновой электронике и гировекторной электродинамике. — М.: Изд-во МЭИ, 2006. — Pp. 173—175.

[7] Can electrodynamic system have a finite number of degrees of freedom / S. B. Kirpichev, P. Polyakov, I. Giudjenov, M. Tasev // Mathematics and natural sciences. Proceedings of the international scientific conference 8-11.06.2005. South-West University “Neofit Rilsky”. — Vol. 1. — Blagoevgrad: 2005. — Pp. 297–305.

[8] Неволновые особенности релятивистской магнитоактивной плазмы / Н. Е. Ким, С. Б. Кирпичёв, П. А. Поляков, А. Е. Русаков // Международная конференция MCC–04 “Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность”. Сборник трудов. — М.: РОХОС, 2004. — Nov. — С. 55–60.

[9] Релятивистские особенности электромагнитного отклика плазменной среды / Ю. В. Болтасова, С. Б. Кирпичёв, П. А. Поляков, А. Е. Русаков // Труды VIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах”. — М.: Физический факультет МГУ, 2002.

[10] *Кирпичев С. Б., Поляков П. А.* Самосогласованная постановка начальной задачи в теории релятивистской плазмы // XI Международная конференция по спиновой электронике и гировекторной электродинамике. 19-21 декабря 2003. Москва (Фирсановка). Россия. Сб. трудов. — М.: 2003. — Pp. 362–379.

[11] *Кирпичев С. Б., Поляков П. А.* О постановке начальной задачи системы релятивистских заряженных частиц // Труды IX Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн.”. — М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2003. — P. 55.