

На правах рукописи

Мосунова Настасья Александровна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
КИРАЛЬНЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2007

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Боголюбов Александр Николаевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Беланов Анатолий Семёнович,
кандидат физико-математических наук,
ст. н. с. Галишникова Тамара Николаевна.

Ведущая организация: Институт Математического Моделирования
Российской Академии Наук.

Защита диссертации состоится “24” мая 2007 г. в 16⁰⁰ на заседании
диссертационного совета К 501.001.17 в Московском государственном
университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, г. Москва,
Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, дом 1, строение 2, Физический
факультет, ауд. СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан “19” апреля 2007 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета К 501.001.17

доктор физико-математических наук

П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие радиоэлектронной промышленности потребовало разработки принципиально новых материалов, сильно взаимодействующих с электромагнитными волнами. К подобным материалам относятся киральные среды.

Особое внимание уделяется изучению взаимодействия киральных материалов с распространяющимися электромагнитными волнами в СВЧ диапазоне. Интерес к этой области вызван перспективностью применения киральных материалов в качестве элементов направленных ответвителей, антиотражающих покрытий, модовых фильтров и многих других устройств. Например, в многослойных кирально-диэлектрических структурах удаётся получить окна непрозрачности для право циркулярно поляризованных и лево циркулярно поляризованных волн, причём в непрерывающихся частотных диапазонах, то есть полученные системы демонстрируют поляризационно-избирательные свойства и их можно рассматривать в качестве поляризационных фильтров. В настоящее время теория электромагнитной киральности развивается в нескольких основных направлениях: исследование свойств киральных объектов как элементов искусственных структурных сред; решение задач о поведении электромагнитных полей и волн в киральных средах при известных материальных параметрах; разработка и создание киральных объектов и сред с заданными электромагнитными свойствами. Первые два направления позволяют определить основные физические характеристики киральных сред, а третье – использовать их в практических приложениях.

В связи с тем что использование киральных материалов в волноведущих системах даёт неоспоримые преимущества по сравнению с традиционно используемыми средами, для многих приложений требуются методы, которые позволили бы с хорошей точностью определять характеристики распространения и поля мод в киральных волноведущих системах. Необходимое соответствие численных расчётов и результатов физического эксперимента удаётся получить, применяя численные методы и компьютерное моделирование. Диссертационная работа посвящена решению задачи о разработке эффективных алгоритмов для адекватного описания явлений, наблюдаемых при взаимодействии киральных материалов с электромагнитными волнами. В частности, в диссертации рассмотрены задачи о нахождении постоянных распространения волн прямоугольного и цилиндрического волноводов, заполненных киральной средой, на основе которых решена задача проектирования прямоугольного кирального волновода, обладающего большой полосой частот одномодового режима.

Цель работы. Целью диссертации является разработка эффективных методов решения прямой задачи расчёта киральных волноведущих систем и решение на их основе

обратной задачи проектирования киральных волноводов, обладающих заданными характеристиками, что включает в себя:

- § разработку численных алгоритмов решения краевой задачи для нахождения постоянных распространения электромагнитных волн в киральных волноводах с прямоугольной и круглой геометрией поперечного сечения и их реализацию в виде программного комплекса на ЭВМ;
- § применение программного комплекса для исследования свойств распространяющихся электромагнитных волн в киральных волноведущих системах;
- § разработку численного алгоритма решения обратной задачи проектирования прямоугольного кирального волновода с максимальным разнесением первых двух мод, его реализацию в виде программного комплекса и получение численных результатов.

Научная новизна работы. Впервые построен алгоритм решения задачи распространения электромагнитных волн в киральных волноведущих системах методом смешанных конечных элементов. Разработанная методика решения задачи использована для расчёта постоянных распространения волн в киральных волноведущих системах с прямоугольной геометрией поперечного сечения. Результаты исследования продемонстрировали высокую эффективность и точность предложенного алгоритма. Получены физически значимые результаты: модовая бифуркация, смещение частоты отсечки, стабильность постоянной распространения при изменении геометрических параметров прямоугольного волновода, линейная зависимость значения постоянной распространения от величины параметра киральности. Разработанный метод решения прямой задачи впервые использован для решения задачи синтеза – для нахождения таких значений диэлектрической проницаемости и параметра киральности, при которых киральная волноведущая система обладает широкой полосой частот одномодового режима. Общая постановка задачи позволяет использовать разработанные алгоритмы для моделирования сред более общего вида, называемых биизотропными.

Практическая ценность работы. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при расчёте широкого класса волноведущих систем с киральным заполнением, а также при решении задач математического проектирования подобных систем.

Личный вклад соискателя состоит в следующем:

- § разработаны алгоритмы решения задачи о распространении электромагнитных волн в киральных волноводах с прямоугольной и круглой геометрией поперечного сечения и задачи о проектировании прямоугольного кирального волновода с максимальным разнесением первых двух мод;
- § создан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы;
- § проведены исследования поведения постоянной распространения электромагнитных волн в волноводах с прямоугольной и цилиндрической геометриями и получено численное решение обратной задачи проектирования прямоугольного кирального волновода с максимальным разнесением первых двух мод.

Основные положения, выносимые на защиту:

- § Дискретная математическая модель для решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндрической и прямоугольной области с материальными уравнениями киральной среды.
- § Численный алгоритм решения задачи нахождения постоянных распространения электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с киральным заполнением на основе метода смешанных конечных элементов и в цилиндрическом волноводе на основе метода конечных элементов.
- § Программный комплекс, реализующий предложенные алгоритмы, написанный на языке FORTRAN, и результаты расчётов постоянных распространения электромагнитных волн прямоугольного и цилиндрического киральных волноводов при изменении материальных параметров среды, полученные с его помощью.
- § Алгоритм решения обратной задачи проектирования прямоугольного волновода с киральным заполнением, обладающего максимальной полосой частот одномодового режима, реализованный в виде программного комплекса.
- § Численные результаты, полученные с помощью разработанного программного комплекса.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2004», VI и VII школе молодых учёных ИБРАЭ РАН, V международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов», научном семинаре по граничным задачам электродинамики Физического факультета МГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 научных работ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы из 90 библиографических ссылок и приложения. Общий объём работы составляет 95 страниц основного текста, включая 4 таблицы и 27 рисунков и графиков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы её основные цели, новизна и практическая ценность.

Первая глава посвящена обзору основных методов расчёта киральных волноведущих систем. В первом разделе дано общее представление о киральных средах.

Понятие «киральность» было введено в науку Уильямом Томсоном в начале XIX века, как свойство объекта не совпадать, не совмещаться со своим зеркальным отображением (в плоском зеркале) ни при каких перемещениях и вращениях. Среда из киральных молекул (или содержащие киральные объекты) называются киральными. Такие среды хорошо исследованы в оптике, включая кристаллооптику, где они называются активными или гиротропными. Концепция электромагнитной киральности объединяет как оптическую активность, которая вызывает поворот плоскости поляризации плоских оптических волн, так и циркулярный дихроизм, проявляющийся в изменении вида поляризации волны.

Во втором разделе рассматриваются уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в киральных средах. Поле в волноводе определяется системой уравнений Максвелла, которая с учётом зависимости полей от времени в виде $e^{-i\omega t}$, записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi r, \end{array} \right. \quad (1)$$

где \mathbf{E}, \mathbf{B} – это напряжённость электрического поля и индукция магнитного поля соответственно, $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ – вектор электрической индукции (\mathbf{P} – макроскопический вектор поляризации среды), $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$ – вектор напряжённости магнитного поля (\mathbf{M} – макроскопический вектор намагниченности среды), а r, \mathbf{j} – усреднённые плотности заряда и тока свободных носителей зарядов.

Для замыкания системы уравнений (1) необходимо использовать дополнительные соотношения, называемые материальными уравнениями среды. Материальные уравнения киральной среды имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{D} &= e \overset{\cdot}{E} - i c \overset{\cdot}{H}, \\ \overset{\cdot}{B} &= m \overset{\cdot}{H} + i c \overset{\cdot}{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

где e , m , c – материальные константы. Параметр связи электрического и магнитного полей c , называемый параметром киральности, пропорционален отношению $\frac{a}{l}$, где a – линейный размер частицы-элемента среды, а l – длина волны. При $\frac{a}{l} \rightarrow 0$ киральные свойства среды исчезают. В искусственных киральных средах величину $c = C \frac{a}{l}$ удалось значительно увеличить. В этом случае киральность уже не является малой поправкой и даже для волн СВЧ диапазона характеристики распространения электромагнитных волн в киральных и некиральных средах могут значительно отличаться.

Наличие в $\overset{\cdot}{D}$ слагаемого, пропорционального $\overset{\cdot}{H}$, означает, что ток, индуцируемый переменным магнитным полем в киральных элементах, образующих киральную среду, создаёт не только магнитный дипольный момент, но и электрический дипольный момент. Требование взаимности приводит к тому, что переменное электрическое поле индуцирует в таких элементах ток, который создает как электрический, так и магнитный дипольные моменты. Это налагает ограничения на коэффициенты при $\overset{\cdot}{H}$ в первом уравнении и при $\overset{\cdot}{E}$ во втором уравнении системы (2): они должны быть комплексно сопряжены. В дальнейшем будем рассматривать изотропные киральные среды, для которых e , m , c являются скалярными величинами.

Существует другая распространенная форма записи материальных уравнений:

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{D} &= e_c \overset{\cdot}{E} + i x_c \overset{\cdot}{B}, \\ \overset{\cdot}{H} &= i x_c \overset{\cdot}{E} + \overset{\cdot}{B} / m_c, \end{aligned} \quad (3)$$

где $e_c = e - \frac{c^2}{m}$, $m_c = m$, $x_c = -\frac{c}{m}$ (x_c называют киральным адмитансом). В такой форме записи материальных уравнений e_c зависит от параметра киральности и в случае обращения параметра киральности в ноль переходит в диэлектрическую проницаемость для обычной диэлектрической среды.

В третьем разделе рассматриваются основные методы расчёта киральных волноведущих систем. Для систем со сложным анизотропным заполнением, в том числе и киральным, точные аналитические решения можно получить только для сильно ограниченного класса объектов. В большинстве случаев необходимо применять численные методы и компьютерное моделирование. В диссертации рассмотрено несколько методов, достаточно хорошо зарекомендовавших себя при моделировании волноведущих систем со сложным анизотропным заполнением. Для каждого метода дана краткая характеристика, а также пример применения данного метода для расчёта конкретной задачи.

1. Метод конечных разностей. Применение метода конечных разностей к расчёту волноведущих систем с киральным заполнением проиллюстрировано на примере прямоугольного волновода, для которого проанализированы свойства распространяющихся мод и построены дисперсионные кривые для первых двух мод.
2. Метод Бубнова-Галёркина. Его применение рассмотрено на примере расчёта постоянных распространения кирального прямоугольного волновода.
3. Метод конечных элементов. Рассмотрено его применение для расчёта постоянных распространения электромагнитных волн в киральном волноводе с круглой геометрией поперечного сечения, причём благодаря введению дополнительных граничных условий на нормальные составляющие поля, удаётся избавиться от появления фиктивных решений, возникающих при применении метода конечных элементов к расчёту волноведущих систем, и создать весьма экономичный алгоритм, гарантирующий хорошую точность вычислений.

В четвёртом разделе рассмотрены аналитические методы, используемые для расчёта киральных волноводов:

1. Метод векторных цепей.
2. Метод диадных функций Грина.

Дано представление об основных положениях этих методов и их применении для решения конкретных задач.

Во второй главе строится эффективный алгоритм расчёта киральных волноведущих систем. В первом разделе решается задача расчёта цилиндрического кирального волновода методом конечных элементов. Поле в таком волноводе в отсутствие токов и зарядов описывается системой уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot} \dot{H} = -ik \dot{D}, \\ \text{rot} \dot{E} = ik \dot{B}, \end{cases} \quad (4)$$

где \dot{H}, \dot{E} – вектора напряжённости магнитного и электрического поля, \dot{D}, \dot{B} – электрическая и магнитная индукции, $k = \frac{\omega}{c}$.

На стенке волновода зададим однородное граничное условие

$$\left[\dot{E} \times \dot{n} \right]_{\Sigma} = 0 \quad (\dot{n} - \text{нормаль к } \Sigma). \quad (5)$$

Материальные уравнения киральной среды запишем в наиболее общем виде:

$$\begin{cases} \dot{D} = a_{11}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) \dot{E} + a_{12}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) \dot{H}, \\ \dot{B} = a_{21}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) \dot{E} + a_{22}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) \dot{H}, \end{cases} \quad (6)$$

где \mathbf{e} и \mathbf{m} – диэлектрическая и магнитная проницаемость соответственно, а c – параметр киральности. Матрица коэффициентов в (6) должна быть невырожденной, а сами коэффициенты должны удовлетворять специальным предельным соотношениям, чтобы при устремлении c к нулю киральная среда вырождалась в диэлектрик или магнетик:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} a_{11}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) &= \mathbf{e}, & \lim_{c \rightarrow 0} a_{12}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) &= 0, \\ \lim_{c \rightarrow 0} a_{21}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) &= 0, & \lim_{c \rightarrow 0} a_{22}(\mathbf{e}, \mathbf{m}, c) &= \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что материальные уравнения (6), на самом деле, описывают более общий класс сред, называемых биизотропными. Однако, в случае когда коэффициенты a_{12} и a_{21} комплексно сопряжены, а a_{11} и a_{22} некоторые скалярные величины, мы переходим к предельному случаю киральной среды.

В силу регулярности рассматриваемой волноводной системы вдоль оси z можно записать $\frac{\partial}{\partial z} = ib$, где b – постоянная распространения. Введём обозначение $I = -ib$, и тогда система уравнений Максвелла в покомпонентной записи в цилиндрической системе координат будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{i}_r \left| -i \frac{a_{11}}{k\Delta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2(rE_j)}{\partial j \partial r} - \frac{\partial^2 E_r}{\partial j^2} \right) \right] - i \frac{a_{21}}{k\Delta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2(rH_j)}{\partial j \partial r} - \frac{\partial^2 H_r}{\partial j^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + I H_j + ika_{11}E_r + ika_{12}H_r = 0, \right. \\ \dot{i}_j \left| -i \frac{a_{11}}{k\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial(rE_j)}{\partial r} + \frac{\partial E_r}{\partial j} \right\} \right) \right] - i \frac{a_{21}}{k\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial(rH_j)}{\partial r} + \frac{\partial H_r}{\partial j} \right\} \right) \right] - \right. \\ \left. - I H_r + ika_{11}E_j + ika_{12}H_j = 0, \right. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \Big|_{i_r} & i \frac{a_{12}}{k\Delta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2(rE_j)}{\partial j \partial r} - \frac{\partial^2 E_r}{\partial j^2} \right) \right] + i \frac{a_{22}}{k\Delta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2(rH_j)}{\partial j \partial r} - \frac{\partial^2 H_r}{\partial j^2} \right) \right] + \\
& + I E_j - ika_{21}E_r - ika_{22}H_r = 0, \\
\mathbf{r} \Big|_{i_j} & i \frac{a_{12}}{k\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial(rE_j)}{\partial r} + \frac{\partial E_r}{\partial j} \right\} \right) \right] + i \frac{a_{22}}{k\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial(rH_j)}{\partial r} + \frac{\partial H_r}{\partial j} \right\} \right) \right] - \\
& - I E_r - ika_{21}E_j - ika_{22}H_j = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Система уравнений (8)-(9) дополняется граничным условием (5).

Для решения системы уравнений (8)-(9) используется метод конечных элементов. Этот метод имеет такое неоспоримое преимущество, как широкая универсальность, что позволяет рассчитывать волноводы со сложной геометрией поперечного сечения. Кроме того, выбор этого метода объясняется простотой его физической интерпретации, а также ясностью и чёткостью численного алгоритма, что существенно облегчает программирование сложных задач математической физики. Введём в области Ω сетку $w = w_r \times w_j$:

$$\begin{aligned}
w_r &= \left\{ r_i = ih_r, \quad i = 1, 2, \dots, K; \quad h_r > 0 \right\}, \\
w_j &= \left\{ j_j = jh_j; \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad h_j = \frac{2p}{M} \right\},
\end{aligned}$$

разбив тем самым область Ω на подобласти Ω_{ij} . Осуществим триангуляцию области Ω , разделив каждый прямоугольник Ω_{ij} диагональю. Основная идея метода конечных элементов заключается в разложении искомой функции по системе выбранных базисных функций $\{N_{ij}\}$. Базисную функцию N_{ij} для конечного элемента, соответствующего узлу (i, j) введённой нами сетки, выберем так, чтобы она была равна единице в узле (i, j) и нулю во всех остальных узлах. Выберем носитель базисной функции, как показано на рис. 1.

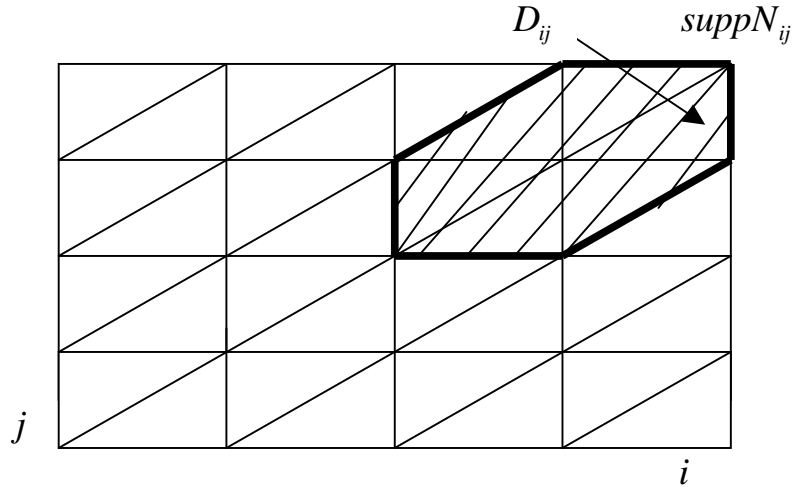


Рис. 1. Носитель базисной функции в прямоугольных координатах (r, φ)

Каждую из функций N_{ij} можно выразить через «стандартную» функцию $\varphi(s, t)$ вида

$$j(s, t) = \begin{cases} 1-s, & 0 \leq s \leq 1, & 0 \leq t \leq s, \\ 1-t, & 0 \leq s \leq 1, & s \leq t \leq 1, \\ 1+s-t, & -1 \leq s \leq 0, & 0 \leq t \leq s+1, \\ 1+s, & -1 \leq s \leq 0, & s \leq t \leq 0, \\ 1+t, & -1 \leq s \leq 0, & -1 \leq t \leq s, \\ 1-s+t, & 0 \leq s \leq 1, & s-1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Общий вид этой функции показан на рис. 2.

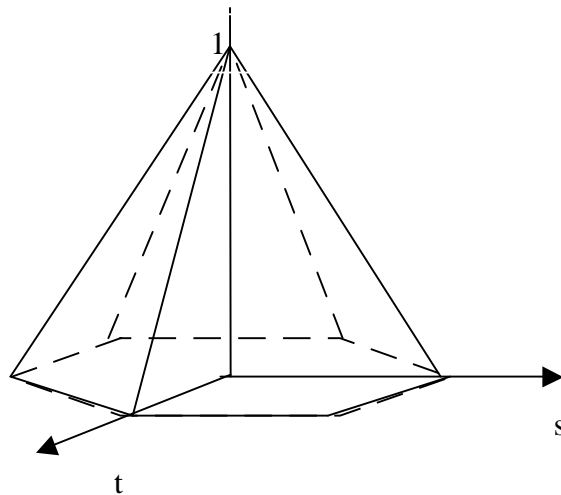


Рис. 2. Общий вид функции $\varphi(s, t)$

Тогда базисные функции можно представить следующим образом:

$$N_{ij}(r, \mathbf{j}) = j \left(\frac{r}{h_r} - i, \frac{j}{h_j} - j \right).$$

Функции такого вида часто называют функциями Куранта.

Согласно методу конечных элементов, решение системы уравнений (8)-(9) будем искать в виде

$$\begin{aligned} H_r &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M H_{ij}^r N_{ij}(r, j), & H_j &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M H_{ij}^j N_{ij}(r, j), \\ E_r &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M E_{ij}^r N_{ij}(r, j), & E_j &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M E_{ij}^j N_{ij}(r, j), \end{aligned} \quad (10)$$

где $H_{ij}^{r,\varphi}$, $E_{ij}^{r,\varphi}$ – коэффициенты, являющиеся ввиду выбора базисных функций значениями искомых функций в узлах сетки.

В результате подстановки разложения в исходную систему уравнений, приходим к обобщённой задаче на собственные значения для определения постоянной распространения. Алгоритм решения задачи на собственные значения (8)-(9) реализован на языке FORTRAN.

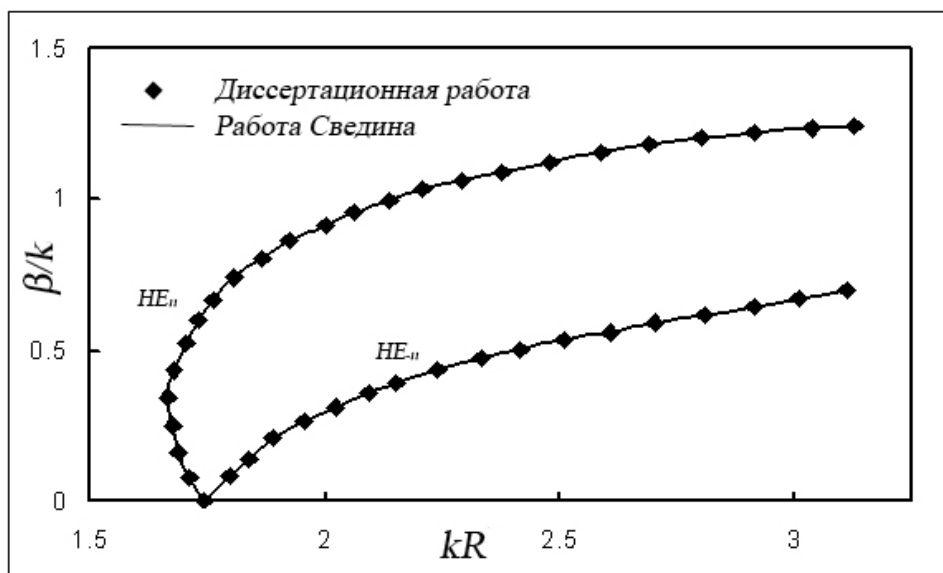


Рис. 3. Результаты расчёта постоянной распространения цилиндрического кирального волновода радиуса R

На рис. 3 приведено сравнение результатов расчёта постоянной распространения цилиндрического волновода, полученных в диссертации, а также на основе другого подхода в работе Сведина¹. Обозначение HE_{mn} использовано для моды, переходящей в TE_{mn} волну, где n означает зависимость от j в виде e^{inj} , а m обозначает, что мода имеет номер m , при упорядочивании по возрастанию частоты отсечки для данного n . Видно, что результаты расчётов согласуются друг с другом.

¹ J.A.M. Svedin. Propagation analysis of chirowaveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1990. – Vol. 38. – №10. – P. 1488-1495.

Отметим некоторые особенности кирального волновода, выявленные при его моделировании:

- § Все моды являются гибридными или смешанными.
- § Каждая киральная мода разделяется на две ветви с различными постоянными распространения, которые зависят от знака n , однако частоты отсечки для двух таких ветвей одинаковые (явление бифуркации мод).
- § Существует «обратная область», где фазовые и групповые скорости имеют противоположный знак.

Во втором разделе даны основные положения метода смешанных конечных элементов, описан разработанный алгоритм и представлены результаты решения задачи нахождения постоянных распространения прямоугольного кирального волновода методом смешанных конечных элементов.

Поле в волноводе в отсутствие токов и зарядов описывается системой уравнений Максвелла (4) с граничным условием (5) и материальными уравнениями в виде (6).

В силу регулярности системы вдоль оси z , $\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{E}}(x, y)e^{g z}$, и систему уравнений (8)-(9) можно переписать следующим образом

$$\text{rot}_g \dot{\mathbf{H}} = -ika_{11} \dot{\mathbf{E}} - ika_{12} \dot{\mathbf{H}}, \quad (11)$$

$$\text{rot}_g \dot{\mathbf{E}} = ika_{21} \dot{\mathbf{E}} + ika_{22} \dot{\mathbf{H}}, \quad (12)$$

где $\text{rot}_g \mathbf{X} = \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} - g X_y \right) \mathbf{e}_x + \left(g X_x - \frac{\partial X_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$.

Из уравнения (12) выразим $\dot{\mathbf{H}}$, подставим выражение для $\dot{\mathbf{H}}$ в уравнение (11) и запишем полученное равенство в виде

$$\text{rot}_g \frac{1}{a_{22}} \text{rot}_g \mathbf{E} - ik \text{rot}_g \frac{a_{21}}{a_{22}} \mathbf{E} + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \text{rot}_g \mathbf{E} - k^2 a_{11} \mathbf{E} + k^2 \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \mathbf{E} = 0. \quad (13)$$

Умножим (13) скалярно справа на \mathbf{E}^* из того же пространства, что и \mathbf{E} , проинтегрируем по всей области и учтём свойства скалярного произведения, дивергенции, ротора и граничные условия. Тогда выражение (13) принимает вид

$$\int_{\Omega} \frac{1}{a_{22}^*} (\text{rot}_g \mathbf{E}^*, \text{rot}_g \mathbf{E}) dS - \int_{\Omega} ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} (\text{rot}_g \mathbf{E}^*, \mathbf{E}) dS + \int_{\Omega} ik \frac{a_{12}}{a_{22}} (\text{rot}_g \mathbf{E}, \mathbf{E}^*) dS - \int_{\Omega} k^2 a_{11} (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) dS + \int_{\Omega} k^2 \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) dS = 0. \quad (14)$$

Запишем формулу (14) покомпонентно и приведём члены при одинаковых степенях γ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} g^2 \left(\frac{1}{a_{22}^*} E_y \mathbb{E}_y + \frac{1}{a_{22}^*} E_x \mathbb{E}_x \right) dx dy + \int_{\Omega} g \left(-\frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial y} E_y - \frac{1}{a_{22}^*} \mathbb{E}_y \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial x} E_x - \frac{1}{a_{22}^*} \mathbb{E}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \right. \\
& + ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \mathbb{E}_y E_x - ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \mathbb{E}_x E_y - ik \frac{a_{12}}{a_{22}} E_y \mathbb{E}_x + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} E_x \mathbb{E}_y \left. \right) dx dy + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \right. \\
& + \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_y}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial y} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_y}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial y} \frac{\partial E_x}{\partial y} - ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial y} E_x + ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial x} E_y + \left. \right) \quad (15) \\
& + ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial y} E_z - ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \mathbb{E}_y}{\partial x} E_z + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbb{E}_x - ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbb{E}_y + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbb{E}_z - ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_x}{\partial y} \mathbb{E}_z - \\
& - k^2 \frac{\Delta}{a_{22}} E_x \mathbb{E}_x - k^2 \frac{\Delta}{a_{22}} E_y \mathbb{E}_y - k^2 \frac{\Delta}{a_{22}} E_z \mathbb{E}_z \left. \right) dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Задача (15) – это нелинейная задача на собственные значения.

Одним из наиболее эффективных методов борьбы с нефизическими решениями, возникающими при расчёте волноведущих систем методом лагранжевых конечных элементов, является использование в методе конечных элементов смешанных конечных элементов. Поэтому матрицы A , B и C будем формировать, используя метод смешанных конечных элементов. Для этого разложим поля по базисным функциям

$$E_x = \sum_{ij} E_{ij}^x N_j(y) p_{i,i+1}(x), \quad (16)$$

$$E_y = \sum_{ij} E_{ij}^y N_i(x) p_{j,j+1}(y), \quad (17)$$

$$E_z = \sum_{ij} E_{ij}^z N_i(x) N_j(y), \quad (18)$$

$$\text{где } N_k(x) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{\Delta x}, & x \in (x_k, x_{k+1}) \\ \frac{x - x_{k-1}}{\Delta x}, & x \in (x_{k-1}, x_k) \end{cases}; \quad p_{k,k+1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k, x_{k+1}) \\ 0, & x \notin (x_k, x_{k+1}) \end{cases}; \quad k=i, j, \text{ а } x = x, y.$$

После подстановки разложений (16)-(18) в (15) и вычисления интегралов перекрытия, получим нелинейную задачу на собственные значения вида

$$g^2 AX + gBX + CX = 0, \quad (19)$$

где $X = \{E_x^1 \ E_x^2 \ \dots \ E_y^1 \ \dots \ E_z^1 \ \dots\}^T$, T – знак транспонирования, E_k^i – значение компоненты поля k в узле i , $k = (x, y, z)$. Сведём задачу к линейной, введя дополнительный неизвестный собственный вектор $Y = \gamma X$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В такой постановке задачи перед членом g^2 отсутствует компонента E_z , таким образом, матрица A получается вырожденной. Сделаем замену переменных $I = \frac{1}{g}$, тогда матрицы C и A поменяются местами, а матрица C , как следует из постановки задачи, невырожденная. Граничные условия учтём явно.

Для заполнения комплексных матриц A , B и C и нахождения собственных значений g был разработан и реализован алгоритм на языке FORTRAN. В качестве тестовой задачи проводились расчёты для нахождения постоянной распространения первой моды диэлектрического волновода ($a_{11} = a_{22} = (1., 0.)$; $a_{12} = a_{21} = (0., 0.)$) для различных значений волновых чисел. Результаты сравнивались с аналитическим решением. Известно, что собственные функции, определяющие поле волны TE ($E_z = 0$) в прямоугольном волноводе, имеют вид $A_{mn} \cos\left(\frac{pm}{a} x\right) \cos\left(\frac{pn}{b} y\right)$, а собственные значения – $a_{mn} = \sqrt{\frac{p^2 m^2}{a^2} + \frac{p^2 n^2}{b^2}}$. Одно из двух чисел m и n может быть равно 0. Волна типа TE_{10} является основной волной прямоугольного волновода (имеет наибольшую критическую длину волны).

В программе рассчитывались значения постоянной распространения $b = \sqrt{k^2 - p^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$ ($g = ib$). Расчёты выполнялись для 16 элементов. На рис. 4 видно, что даже для выбранного числа элементов достигается хорошая точность.

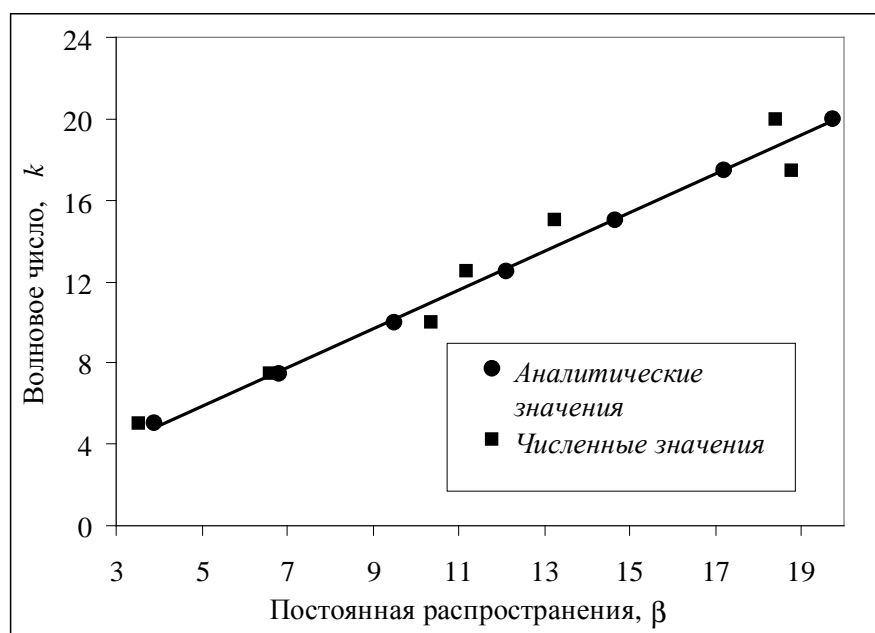


Рис. 4. Дисперсионная диаграмма для основной моды TE_{10} прямоугольного диэлектрического волновода

Точность предложенного алгоритма исследовалась методом сгущения сетки. Было обнаружено, что при сгущении сетки в 2 раза ошибка уменьшается на 40%.

Была произведена серия расчётов для нахождения постоянных распространения кирального прямоугольного волновода. На рис. 5 представлена дисперсионная кривая, построенная для прямоугольного волновода с киральным заполнением, в котором параметр киральности $\chi = 0.001$.

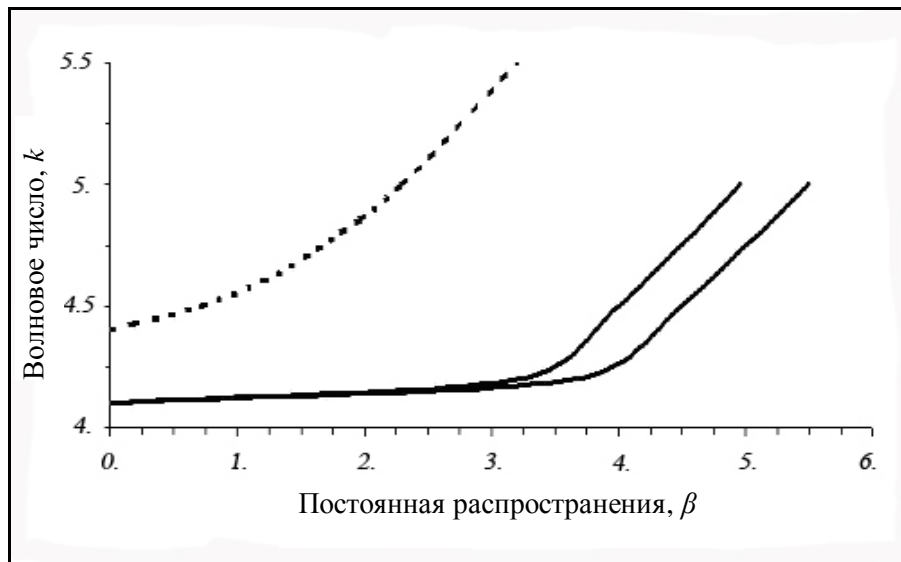


Рис. 5. Дисперсионная диаграмма прямоугольного волновода с киральным заполнением. $a_{11}=a_{22}=(1,0)$, $a_{12}=a_{21}^*=(0.001,0)$. Пунктирная кривая соответствует TM_{11} моде в некиральном случае

В прямоугольном однородно-заполненном диэлектрическом волноводе TM - и TE -моды с одинаковыми индексами обладают тождественными дисперсионными характеристиками. В киральном волноводе все волны являются гибридными и обладают различными дисперсионными характеристиками. На рисунке видно, что волна, которая соответствует обеим TM_{11} и TE_{11} модам в некиральном случае, образует дуплет в киральном случае, состоящий из двух ветвей с различными постоянными распространения и одинаковыми частотами отсечки.

Результаты исследования зависимости постоянной распространения от параметра киральности при различных значениях волновых чисел k приведены на рис. 6. Из рисунка следует, что зависимость значения постоянной распространения от параметра киральности близка к линейной.

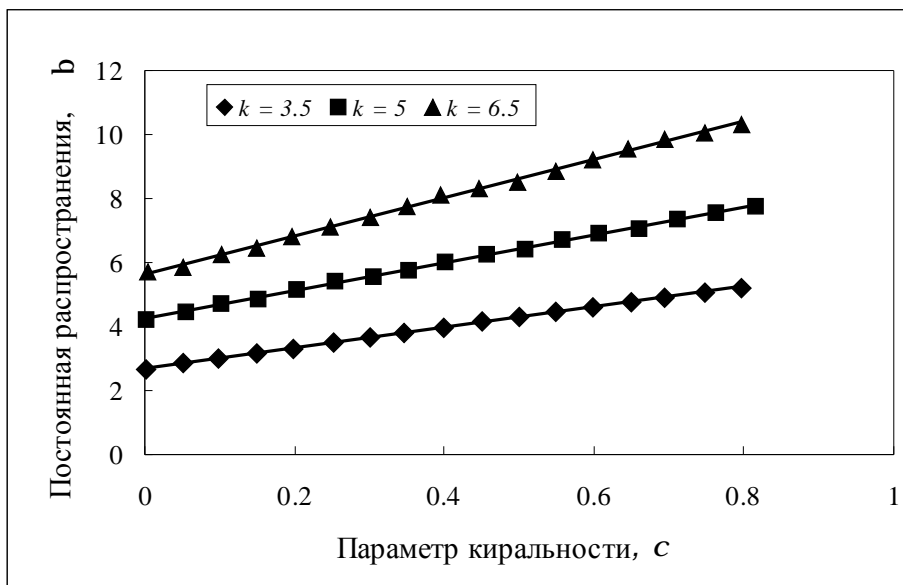


Рис. 6. График зависимости значения постоянной распространения прямоугольного волновода от значения параметра киральности для моды $m = 1, n = 0$ ($a_{11} = (2.,0.)$, $a_{22} = (1.,0.)$)

Рассмотрено также влияние геометрических параметров волновода на значение постоянной распространения первой невырожденной моды. В таблице представлены результаты расчёта для параметра киральности 0.001 и волнового числа 10. Сторона b была равна 100 во всех расчётах. Отметим незначительное влияние размера стороны волновода на значение постоянной распространения.

Аналогичный результат по стабилизации значения постоянной распространения был получен методом Галёркина В.П. Моденовым, А.В. Ромашиным и И.В. Цветковым².

² В.П. Моденов, А.В. Ромашин, И.В. Цветков. Расчёт цилиндрических волноводов, заполненных киральной средой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2002. – Т.5. – №2. – С. 56–58.

**Зависимость постоянной распространения от
длины стороны прямоугольного волновода**

N	a	β
1	1	9.9
2	10	9.8
3	100	9.9
4	200	9.9
5	300	9.9
6	400	10.0

Таким образом, на основе полученных результатов можно сделать вывод, что метод смешанных конечных элементов может эффективно применяться для расчёта прямоугольного волновода с киральным заполнением. Показано, что даже для небольшого числа конечных элементов достигается хорошая точность. С помощью данного метода удаётся выявить основные характерные особенности киральных волноводов.

В третьей главе представлен алгоритм решения обратной задачи проектирования прямоугольного кирального волновода с максимальным разнесением первых двух мод.

Рассмотренные в первой и второй главах методы математического моделирования волноведущих систем с киральным заполнением позволяют сделать вывод, что существующих методов вполне достаточно, чтобы быстро и с высокой гарантированной точностью получать характеристики киральных волноводов. Однако практически более важными являются обратные задачи синтеза киральных волноведущих систем. Задачи синтеза составляют специальный класс обратных задач математической физики. Они ставятся как задачи математического проектирования: определение некоторых величин, характеризующих свойства синтезируемого объекта, от которых зависят его требуемые эксплуатационные характеристики. Решение задачи синтеза понимают как возможность определения таких параметров среды, для которых соответствующая характеристика синтезируемого объекта аппроксимирует заданную характеристику с некоторой заданной точностью. К ним относятся: задача нахождения значения параметра киральности, при котором отражение от киральной вставки будет минимальным; проектирование киральных

волноводов, обладающих большой полосой частот одномодового режима; задачи синтеза плоского волноводного перехода между двумя волноводами с киральным заполнением и другие. В третьей главе рассматриваются вопросы создания эффективных алгоритмов решения обратных задач на основе уже разработанных методов решения прямых.

В первом разделе ставится задача проектирования прямоугольного кирального волновода, обладающего большой полосой частот одномодового режима: по заданным значениям частот отсечки первой и второй мод прямоугольного кирального волновода нужно определить значение диэлектрической проницаемости и параметра киральности, при которых первые две моды будут максимально разнесены. Данная задача важна при проектировании волоконно-оптических линий связи с частотным уплотнением каналов информации.

Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноводных систем заключается в рассмотрении таких задач, как математически некорректных с использованием для их решения метода регуляризации А.Н. Тихонова³. Этот подход был впервые предложен в работах А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского⁴.

Вариационная постановка задачи синтеза киральных волноводов, обладающих большой полосой частот одномодового режима, формулируется следующим образом: необходимо определить значение параметра диэлектрической проницаемости ϵ и параметра киральности χ из условия минимума на Q функционала Тихонова

$$M^{\alpha}[e, c] = \frac{1}{|w_{cutoff1} - w_{cutoff2}|} + \alpha \Omega[e, c], \quad (21)$$

где Q – множество, с помощью которого накладываются ограничения на синтезируемые параметры, $\Omega[e, c]$ – стабилизатор Тихонова, α – параметр регуляризации, $w_{cutoff1}$ – частота отсечки первой моды, $w_{cutoff2}$ – частота отсечки второй моды.

Требования физической реализуемости для задач проектирования киральных волноводов, обладающих большой полосой частот одномодового режима, состоят в условии положительности диэлектрической проницаемости $0 < e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$ и параметра киральности $0 < c \leq c_{\max}$. Здесь учитываются также некоторые требования конструктивной реализуемости решения: значение диэлектрической проницаемости и параметра киральности не может превышать некоторого технологически определённого порога. В данной работе $e_{\min} = 1$, $e_{\max} = 100$ и $c_{\max} = 100$.

³ А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. – 1986. – 286 с.

⁴ А.Г. Свешников, А.С. Ильинский. Задачи проектирования в электродинамике // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204. – №5. – С. 1077–1080.

Общая схема решения задачи математического проектирования прямоугольного кирального волновода, обладающего большой полосой частот одномодового режима, включает минимизацию функционала (21) в ограниченных областях. В диссертации для этой цели применяется метод скользящего допуска. Данный метод позволяет искать минимум функции при наличии ограничений на область как в виде неравенств, так и в виде равенств. Метод скользящего допуска основан на методе Нелдера и Мида, который в свою очередь является модификацией метода деформируемого многогранника (Нелдер и Мид ввели в этот метод возможность ускорения поиска путём растягивания или сжатия многогранника). Эти методы целесообразно применять в тех случаях, когда градиентные методы неприменимы из-за невозможности вычисления производных. Во втором разделе рассмотрены основные положения этого метода.

Эффективность решения обратной задачи напрямую связана с эффективностью решения прямых задач, так как при решении задачи синтеза необходимо многократно решать прямую задачу нахождения значений постоянных распространения двух первых мод. В данной работе для решения прямой задачи использовался метод смешанных конечных элементов, рассмотренный во второй главе диссертации.

В третьем разделе представлены численные результаты применения разработанного алгоритма решения обратной задачи. На основе описанных методов разработан блок программ на языке FORTRAN и получены численные значения. В частности, для кирального волновода со сторонами $a=2b$ первые две моды максимально разнесены при $\varepsilon = 1,6$ и $\chi = 2,7$.

В приложении представлен текст программного комплекса, разработанного для решения задачи проектирования прямоугольного кирального волновода с максимальным разнесением первых двух мод. Заметим, что данный комплекс позволяет решать широкий класс задач математического проектирования волноведущих систем с киральным заполнением. К его достоинствам стоит отнести модульный принцип построения. Разработанный алгоритм допускает обобщение на случай неоднородных киральных изотропных и анизотропных сред.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Создана дискретная математическая модель решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндрической и прямоугольной области с материальными уравнениями киральной среды.
2. Разработан численный алгоритм решения задачи нахождения постоянных распространения электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с киральным заполнением на основе метода смешанных конечных элементов и в цилиндрическом волноводе на основе метода конечных элементов.
3. Предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, написанного на языке FORTRAN. Исследована точность предложенных алгоритмов и свойства постоянных распространения электромагнитных волн при изменении материальных параметров среды.
4. Разработан алгоритм решения обратной задачи проектирования прямоугольного волновода с киральным заполнением, обладающего максимальной полосой частот одномодового режима.
5. Предложенный алгоритм реализован на ЭВМ для решения задачи проектирования прямоугольного волновода с киральным заполнением с максимальным разнесением первых двух мод и применён для решения практических задач.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мосунова Н.А. Расчёт коаксиального кирального волновода методом конечных элементов // Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам «Ломоносов-2004», секция «Физика», Физический Факультет МГУ. – 2004. – С. 136–137.
2. Мосунова Н.А. Расчёт постоянной распространения цилиндрического кирального волновода // Сборник трудов VI школы молодых учёных ИБРАЭ РАН, препринт ИБРАЭ, 2005-6, Москва. – 2005. – С. 43–46.
3. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. Математическое моделирование киральных волноведущих систем // Электронный журнал Радиоэлектроники РАН, математические методы в задачах радиоэлектроники. (<http://jre.cplire.ru/>). – 2005. – №7.
4. Мосунова Н.А. Передача информации в прямоугольном волноводе с киральным заполнением // Тезисы и доклады V Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов», под редакцией В.А. Неганова и Г.П. Ярового, 11-17 сентября 2006 г. Секция: Электродинамика и техника искусственных сред и структур. – 2006. – С. 162–163.
5. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. Математические модели киральных волноводов // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – №5. – С. 3–24.
6. Мосунова Н.А. Расчёт постоянной распространения прямоугольного кирального волновода методом смешанных конечных элементов // Вест. Моск. ун-та. Серия 3. Физ. Астр. – 2007. – №3. – С. 27–30.
7. Мосунова Н.А. Моделирование прямоугольного волновода с киральным заполнением методом смешанных конечных элементов // Сборник трудов VII школы молодых ученых ИБРАЭ РАН. – Москва: Препринт ИБРАЭ-2007-03, 2007. – С. 33–36.
8. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А. Синтез прямоугольного кирального волновода, обладающего максимальной полосой частот одномодового режима // Сборник тезисов докладов XLIII всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии. 23-27 апреля 2007 г. Физические секции. Москва: Изд-во РУДН. – 2007. – С. 53–54.