МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова.

Физический факультет. Кафедра математики.

На правах рукописи.

УДК 517.958

МУХАРТОВА ЮЛИЯ ВЯЧЕСЛАВОВНА

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ИМПЕДАНСНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Специальность 01.01.03

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук.

Москва

2007

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Боголюбов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гольдман М.Л. доктор физико-математических наук, профессор Грац Ю.В.
Ведущая организация:	Институт Математического Моделирования РАН.

Защита диссертации состоится «_8_» __ноября_____2007г. в _______ часов на заседании Диссертационного Совета К 501.001.17 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ауд. №______.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан «_4_» __октября_______ 2007 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета К 501.001.17,
доктор физико-математических наук ________________________П.А. Поляков

Общая характеристика работы.

Актуальность. Значительный технологический прогресс, достигнутый в разработке новых материалов, и их активное применение в задачах передачи информации делают актуальными исследования волноведущих систем со все более и более сложными заполнениями и покрытиями.

Основы математической теории волноводов заложены А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским в 1940-х годах. В их работах построено в виде рядов решение задачи о возбуждении электромагнитного поля заданным распределением тока в регулярных полых цилиндрических волноводах произвольного поперечного сечения с идеально проводящими стенками. При исследовании задач возбуждения волн в волноводах принципиальной является необходимость постановки условий на бесконечности, так называемых условий излучения, которые позволили бы выделить единственное решение задачи. В случае, когда возбуждение осуществляется источниками, локализованными в некоторой ограниченной области, такие условия формулируются в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Для волновода такими условиями являются парциальные условия излучения, предложенные в работах А.Г. Свешникова, что позволило корректно поставить целый ряд важных краевых задач электродинамики.

При описании возбуждения колебаний локальным распределением тока в волноводе, характеристики которого не меняются вдоль его оси Oz, за неизвестное принимают или вектор Герца, или поле E, или агрегат из компонент E и B. Однако постановка парциальных условий излучения всегда осуществляется по одной схеме. Сначала устанавливают полноту системы нормальных волн волновода, то есть решений вида $A(x,y)\exp(-i\omega t \pm i\gamma z)$ однородной задачи. Затем решение задачи возбуждения ищут вне области источников в виде суперпозиции нормальных волн. При этом парциальные условия излучения трактуются как условия выбора знака при $i\gamma z$. Задача нахождения нормальных волн сводится к задаче на собственные значения на сечении волновода, которая в общем случае оказывается несамосопряженной. Полнота системы нормальных волн для слоистых волноводов с идеально проводящими стенками была установлена П.Е. Краснушкиным, Е.В. Моисеевым и Ю.Г. Смирновым, а в случае более общего вида изменения тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости заполнения – А.Л. Делицыным. При этом, однако, к собственным функциям пришлось добавить корневые функции задачи на собственные значения, а значит, к нормальным волнам – «волны», растущие вдоль оси Oz степенным образом.

С усложнением материальных характеристик волновода усложняется и доказательство полноты системы нормальных волн, причем ее установление в общем случае представляется весьма трудной задачей. В связи с этим в работе А.Н. Боголюбова и М.Д. Малых было показано, как сформулировать условия, эквивалентные парциальным условиям, не используя полноты системы нормальных (корневых) волн. Главная идея этой работы состоит в том, чтобы использовать не дискретную систему собственных функций сечения волновода, а непрерывную систему «собственных функций» оператора ∂_z^2. Более точно, в качестве такого условия выступает требование наличия у решения задачи обобщенного преобразования Фурье или Fr-преобразования:

Определение. Мероморфная функция $\hat{u}(\gamma)$ со значениями в гильбертовом пространстве H называется *Fr-образом* или *обобщенным преобразованием Фурье* функции $u(z)$, если справедливо равенство

$$u(z) = Fr[\hat{u}(\gamma)] = \frac{1}{2\pi}\int_C \hat{u}(\gamma)\cdot e^{i\gamma\cdot z}d\gamma ,$$

где путь интегрирования C совпадает с вещественной осью γ-плоскости, если $\hat{u}(\gamma)$ не имеет на ней полюсов, если же $\hat{u}(\gamma)$ имеет вещественные полюса, то отрицательные полюса обходятся по верхней полуплоскости, а положительные – по нижней (см. рис. 1).

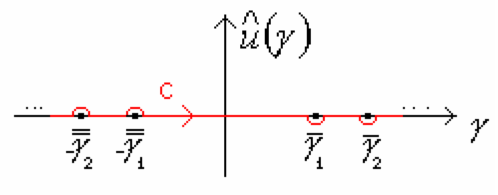

Рис. 1. Контур интегрирования для Fr-преобразования. Здесь $\bar{\gamma}_i$ - положительные полюсы $\hat{u}(\gamma)$, и, соответственно, $\left(-\bar{\bar{\gamma}}_k\right)$ - отрицательные

В работе Боголюбова и Малых было показано, что требование существования Fr-преобразования может быть использовано в качестве условия излучения в задаче Дирихле для эллиптического оператора. Именно, была рассмотрена задача

$$\begin{cases} L[u] + \partial_z^2 u + \omega^2 u = f, \\ \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

для произвольного эллиптического оператора

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u$$

в бесконечной цилиндрической области $\Omega = \left\{x \in S \subset R^m, z \in R^1\right\}$. Функция f в правой части уравнения является гладкой и имеет компактный носитель. На основании оценок Карлемана для резольвенты соответствующей задачи в пространстве образов было доказано, что при всех $\omega^2 \neq \alpha_n^2$, где α_n^2 – собственные значения краевой задачи Дирихле для оператора L, существует единственное решение исходной задачи, имеющее обобщенное преобразование Фурье. Это решение представимо в виде суммы конечного числа слагаемых, соответствующих расходящимся волнам, и слагаемого, являющегося элементом пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

В настоящей работе показано, что можно отказаться от использования результатов Т. Карлемана, специфических для задач Дирихле, и получить все необходимые оценки на основании леммы Келдыша о поведении резольвенты нормального оператора. В целом же настоящая диссертационная работа посвящена развитию общих методов исследования разрешимости задачи о возбуждении электромагнитных колебаний локальным распределением тока в волноводе, характеристики которого не меняются вдоль оси волновода. Предлагаемый метод описан в общем, для чего рассмотрена задача в произвольном гильбертовом пространстве, имеющая характерные черты задачи о возбуждении колебаний вне зависимости от выбора неизвестных или каких-либо материальных характеристик волновода. Для этой задачи показано, что парциальные условия излучения выделяют существующее и единственное решение.

В качестве примера, на котором иллюстрируются полученные результаты, рассмотрен волновод с импедансной границей. Эта задача является адекватной и наиболее употребимой математической моделью волноведущих систем, проводимость структурных элементов которых во многих реальных случаях велика, но конечна. Значительно упростить постановку задачи позволяют эквивалентные граничные условия, при использовании которых можно исключить из рассмотрения некоторую область пространства, поставив условие на границе волновода. Классическим примером таких условий являются условия Щукина-Леонтовича

$$[\mathbf{n},\mathbf{E}] = \varsigma[\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{H}]],$$

описывающие поглощение энергии поля в металле. Поверхностный импеданс металла

$$\varsigma = (i-1)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}$$

выражается через его удельную проводимость на постоянном токе, магнитную проницаемость среды, а также частоту падающей монохроматической волны. В случае произвольного поля условие Щукина-Леонтовича можно считать справедливым для Фурье-амплитуд полей. Следует подчеркнуть, что эквивалентные импедансные условия представляют собой довольно распространенный способ упрощения постановки электродинамических задач. В частности, импедансные условия типа условий Щукина-Леонтовича могут быть получены для сверхпроводящих поверхностей или гребенчатых структур, что было предметом исследований Диденко А.Н., Нефедова Е.И., Сивова А.Н., Слепяна Г.Я., Ильинского А.С. и Моденова В.П.

Из физических соображений ясно, что при значениях

$$\varsigma = (i-1)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}$$

должно происходить затухание возбужденного током электромагнитного поля, поэтому в качестве условий излучения можно взять условие убывания решения с ростом z. Однако непосредственно доказать разрешимость задачи с таким условием излучения не удается. В настоящей диссертационной работе рассматривается случай произвольного ς и доказывается разрешимость задачи возбуждения с парциальными условиями излучения при условии, что модуль ς достаточно мал. Для случая волновода кругового сечения методами теории возмущений показывается, что при указанных значениях ς решение убывает с ростом z. При этом основная сложность, связанная с применением парциальных условий излучения в волноводе с импедансной границей, – установление полноты системы его нормальных (корневых) волн – обойдена при помощи специальной формы условия излучения.

Цель работы. Целью диссертации является развитие общего метода изучения волноводов, параметры которых не меняются вдоль оси волновода, основанного на технике Fr-преобразования, и его применение для ряда краевых задач в волноводах с импедансными стенками. В работе были поставлены следующие задачи:

- постановка и исследование разрешимости нескольких классов задач, обобщающих задачи математической теории волноводов, представимых в виде операторных уравнений специального вида для функций действительной переменной z со значениями в некотором гильбертовом пространстве H;
- исследование разрешимости задачи для произвольного эллиптического оператора в бесконечной цилиндрической области с граничным условием третьего рода и требованием существования Fr-преобразования решения в качестве условия излучения.
- исследование разрешимости задачи о возбуждении колебаний в регулярном волноводе с заполнением, зависящим от координат в поперечном сечении, и импедансной границей;
- исследование задачи о возбуждении колебаний финитным гармоническим током в регулярном полом импедансном волноводе кругового поперечного сечения.

Научная новизна. Для всех четырех упомянутых выше задач впервые доказана разрешимость при всех достаточно гладких финитных функциях в их правых частях. Ключевым новым моментом в самой постановке этих задач является использование в качестве условия излучения требования существования Fr-преобразования решения. При этом показано, что это условие выделяет решение, удовлетворяющее парциальным условиям излучения, которые сформулированы в работе для нормальных волн.

Практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты дают строгое математическое обоснование корректности постановки ряда задач математической теории волноводов и могут быть использованы при построении алгоритмов расчета широкого класса волноведущих систем, в т.ч. с импедансными стенками.

Апробация работы. Основные результаты докладывались:

- на секции «Физика» ежегодной международной конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов» в 2003, 2004, 2006 и 2007 гг. Доклады в 2006 и 2007 гг. были отмечены жюри как лучшие на подсекции.
- на международной конференции Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory DIPED-2006

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в реферируемых журналах, а также в 4 тезисах докладов на международных конференциях.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы (62 наименования) и 3 рисунков; изложена на 110 страницах.

Содержание работы.

В первой главе диссертации исследуется уравнение

$$u + Bu - Au_{zz} = Df \qquad (1)$$

для функции действительной переменной $u(z)$ со значениями в гильбертовом пространстве *H*. Функция $f(z)$ в правой части этого уравнения определена на всей действительной прямой, имеет финитный носитель, а ее значения принадлежат некоторому гильбертову пространству $\widetilde{H}$. Операторы *A* и *B* являются вполне непрерывными в H, а ограниченный оператор *D* действует из $\widetilde{H}$ в H. Рассматриваемое гильбертово пространство *H* обладает тем свойством, что в нем уравнение

$$w + Q(\lambda)w = 0, \qquad Q(\lambda) = B + \lambda^2 A$$

не имеет нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$.

Необходимость анализировать подобный объект возникает во многих задачах математической теории волноводов. В частности, в пункте 1.1 первой главы показано, что к такому виду может быть сведена задача

$$\begin{cases} L[u] + \partial_z^2 u + \omega^2 u = f, \\ \quad l[u]_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

в бесконечной области $\Omega = \{x \in S \subset R^m, z \in (-\infty, +\infty)\}$ для произвольного эллиптического оператора

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad (3)$$

с симметричной главной частью. Оператор граничного условия имеет вид

$$l = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) n_i \frac{\partial}{\partial x_j} - h(x),$$

где n_i – компоненты внешней нормали к границе области *S*. Роль гильбертовых пространств *H* и $\widetilde{H}$ в этом случае играют $W_2^1(S)$ и $L_2(S)$ соответственно. Компактность операторов, возникающих в левой части обобщенной постановки данной задачи, доказывается на основании теорем вложения.

В качестве условия излучения для (1) будем использовать требование существования у решения обобщенного преобразования Фурье или Fr-преобразования. В пункте 1.2 первой главы рассмотрена задача

$$\hat{u}(\gamma)+Q(\gamma)\hat{u}(\gamma)=D\hat{f}(\gamma) \tag{4}$$

в пространстве *H*, решение которой играет роль Fr-образа решения исходной задачи (1). Для этой задачи доказана теорема, утверждающая, что спектр оператора $Q(\lambda)$ состоит только из собственных чисел конечной кратности, среди которых может быть лишь конечное число действительных положительных, если оператор A является самосопряженным и положительно определенным. При всех значениях параметра γ, не совпадающих со спектральными точками, существует единственное решение задачи (4), для которого справедлива оценка

$$\|\hat{u}(\gamma)\|_H \leq \varepsilon \left\|\hat{f}(\gamma)\right\|_{\widetilde{H}}, \quad \varepsilon > 0 \tag{5}$$

при стремящемся к бесконечности на действительной оси параметре γ. Доказательство этой теоремы основано на применении леммы Келдыша о поведении резольвенты нормального оператора. При этом принципиальной является самосопряженность оператора A, вполне непрерывный оператор B может быть любым. Если оператор D имеет вид $\pm AD_1$, где D_1 – некоторый ограниченный оператор, то тогда найдется $M>0$, такое что для решения (4) при $\gamma \to \pm\infty$ на действительной оси выполняется неравенство

$$\|\hat{u}(\gamma)\| \leq \frac{M}{\gamma^2}\left\|\hat{f}(\gamma)\right\| \tag{6}$$

Оценки (5) и (6) означают, что поведение $\hat{u}(\gamma)$ на бесконечности определяется поведением $\hat{f}(\gamma)$. На основании этого факта, особенностей структуры контура интегрирования в Fr-преобразовании, а также разложения резольвенты аналитической оператор-функции, полученного в трудах М.В. Келдыша[1], доказана теорема

Теорема 1. *Пусть A – вполне непрерывный, самосопряженный, положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, B – произвольный вполне непрерывный оператор в H, и D – произвольный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства* $\widetilde{H}$ *в H. Пусть* $f(z)$ *является финитной четыре раза непрерывно дифференцируемой функцией действительной переменной z со значениями в* $\widetilde{H}$*. Тогда существует, и притом единственное, решение уравнения (1), допускающее Fr-преобразование. Это решение дается выражением* $u=\mathrm{Fr}[\hat{u}]$*, в котором* $\hat{u}$ *представляет*

[1] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов.// Гл. I. Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985. С. 305-320.

собой решение задачи (4), в правой части которой стоит Фурье-образ функции $f(z)$. *Спектр соответствующей (4) однородной задачи*

$$w+\lambda Aw+Bw=0\,, \qquad w\in H \tag{7}$$

состоит только из собственных значений, вещественных среди которых может быть лишь конечное число.

Если оператор D имеет вид $\pm AD_1$, *где* D_1 *– некоторый ограниченный оператор, то единственное решение (1), имеющее Fr-преобразование, существует для любой финитной дважды непрерывно дифференцируемой функции* $f(z)$.

Допускающее Fr-преобразование решение задачи (1) имеет асимптотику

$$u(z)=\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\gamma_n|z-z'|}\left\{P_n^0+|z-z'|P_n^1+\cdots+|z-z'|^{M_n-1}P_n^{M_n-1}\right\}Df(z')dz'+u_{ост}(z), \tag{8}$$

где N – число возможных действительных положительных собственных значений однородной задачи (7), M_n *–максимальная кратность собственных элементов, соответствующих вещественному собственному значению с номером n,* P_n^m *– некоторые конечномерные операторы, действующие в гильбертовом пространстве* H *, а* $u_{ост}(z)$ *– функция, равномерно в норме H убывающая по z, такая что найдется некоторая положительная константа c, для которой выполняется неравенство*

$$\left\|u_{ост}(z)\right\|_H\le\frac{c}{|z|}$$

Из этой теоремы следует, что, добавив к уравнению (1) требование существования Fr-образа решения, мы тем самым выделим ее единственное решение. При этом в силу асимптотического представления (8), это решение удовлетворяет в точности парциальным условиям излучения. При этом нет необходимости исследовать полноту системы нормальных волн. Преимущество предложенного подхода состоит в том, что нам не нужны никакие оценки на оператор *B* (кроме его компактности), поскольку убывание Фурье-образа решения происходит за счет наложения условий гладкости на правую часть задачи (1).

Аналогичные результаты справедливы и для задачи (2) для эллиптического оператора *L*. Если $f(x,z)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по *z* финитной функцией, то при всех $\omega^2\ne\alpha_n^2$, где α_n^2 – собственные значения однородной задачи

$$\begin{cases} L[w]+\alpha^2 w=0,\\ \quad l[w]_{\partial S}=0,\end{cases}$$

существует единственное обобщенное решение задачи (2) со значениями в $W_2^1(S)$, допускающее Fr-преобразование. Для него справедлива полученная в общем случае асимптотика. Это решение будет классическим при выполнении следующих условий гладкости: граница ∂S области S является кривой класса $C^{2+\alpha}$; при всех z из области определения $f(x,z)\in C^{\alpha}(\overline{S})$; коэффициенты оператора L и граничного условия удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(x)\in C^{1+\alpha}(\overline{S});\quad b_i(x)\in C^{\alpha}(\overline{S});\quad c(x)\in C^{\alpha}(\overline{S});\quad h(x)\in C^{1+\alpha}(\partial S).$$

Во второй главе диссертации исследуется уравнение

$$u + A_0 u + A_1 u_z - A_2 u_{zz} = Df\,, \tag{9}$$

также часто встречающееся в задачах математической теории волноводов, где, как и в первом случае, $u(z)$ является функцией действительной переменной z со значениями в гильбертовом пространстве H, таком, что в нем уравнение

$$w + Q(\lambda)w = 0\,,\qquad Q(\lambda) = A_0 + i\lambda A_1 + \lambda^2 A_2$$

не имеет нетривиальных решений при $\lambda = 0$. Функция $f(z)$, значения которой лежат в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$, имеет финитный носитель, операторы A_i являются вполне непрерывными в H, причем A_2 самосопряжен и положительно определен, а D является ограниченным оператором, действующим из $\widetilde{H}$ в H.

В качестве условия излучения используем требование существования у решения (9) Fr-преобразования. В пункте 2.1.2 второй главы показано, что задача

$$\hat{u}(\gamma) + Q(\gamma)\hat{u}(\gamma) = D\hat{f}(\gamma), \tag{10}$$

решение которой играет роль Fr-образа решения (9), при всех γ, не совпадающих с собственными числами оператора $Q(\lambda)$, единственным образом разрешима, причем она имеет единственное решение при $\gamma \to \pm\infty$ на действительной оси, для которого справедлива оценка

$$\left\|\hat{u}(\gamma)\right\|_H \le \varepsilon \left\|\hat{f}(\gamma)\right\|_{\widetilde{H}}, \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Это означает, что оператор $Q(\lambda)$ может иметь только конечное число собственных чисел на действительной оси. Кроме того, поведение решения (10) на бесконечности определяется поведением правой части этой задачи.

На основании оценки (11), леммы Жордана и разложения резольвенты аналитической оператор-функции $Q(\lambda)$ в окрестности собственных значений задачи

$$w + Q(\lambda)w = 0 \tag{12}$$

доказана

Теорема 2. *Пусть* A_i, *где* $i = 0,1,2$, *являются вполне непрерывными операторами в пространстве* H, *причем* A_2 *помимо этого самосопряжен и положительно определен. Пусть* $f(z)$ *является финитной четыре раза непрерывно дифференцируемой функцией действительной переменной z со значениями в некотором гильбертовом пространстве* $\widetilde{H}$, *а D – ограниченным оператором, действующим из* $\widetilde{H}$ *в* H. *Тогда задача (9) имеет единственное решение, допускающее Fr-преобразование. Это решение имеет вид* $u = \mathrm{Fr}[\hat{u}]$, *где* $\hat{u}$ *является решением задачи (10). Для него справедливо представление*

$$u(z) = \sum_{n=1}^{N^+}\sum_{m=1}^{M_n} \frac{i^m}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{z} e^{i\gamma_n^+(z-z')}(z-z')^{m-1} P_n^{(m)} Df(z')dz' +$$

$$+\sum_{n=1}^{N^-}\sum_{m=1}^{M_n} (-1)^m \frac{i^m}{(m-1)!}\int_{z}^{+\infty} e^{-i\gamma_n^-(z'-z)}(z'-z)^{m-1} P_n^{(m)} Df(z')dz' + u_{ост}(z) \tag{13}$$

где N^+ *– число возможных действительных положительных собственных значений* γ_n^+ *задачи (12),* N^- *– число возможных действительных отрицательных собственных значений* γ_n^- *задачи (12),* $P_n^{(m)}$ *– конечномерные операторы в пространстве H. Для остаточного слагаемого* $u_{ост}$ *справедлива оценка*

$$\left\| u_{ост}(z) \right\|_H \le \frac{C}{|z|}$$

при стремлении z к бесконечности, где C – некоторая положительная константа.

Таким образом, для задач рассматриваемого класса требование существования у решения обобщенного преобразования Фурье также является вполне корректным условием излучения.

Вторая часть второй главы посвящена исследованию задачи о возбуждении колебаний финитным гармоническим распределением токов и зарядов в регулярном волноводе с импедансной границей, поперечное сечение которого представляет собой произвольную звездную область с гладкой границей. Рассматриваемый волновод заполнен средой $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon(x, y)$ и $\mu = 1$. Для анализа этой задачи применен шестивекторный подход. Необходимо найти шестивектор вида

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий задаче

$$\operatorname{Div}\mathbf{F}+\frac{\omega}{c}(1-\varepsilon)\mathbf{F}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \varepsilon^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2}F_{4k}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1\\J_2\\J_3\\ \varepsilon^{-1}J_4\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m}+\frac{\partial F_{km}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k}=0, \tag{15}$$

$$\mathbf{F}^*\mathbf{N}\big|_{\partial S}=0, \tag{16}$$

где: $\mathbf{J}=\dfrac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}j_x & j_y & j_z & ic\rho\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ – распределение токов и зарядов, возбуждающее поле в волноводе; $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x & y & z & ict\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}n_x & n_y & 0 & -i\varsigma\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; $\varsigma=\varsigma'+i\varsigma''$ – комплексный импеданс границы. В качестве условия излучения примем существование у решения Fr-образа

$$\mathbf{F}(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C e^{-i(\omega t-\gamma z)}\hat{\mathbf{F}}(x,y,\gamma)d\gamma \tag{17}$$

Для шестивектора $\hat{\mathbf{F}}(x,y,\gamma)$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, представляющем собой замыкание множества гладких антисимметричных шестивекторов с нулевой диагональю, удовлетворяющих условию $\mathbf{G}^*\mathbf{N}\big|_{\partial S}=0$, по норме, порождаемой скалярным произведением

$$(\mathbf{G},\mathbf{Q})=\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{4}\int\limits_S\left\{\left(\nabla_\perp\overline{G}_{nm},\nabla_\perp Q_{nm}\right)+\overline{G}_{nm}Q_{nm}\right\}ds,$$

может быть получена обобщенная постановка задачи:

$$\frac{1}{2}\int\limits_S\sum_{n,m=1}^{4}\left(\nabla_\perp\overline{G}_{nm},\nabla_\perp\hat{F}_{nm}\right)ds+\frac{1}{2}\left(\gamma^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\int\limits_S\sum_{n,m=1}^{4}\overline{G}_{nm}\hat{F}_{nm}ds+$$

$$+i\int\limits_S\left\{\overline{\varsigma}\left(\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{F}}^{(4)}}{\partial x},\mathbf{n}\right)\frac{\partial\overline{G}_{12}}{\partial y}-\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{F}}^{(4)}}{\partial y},\mathbf{n}\right)\frac{\partial\overline{G}_{12}}{\partial x}\right)+\varsigma\left(\frac{\partial\hat{F}_{12}}{\partial x}\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^{(4)}}{\partial y},\mathbf{n}\right)-\frac{\partial\hat{F}_{12}}{\partial y}\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^{(4)}}{\partial x},\mathbf{n}\right)\right)\right\}ds+$$

$$+i\int\limits_S\left\{\overline{\varsigma}\left(\left(\hat{\mathbf{F}}^{(4)},\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x}\right)\frac{\partial\overline{G}_{12}}{\partial y}-\left(\hat{\mathbf{F}}^{(4)},\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial y}\right)\frac{\partial\overline{G}_{12}}{\partial x}\right)+\varsigma\left(\frac{\partial\hat{F}_{12}}{\partial x}\left(\overline{\mathbf{G}}^{(4)},\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial y}\right)-\frac{\partial\hat{F}_{12}}{\partial y}\left(\overline{\mathbf{G}}^{(4)},\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x}\right)\right)\right\}ds+$$

$$+\frac{2i\omega\varsigma'}{c}\oint\limits_{\partial S}\left(\overline{G}_{12}\hat{F}_{12}+\overline{G}_{13}\hat{F}_{13}+\overline{G}_{23}\hat{F}_{23}\right)d\tau-\gamma\oint\limits_{\partial S}\sum_{k=1}^{2}\left(\overline{\varsigma}\overline{G}_{3k}\hat{F}_{4k}+\varsigma\overline{G}_{4k}\hat{F}_{3k}\right)d\tau+$$

$$+\frac{\omega}{c}\int\limits_S\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial\overline{G}_{ik}}{\partial x_k}\hat{F}_{i4}(1-\varepsilon)ds+\frac{\omega}{c}\int\limits_S\sum_{i=1}^{4}\left(-i\gamma\overline{G}_{i3}+\frac{\omega}{c}\overline{G}_{i4}\right)\hat{F}_{i4}(1-\varepsilon)ds+\int\limits_S\sum_{k,m=1}^{2}\frac{\partial\overline{G}_{4k}}{\partial x_k}\frac{\hat{F}_{4m}}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_m}ds-$$

$$-i\gamma\int_S \overline{G}_{43}\sum_{m=1}^{2}\frac{\hat{F}_{4m}}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_m}ds = \int_S\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\overline{G}_{ik}}{\partial x_k}\hat{J}_i ds - i\gamma\int_S\left(\sum_{i=1}^{3}\overline{G}_{i3}\hat{J}_i + \overline{G}_{43}\frac{\hat{J}_4}{\varepsilon}\right)ds +$$

$$+\frac{\omega}{c}\int_S\sum_{i=1}^{3}\overline{G}_{i4}\hat{J}_i ds + \int_S\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\overline{G}_{4k}}{\partial x_k}\frac{\hat{J}_4}{\varepsilon}ds \qquad (18)$$

Здесь введены обозначения: для $\forall\mathbf{Q}\in\mathbf{H}$ $\mathbf{Q}^{(4)}$ представляет собой вектор с координатами $\begin{pmatrix}Q_{41} & Q_{42} & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{n}$(M) – это единичный вектор в направлении внешней нормали к границе области S в точке P пересечения луча, проведенного из начала координат на сечении S через точку $M\in S$, с границей ∂S.

Так как определенная на $\mathbf{H}$ билинейная форма

$$b_0(\mathbf{G},\mathbf{G}) = 2\,\mathrm{Im}\varsigma\int_S\left\{\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^{(4)}}{\partial x},\mathbf{n}\right)\frac{\partial G_{12}}{\partial y} - \left(\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^{(4)}}{\partial y},\mathbf{n}\right)\frac{\partial G_{12}}{\partial x}\right\}ds$$

является действительной, и ее норма не превосходит $|\varsigma|$, то при всех значениях параметра $|\varsigma|\le\varsigma_0<1$, задачу (18) можно рассматривать в эквивалентном гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathbf{H}}$ со скалярным произведением

$$[\mathbf{G},\mathbf{Q}]_{\widetilde{\mathbf{H}}} = (\mathbf{G},\mathbf{Q})_{\mathbf{H}} + b_0(\mathbf{G},\mathbf{Q})$$

В этом пространстве она имеет вид

$$\hat{\mathbf{F}} + A_0\hat{\mathbf{F}} + \gamma A_1\hat{\mathbf{F}} + \gamma^2 A_2\hat{\mathbf{F}} = D_0\hat{\mathbf{J}} + \gamma D_1\hat{\mathbf{J}},$$

где операторы A_i являются вполне непрерывными, а D_i – ограниченными. Поэтому для нее справедлива теорема 2. При достаточной гладкости вектора $\mathbf{J}$ можно вернуться в пространство прообразов. При этом решение исходной задачи вида (17) будет единственным, допускающим Fr-преобразование. Асимптотика, получаемая для него на основании леммы Жордана, позволяет утверждать, что это решение может содержать компоненты, соответствующие только расходящимся от источника или затухающим волнам. При физических значениях параметра ς происходит затухание волн на бесконечности.

В третьей главе настоящей диссертации рассмотрен частный случай задачи о возбуждении колебаний в импедансном волноводе, допускающий аналитическое решение. Исследован регулярный полый цилиндрический волновод кругового поперечного сечения с импедансными стенками, возбуждение которого осуществляется финитным произвольно ориентированным током $\mathbf{j}e^{-i\omega t}$. При решении задачи для невязки $\{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{H}}\} = \{\mathbf{E},\mathbf{H}\} - \{\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0\}$ искомого поля и поля, возбуждаемого тем же током в волноводе с аналогичной геометрией, но идеально проводящими стенками, можно воспользоваться представлением полей при помощи электрического и магнитного векторов Герца, направленных вдоль оси волновода:

$$\hat{\mathbf{\Pi}}^{e} = \varphi(z,\rho,\theta)\cdot \mathbf{e}_z, \qquad \hat{\mathbf{\Pi}}^{m} = \psi(z,\rho,\theta)\cdot \mathbf{e}_z .$$

При этом для коэффициентов $\varphi_m(z,\rho)$ и $\psi_m(z,\rho)$ разложений функций φ и ψ в ряды Фурье по полярному углу θ получены задачи, неоднородность которых заключена в граничных условиях. В качестве условия излучения для них выступает требование существования у решения Fr-преобразования. Задача в пространстве образов единственным образом разрешима, если определитель

$$\mathrm{Det}(\gamma) = \varsigma\omega^2\left(\omega^2-\gamma^2\right)\left[J'_m\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right)\right]^2 - i\omega\left(1+\varsigma^2\right)\left(\omega^2-\gamma^2\right)^{3/2} J_m\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right)J'_m\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right) - \\ -\varsigma\left(\left(\omega^2-\gamma^2\right)^2+\left(\frac{m\gamma}{R}\right)^2\right)J_m^2\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right)$$

не обращается в нуль. Нули этого определителя представляют собой постоянные распространения нормальных волн в импедансном волноводе. На основании подготовительной теоремы Вейерштрасса можно показать, что при всех ς корни уравнения $\mathrm{Det}(\gamma)=0$ имеют единичную кратность. Для нахождения постоянных распространения применима теория возмущения. В первом приближении по параметру ς они имеют вид

$$\gamma_{n,m}(\varsigma) = \pm\gamma^0_{n,m}\left(1+\varsigma\cdot\frac{i\omega}{R\left(\gamma^0_{n,m}\right)2}+\ldots\right);\ \gamma_{n',m'}(\varsigma) = \pm\hat{\gamma}^0_{n',m'}\left\{1+\frac{i\varsigma R}{\omega\left(\hat{\gamma}^0_{n',m'}\right)^2}\cdot\frac{\left(\hat{\lambda}^0_{n',m'}\right)^2+\left(\frac{m\hat{\gamma}^0_{n',m'}}{R}\right)^2}{R^2\hat{\lambda}^0_{n',m'}-m'^2}+\ldots\right\}$$

Если финитная функция, описывающая возбуждающий колебания ток, хотя бы два раза непрерывно дифференцируема по z, то задача имеет единственное решение, допускающее Fr-преобразование при всех значениях частоты ω, квадрат которой не совпадает с корнями α_n уравнения

$$\varsigma\left[J'_m\left(\sqrt{\alpha}R\right)\right]^2 - i\left(1+\varsigma^2\right)J_m\left(\sqrt{\alpha}R\right)J'_m\left(\sqrt{\alpha}R\right) - \varsigma J_m^2\left(\sqrt{\alpha}R\right) = 0$$

Предполагая, что постоянные распространения для рассматриваемого волновода известны, и используя полученные в классических работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского выражения для векторов Герца в случае идеальной проводимости стенок, получим решение задачи, которое может содержать в качестве слагаемых только компоненты, соответствующие затухающим волнам.

Заключение.

В заключении приведем основные результаты работы.

- Исследована разрешимость нескольких классов задач, обобщающих задачи математической теории волноводов, представимых в виде операторных уравнений специального вида для функций действительной переменной z со значениями в некотором гильбертовом пространстве H. Показано, что для задач указанного класса требование существования у решения обобщенного преобразования Фурье является вполне корректным условием излучения, позволяющим выделять такое решение задачи, которое соответствует бегущим от источника и затухающим на бесконечности волнам.
- С использованием предложенной методики доказано, что задача для произвольного эллиптического оператора L в бесконечной цилиндрической области с граничным условием третьего рода имеет единственное обобщенное решение со значениями в $W_2^1(S)$, допускающее Fr-преобразование. Это решение представляет собой сумму конечного числа слагаемых, соответствующих расходящимся волнам, и слагаемого, норма которого в $W_2^1(S)$ убывает как $|z|^{-1}$ на бесконечности. Спектральная задача для оператора L на поперечном сечении области может иметь только конечное число вещественных положительных собственных значений.
- Доказана разрешимость задачи о возбуждении колебаний финитным гармоническим распределением токов и зарядов в регулярном импедансном волноводе с заполнением $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$, $\mu = 1$, поперечное сечение которого представляет собой произвольную звездную область с гладкой границей.
- Исследована задача о возбуждении колебаний финитным током $je^{-i\omega t}$ в полом регулярном цилиндрическом волноводе кругового поперечного сечения с импедансной границей. В первом порядке теории возмущения по параметру ς, представляющему собой комплексный импеданс границы, найдены выражения для постоянных распространения. Из полученных выражений видно, что при физических значениях ς возбужденное поле убывает вдоль оси волновода.

Основные публикации.

1. *Мухартова Ю.В.* О нормальных модах волновода, на границе которого заданы условия Щукина-Леонтовича// Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам

«Ломоносов-2003», секция «Физика», Физический Факультет МГУ. - 2003. – С. 56-57.

2. *Мухартова Ю.В.* Спектральные свойства импедансного волновода // Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам «Ломоносов-2004», секция «Физика», Физический Факультет МГУ. - 2004. – С. 142-144.
3. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В.* Моды для волновода с граничными условиями Щукина-Леонтовича // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004, № 6. с. 7-10
4. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В.* О спектральной задаче для волновода с импедансными граничными условиями // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005, № 6. с. 55-56.
5. *Мухартова Ю.В.* О решении краевой задачи для произвольного эллиптического оператора, удовлетворяющем условию излучения// Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам «Ломоносов-2006», секция «Физика», Физический Факультет МГУ. - 2006. – С. 137-138.
6. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В.* Об удовлетворяющем условию излучения решении краевой задачи для произвольного эллиптического оператора // ЖВМ и МФ. **46** (2006), № 12. с. 2228-2234
7. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В.* Об условиях излучения для импедансного волновода // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006, № 1. с. 3-6.
8. *Мухартова Ю.В.* Пример использования методики Fr-преобразования при решении задач математической теории волноводов// Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам «Ломоносов-2007», секция «Физика», Физический Факультет МГУ. - 2007. с. 67-69