На правах рукописи

Шишанин Андрей Олегович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВЫХ ПОЛЕВЫХ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Специальность 01.04.02
Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2007

Работа выполнена в отделе теоретической физики Математического института имени В.А. Стеклова РАН и на кафедре технической физики Московского государственного индустриального университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор И.Я. Арефьева

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Борисов

кандидат физико-математических наук А.П. Зубарев

Ведущая организация:
Российский университет дружбы народов

Защита состоится "__"__________ 2007 г.в __час. на заседании диссертационного совета К 501.001.17 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, г. Москва, Воробьевы горы, физический факультет, ауд. ________

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
физического факультета Московского государственного университета.

Автореферат разослан "__"__________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 501.001.17
доктор физико-математических наук,
профессор П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основным методом изучения квантовых теорий поля является метод теории возмущений, использующий технику фейнмановских диаграмм. Для квантовой электродинамики было выявлено замечательное согласие между теоретическими результатами, полученными с помощью теории возмущений, и экспериментальными данными, наблюдаемыми на ускорителях и других установках. Однако, как известно, квантовая хромодинамика, которая лежит в основе сильных взаимодействий, хорошо описывается теорией возмущений только на малых расстояниях или в области больших импульсов в силу асимптотической свободы. Чтобы описать эту теорию в области малых импульсов, необходимо развитие методов исследования квантовой теории поля, выходящих за рамки теории возмущений. Одним из наиболее применяемых является метод малого параметра по обратному числу степеней свободы системы, известный также как $1/N$-разложение. Для калибровочной теории Янга-Миллса $U(N)$, которая описывает глюонные поля, естественным параметром N является ранг калибровочной группы. Впервые $1/N$-разложение рассматривалось в статистической физике.

Из знаменитой работы т' Хуфта хорошо известно, что в многомерной матричной теории Янга-Миллса в пределе больших N и при наложении определенного условия на константу связи выживают, т.е. дают ведущий вклад в вычисление различных величин, планарные диаграммы. Ими являются такие диаграммы, которые можно нарисовать на плоскости. Для выполнения аналитических исследований необходимо вычислять сумму всех планарных диаграмм. Оценка числа роста планарных диаграмм была сделана в работах канадского математика Татта и группой физиков Коплика, Неве и Нуссинова комбинаторным способом с использованием уравнения на производящие функции для корреляторов. Оказалось, что число планарных графов растет степенным образом по числу вершин, в то время как общее число графов растет факториально. Методом $1/N$-разложения Брезаном, Ициксоном, Паризи, Зюбером (BIPZ) исследовались эрмитовые нуль-мерные ϕ^3 и ϕ^4, а также одномерная ϕ^4 модели. Для упомянутых нуль-мерных моделей путем решения сингулярного интегрального уравнения на плотность распределения собственных значений, лежащей на конечном отрезке, найдены корреляционные функции, вакуумная энергия, уравнения на одночастично-неприводимые вершинные функции.

В эрмитовой матричной модели с обычным массовым членом решение сингулярного интегрального уравнения находится на одном отрезке, однако для моделей с отрицательным квадратом массы появляются решения на нескольких отрезках или разрезах. Решения на нескольких отрезках для уравнения на плотность распределения собственных значений матрицы впервые были обнаружены в простейшем случае нульмерных и одно-мерных эрмитовых матричных моделей Голдстоуна, а также в решеточной модели Когута-Сасскинда. Арефьевой, Илчевым и Митрюшкиным также было замечено, что произвольное решение на двух отрезках задается параметром ξ – интегралом по левому отрезку от плотности распределения матрицы. Попасть в такую конфигурацию с заданным ξ можно, если ввести в действие исчезающе малый возмущающий член специального вида, нарушающий исходную симметрию $U(N)$. В этом случае можно говорить, что решения с различными ξ определяют различные фазы теории в смысле квазисредних Н.Н. Боголюбова. Отметим, что при этом вакуумная энергия зависит от способа введения в действие возмущающего слагаемого. Симметричное решение на двух отрезках соответсвует $\xi = 1/2$, а полностью несимметричное – $\xi = 0$ или 1. Относительно недавно было замечено соответствие между многоразрезными решениями матричных моделей и суперсимметричными калибровочными теориями, что сделало изучение этих решений актуальной задачей.

Паркетное приближение или обобщенное лестничное приближение было предложено Ландау с сотрудниками в их исследовании высокоэнергетического поведения квантовой электродинамики. Результаты, полученные с помощью паркетного приближения, находятся в согласии с подходом ренормализационной группы. Первоначальной задачей было развитие непертурбативных методов в квантовой теории поля. Паркетное приближение приводит к замкнутой системе интегральных уравнений на пропагаторы и вершинные функции. Эти уравнения имеют смысл и при больших значениях констант связи. Данный подход учитывает больший класс фейнмановских диаграмм, чем приближение главных логарифмов и поэтому полученные результаты с помощью паркетного приближения носят более строгий характер.

Одним из альтернативных методов исследования эрмитовых матричных моделей к планарному решению является метод планарных паркетных уравнений, что было предложено Арефьевой и Зубаревым для нуль-мерных моделей ϕ^3 и ϕ^4. Это альтернативный подход к известному планарному решению. В планарно -паркетном приближении, вместо бесконечной системы планарных уравнений Швингера-Дайсона на функции Грина, которую, правда, можно заменить на производящую функцию, рассматривается конечное число уравнений на пропагаторы и вершинные функции.

Основная цель диссертации состоит в исследовании свойств планарного паркетного приближения для некоторых матричных моделей и в изучении свойств решения на двух отрезках многоследовой модели.

Научная новизна. В диссертации развит метод паркетных планарных уравнений для эрмитовых матричных моделей. Для демонстративности был рассмотрен вид потенциала ϕ^4. Изучены примеры голдстоуновской модели, многоследовой модели, двуматричной модели, многоследовой голдстоуновской модели. В последнем случае также впервые исследуется фазовая структура теории.

Научная и практическая ценность работы. Полученные результаты могут быть использованы для исследования более сложных эрмитовых матричных моделей, например, многоматричных, как открытых, так и замкнутых, и одномерной. В принципе, ценностью подхода планарных паркетных уравнений является то, что можно работать и в многомерном случае матричной теории поля, где неизвестно планарное решение.

Апробация работы. Полученные в диссертации результаты докладывались на XII "Международной Ломоносовской конференции по физике элементарных частиц"(Москва, 2005) и семинарах.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 работ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений, заключения и списка используемой литературы. Объем диссертации составляет 98 страниц, набранного в издательской системе LATEX.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** дано обоснование актуальности темы диссертационной работы, приведен краткий обзор работ в области исследования матричных моделей и схематично изложено содержание диссертации.

В **Главе 1** обсуждаются основные идеи и методы, которые используются в дальнейшем тексте.

В параграфе 1.1 рассмотрены свойства планарного приближения для стандартной модели ϕ^4 как в обычной, так и в голдстоуновской моделях с потенциалами соответственно

$$V(\Phi) = \pm\frac{1}{2}tr\Phi^2 + \frac{g}{N}tr\Phi^4. \tag{1}$$

В непрерывном планарном пределе, когда $N \to \infty$, можно записать для плотности распределения собственных значений матрицы на отрезке $[-2a; 2a]$ следующее уравнение

$$\pm\frac{1}{2}\lambda + 2g\lambda^3 = \fint_{-2a}^{2a} d\mu \frac{u(\mu)}{\lambda - \mu}, \qquad |\lambda| \leq 2a. \tag{2}$$

В случае отрицательного знака, помимо простого решения уравнения на плотность $u(\lambda)$ на одном отрезке, существует при некотором значении константы связи $g(\xi)$ решение на двух отрезках $[a, b] \cup [c, d]$, которое характеризуется параметром

$$\xi = \int_a^b u(\lambda)\, d\lambda. \tag{3}$$

Обычно в литературе обсуждают, ввиду того, что это решение с минимальной вакуумной энергией, симметричную фазу на двух отрезках с $\xi = \frac{1}{2}$, которая начинает существовать с $g_{kr} = \frac{1}{16}$.

В параграфе 1.2 производится рассмотрение паркетного подхода для нульмерных матричных моделей. Замкнутая система планарного уравнения Швингера-Дайсона на пропагатор и планарных паркетных уравнений для (1) выглядит как

$$D = \pm 1 + 8gD^2 + 4gD^4\Gamma_4, \tag{4}$$

$$\Gamma_4 = -4g + H + V, \tag{5}$$

$$H = -4gD^2\Gamma_4 + VD^2\Gamma_4, \tag{6}$$

$$V = -4gD^2\Gamma_4 + HD^2\Gamma_4. \tag{7}$$

Здесь D– пропагатор, Γ_4– четырехточечная вершина, H и V– планарные паркетные интегральные ядра. Знак - соответствует описанию симметрической фазы на двух отрезках голдстоуновской модели. Показано, что планарное паркетное приближение достаточно хорошо работает для решения симметричного двухразрезного решения, то есть пропагатор при малых значениях константах связи обратно пропорционален ей.

Чтобы описать полностью несимметричный случай с $\xi = 0$ или 1 предлагается сделать сдвиг и рассмотреть модель над непертурбативным вакуумом. Однако здесь наблюдается расхождение уже в первом порядке по константе связи.

В **Главе 2** развивается метод планарных паркетных уравнений для многоследовой матричной модели.

В параграфе 2.1 дается планарное рассмотрение многоследовой матричной модели с

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}tr\Phi^2 + \frac{g}{4N}tr\Phi^4 + \frac{h}{N^2}(tr\Phi^2)^2. \tag{8}$$

Хорошо известно, что добавление многоследовых членов не приводит к существенным трудностям для решения модели.

В параграфе 2.2 строится планарное паркетное приближение модели. Член многоследового взаимодействия не меняет вид паркетных уравнений, а уравнение Швингера-Дайсона примет вид

$$D = 1 - 2gD^2 - gD^4\Gamma_4 - 4hD^2. \tag{9}$$

Проверено, что при малых значениях констант связи g планарный и планарно-паркетный пропагаторы совпадают вплоть до пятого порядка разложения. В паркетном подходе четырехточечная вершина не зависит от константы связи h, поскольку она входит только в планарное уравнение Швингера-Дайсона. В планарном же случае при малых g вершинная функция выглядит как

$$\Gamma_4 = -g + 2g^2 - 14g^3 + 114g^4 + 64g^3\bar{h} + 10g^2\bar{h}^2 + ..., \tag{10}$$

где $\bar{h} = 4h$.

Линия, разделяющая области фаз, критических значений констант связи достаточно неплохо совпадают в обоих сравниваемых подходах. Наибольшее разногласие двух подходов для критической константы связи g будет, когда $h = 0$, а в противоположном случае происходит их сближение.

Глава 3 посвящена планарному паркетному приближению двуматричной модели с

$$V(M_1, M_2) = \frac{1}{2}trM_1^2 + \frac{g}{4N}trM_1^4 + \frac{1}{2}trM_2^2 + \frac{g}{4N}trM_2^4 - ctrM_1M_2. \quad (11)$$

Эта модель с простейшим взаимодействием по двум матрицам была предложена Ициксоном и Зюбером. Она может быть исследована с использованием метода ортогональных полиномов. Как было показано Казаковым, эта система описывает модель Изинга на случайной решетке.

Для предложенных паркетных уравнений, неучитывающих перекрестных членов, в параграфе 3.1 однотипный по полям пропагатор совпал до второго порядка по константе связи с планарным аналогом

$$D_{pl} = D_1 = D_2 = \frac{1}{1-c^2} - 2\frac{1+c^2}{(1-c^2)^3}g + \frac{9+21c^2+6c^4}{(1-c^2)^5}g^2 + ... \quad (12)$$

В параграфе 3.2 дается описание модели (11) через ортогональные от двух переменных, которые принято называть биортогональными. В непрерывном пределе, когда $N \to \infty$, можно получить, используя биортогональные полиномы, точное выражение для планарного пропагатора

$$D_{pl} = \frac{w^2}{g^2}[1 + 4w - \frac{c^2(1+5w)}{(1+3w)^3}], \quad (13)$$

где w выражается через g как

$$g(w) = w + 3w^2 + \frac{3c^2w^3}{(1+3w)^3} - \frac{c^2w}{1+3w}. \quad (14)$$

Значения критических значений константы связи g двух подходов при разных значениях c сравнивается в нижеприведенной таблице.

c	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$0.01g_{pl}$	-8.33	-8.11	-7.44	-6.34	-4.99	-3.64	-2.42	-1.4	-0.64	-0.16
$0.01g_{par}$	-8.64	-8.4	-7.72	-6.67	-5.4	-4.04	-2.72	-1.62	-0.74	-0.16

Когда $c = \frac{1}{4}$ в паркетном исследовании также меняется поведение критической константы связи g, хотя согласие в данном случае достаточно грубое.

В параграфе 3.3 приводятся паркетные уравнения для несимметричного потенциала. Здесь также получены однотипные пропагаторы до второго порядка.

В **Главе 4** рассматривается многоследовая матричная модель Голдстоуна с действием

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}tr\Phi^2 + \frac{g}{N}tr\Phi^4 + \frac{h}{N^2}(tr\Phi^2)^2. \tag{15}$$

В параграфе 4.1 дается представление модели. Делается замечание, что удобным параметром вычисления является не ξ, определенное формулой (2), а суммой концов отрезков $s = a + b + c + d$.

Фазы с $\xi = \frac{1}{2}$ и $\xi = 0$ или 1 обсуждаются в параграфе 4.2.

Симметричное решение на двух отрезках с $\xi = \frac{1}{2}$ имеет следующее значение пропагатора

$$D = \frac{1}{4(g+h)}, \tag{16}$$

а вакуумная энергия примет вид

$$E^0(g,h) - E^0(0) = -\frac{g}{16(g+h)^2} + \frac{1}{4}\log(4g) - \frac{3}{8}. \tag{17}$$

Условием существования симметричной фазы на двух отрезках будет

$$g \geq 16(g+h)^2, \tag{18}$$

а для полностью несимметричной фазы можно получить соответственно

$$225g \geq 4(45g + 41h)^2. \tag{19}$$

Таким образом, соответствующая фаза модели определена на области, ограниченной сверху параболами, а снизу прямой $g = -h$ из-за формул (16) и (17).

Для общего случая в параграфе 4.3 приведены некоторые частные результаты. Асимптотические условия на генератор корреляционных функций дают три уравнения на симметрические полиномы на концы отрезков. Через эти симметрические полиномы, выраженные через сумму концов отрезков $s = a+b+c+d$, используя теорему о вычетах, можно провести расчет корреляционных функции. Их явный вид такой же, как и при $h = 0$, ввиду того, что плотность распределения не изменилась в данной модели. В случае ненулевого h вычислены пропагатор и первый корреляционный момент – намагниченность, которая в общем случае ненулевая. Например, пропагатор имеет вид

$$D = -\frac{5}{64}s^6 g - \frac{3}{16}s^4 g - \frac{1}{16}s^2 F^2 - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}F, \tag{20}$$

где

$$F = -\frac{1}{2g} + \frac{2D}{g}h. \tag{21}$$

При критических значениях констант связи парабола, соответствующая произвольному параметру ξ, лежит между двумя другими параболами, задаваемыми (18) и (19). Рассмотрен еще один частный случай, при котором появляется дополнительное уравнение на s.

В параграфе 4.4 приводится обсуждение планарного паркетного приближения модели симметричной фазы на двух отрезках. Выяснено, используя численный расчет, что при малых значениях констант связи существует решение уравнения на паркетный пропагатор, близкое к планарному ответу (16).

В **Заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

В **Приложения** вынесен вспомагательный материал. В **Приложении А** приведены сведения о мере по эрмитовым матрицам в обычной и двуматричной моделях. В **Приложении B** дано описание паркетного приближения для нульмерной скалярной теории поля, которое спавнивается с точным.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Обнаружено, что решение планарных паркетных уравнений вокруг тривиального пертурбативного вакуума голдстоуновской эрмитовой модели пригодно для описания симметричного решения на двух отрезках. Выяснено, что планарные паркетные уравнения над непертурбативным

вакуумом не очень хорошо описывают соответсвуюшее полностью несимметричное решение.

2. В многоследовой матричной модели наблюдалось достаточное сходство между паркетно-планарным и планарным приближениями. Здесь сравнивались пропагаторы, четырехточечные вершины и значения критических констант связи.

3. Проведено исследование паркетного описания двуматричной модели. Здесь сравнивались с планарными аналогами однотипные пропагаторы и значения критических значений константы связи $g(c)$. Получен точный планарный пропагатор.

4. Для многоследовой матричной модели Голдстоуна обсуждались области существования решения на двух отрезках в симметричном и полностью несимметричном случаях. Подсчитана вакуумная энергия для симметричного случая. В произвольном случае вычислены намагниченность, которая является параметром порядка фазы, и пропагатор. Проведено сравнение планарного паркетного приближения над тривиальным вакуумом с симметричным решением на двух отрезках многоследовой модели.

ПУБЛИКАЦИИ

1. A. Shishanin, I. Ziatdinov. *Parquet approximation for large-N matrix Higgs model.* JHEP. **07** (2003) 032-044.

2. А.О. Шишанин. *Матричная многоследовая модель в паркетном приближении.* Известия вузов. Физика, **12** (2005) 65-69.

3. А.О. Шишанин. *Решение паркетных уравнений для двуматричной модели.* Известия вузов. Физика, **5** (2006) 92-95.

4. А.О. Шишанин. *Фазы многоследовой матричной модели Голдстоуна в пределе больших N.* ТМФ, **152(3)** (2007) 457-465.

5. A.O. Shishanin. *Some aspects of multitrace matrix models.* in Proc. 12th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics. World Scientific, Singapore, 2006, p. 414-417.