МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ, ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Голиков Дмитрий Сергеевич

Асимптотические методы и ультравторичное квантование Маслова в некоторых задачах квантовой статистики

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, академик Маслов Виктор Павлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Молотков Иван Анатольевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Стояновский Александр Васильевич
Ведущая организация:	Томский государственный университет

Защита состоится «9» октября 2008 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, дом 1, стр. 2, Физический факультет, аудитория ____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «___» сентября 2008 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 501.002.10
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.В. Грац

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Подавляющее большинство проблем теории многих тел, представляющих физический интерес, достаточно сложны и, как правило, не имеют точного решения. Поэтому существенный интерес приобретают модельные системы, допускающие их математическое рассмотрение. Настоящая диссертация посвящена исследованию свойств модельных систем большого числа взаимодействующих частиц.

Выбор гамильтонианов для конкретных систем взаимодействующих частиц представляет для статистической механики важную проблему. При рассмотрении конкретных реальных систем с большим (в пределе — бесконечным) числом степеней свободы невозможно принять во внимание все без исключения свойства такой системы. Основная задача состоит в том, чтобы учесть лишь наиболее важные с точки зрения изучаемого явления черты этой системы, сознательно пренебрегая остальными. Подобное упрощение задачи представляет собой модельный подход, а соответствующие гамильтонианы носят название модельных. Необходимо отметить, что формулировка модельных задач представляет собой весьма сложную физическую и математическую проблему.

В конкретных задачах теории многих частиц адекватного соответствия реальной системы и её математической модели обычно не бывает и приходится довольствоваться моделью, свойства которой существенно отличаются от свойств реальной системы. Для решения таких задач приходится пользоваться приближёнными методами. Тем не менее, в настоящее время этот подход для большинства задач теории многих тел является почти единственным. Так обстоит дело и для квантовых, и для чисто классических систем.

С другой стороны, строгое исследование задачи как правило сталкивается со сложными математическими проблемами. Поэтому точные решения модельных задач достаточно редки и оказывают большое воздействие на развитие статистической механики в целом. Одной из важнейших проблем статистической физики является рассмотрение точно решаемых случаев. Такое рассмотрение вносит существенный вклад в наше понимание весьма сложных задач квантовой статистики и, в частности, для обоснования используемых приближённых методов.

В связи с этим представляет существенный интерес изучение тех немногих моделей, которые имеют некоторое сходство с реальными физическими системами, но допускают точное решение. При этом могут быть установлены основные особенности систем многих тел.

В качестве примеров таких систем, которые могут быть решены точно, следует привести системы невзаимодействующих частиц. Несмотря на тривиальность такой модели, она используется в качестве исходной в большинстве задач теории многих тел. Кроме того, существует ряд точно решаемых неидеальных моделей: результаты Н.Н. Боголюбова в модельных задачах теории сверхтекучести и сверхпроводимости, Онсагера в плоской модели Изинга, Бакстера в восьмивершинной модели.

Модельные гамильтонианы широко применяются при изучении различных задач теоретической физики. По этой причине их исследование представляет особый интерес — решением задачи одного гамильтониана решается целый ряд соответствующих физических моделей. Например, в работах В.П. Маслова подробно рассмотрен вопрос о построении приближённых решений уравнения

$$i\varepsilon\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H\left(t, \sqrt{\varepsilon}\hat{\psi}^{+}(x), \sqrt{\varepsilon}\hat{\psi}^{-}(x)\right)\Phi(t), \tag{1}$$

где $\Phi(t)$ — вектор состояния в пространстве Фока, $\hat{\psi}^{\pm}(x)$ — операторы рождения и уничтожения в этом пространстве. Метод комплексного ростка Маслова в пространстве Фока позволяет построить приближённые стационарные решения уравнения (1), в частности, многочастичных уравнений Шредингера, Лиувилля, а также уравнений квантовой теории поля.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование свойств модельных систем большого числа взаимодействующих частиц на основе асимптотических методов, метода ультравторичного квантования и концепции истинного символа. Рассматриваются задачи построения собственных значений и векторов уравнения Шредингера и уравнения для матрицы плотности.

Методы исследования

В диссертации используются строгие методы математической физики.

Научная новизна работы

В рамках данной диссертации получен ряд новых результатов. В частности, вычислено значение экспоненциально малого расщепления энергии вихревых решений уравнения Шредингера для системы на решётке. Построены асимптотические решения уравнения Шредингера для ряда модельных систем тождественных частиц с парным взаимодействием.

Наряду с известными асимптотическими методами в работе используется современный метод ультравторичного квантования, введённый академиком В.П. Масловым, а также концепция истинного символа, позволяющие получить более общие результаты, в сравнении с достигнутыми ранее.

Впервые получены точные решения уравнений, описывающих модельные системы взаимодействующих частиц, найдены спектры коллективных колебаний квазичастиц. В ряде случаев для системы уравнений Гамильтона получена «LA-пара», позволяющая записать уравнения движения в виде операторного уравнения. При исследовании уравнения для матрицы плотности в представлении ультравторичного квантования по парам впервые найдена соответствующая пара Лакса.

Теоретическая и практическая ценность работы

В диссертационной работе содержатся результаты, обладающие несомненной научной новизной и имеющие существенное значение для понимания физики систем большого числа частиц. Представленные в работе теоретические результаты могут быть использованы специалистами в области квантовой статистики, теории систем многих частиц, а также теории сверхтекучести и сверхпроводимости.

Личный вклад соискателя

Автором самостоятельно проведены исследования ряда модельных систем большого числа тождественных частиц. Получены решения соответствующих уравнений движения, а также спектры коллективных колебаний квазичастиц. Впервые найдено представление уравнений движения в виде пары Лакса при ультравторичном квантовании по парам уравнения для матрицы плотности.

Положения, выносимые на защиту

1. Построена туннельная асимптотика волновой функции основного и первого возбуждённого состояний в модели большого числа частиц на решётке. Получен аналог условия возникновения сверхтекучести в системе бозонов с бинарным взаимодействием. Вычислено экспоненциально малое расщепление энергетических уровней.

2. Показано, что для гамильтониана с парным взаимодействием на произвольном конечном числе точек решётки имеет место пространственно однородное решение. Получен энергетический спектр системы.

3. Для модельного гамильтониана системы взаимодействующих бозонов построена асимптотика собственных значений уравнения Шредингера.

4. В модели сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера из системы уравнений в вариациях, соответствующей истинному символу для уравнения Шредингера, получен спектр коллективных колебаний.

5. Исходя из концепции истинного символа, для модельных квантовых систем тождественных частиц — бозонов и фермионов — вычислены главные члены асимптотики собственных значений серий, соответствующих решениям гамильтоновых систем, а также получены новые спектры коллективных колебаний квазичастиц.

6. Общее решение системы уравнений, соответствующей математической модели для N-частичного уравнения Шредингера в случае фермионов, впервые представлено через произвольную нечётную функцию. Для частного решения уравнений движения точно вычислен спектр системы уравнений в вариациях.

7. Произведено ультравторичное квантование уравнения для матрицы плотности. Доказано тождество для ультравторично квантованного гамильтониана, позволяющее определить истинный символ уравнения для матрицы плотности. В случае квантования по парам показано, что система обладает спектром, полученным в работе В.П. Маслова «О зависимости критерия сверхтекучести от радиуса капилляра». Впервые получена пара Лакса для символа, соответствующего уравнению для матрицы плотности при ультравторичном квантовании по парам.

Апробация диссертации

Материалы диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ, а также представлялись в научных докладах на следующих конференциях:

- Международная конференция по фундаментальным наукам «Ломоносов 2003». Москва, 2003.
- Всероссийская конференция по фундаментальным наукам «Молодёжь в науке». Саров, 2003.
- Международная конференция по фундаментальным наукам «Ломоносовские чтения 2004». Москва, 2004.
- Международная конференция по фундаментальным наукам «Ломоносовские чтения 2005». Москва, 2005.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 11 опубликованных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 78 наименований. Объем диссертации составляет 152 страницы.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы основные цели, научная новизна и практическая ценность, перечислены защищаемые положения и кратко изложено содержание всех глав диссертации.

Глава 1. Системы большого числа частиц на решётке

В первом разделе исследована модель большого числа частиц на решётке. Решена задача нахождения асимптотики решений уравнения Шредингера вблизи вакуумного состояния при $N \to \infty$ (N — число частиц в системе) для гамильтониана

$$\widehat{H} = \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}\hat{b}_i^+\hat{b}_j + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}\hat{b}_i^+\hat{b}_j^+\hat{b}_j\hat{b}_i.$$

Построена туннельная асимптотика волновой функции основного и первого возбуждённого состояний и выяснены условия существования решения [1]. Параметром квазиклассического разложения является $\varepsilon = 1/N$.

Рассмотрена функция действия вида

$$S(x) = K(x) + i\pi kx,$$

где i — мнимая единица, k — произвольное целое число ($k \in \mathbb{Z}$), $x = n/N$ — относительное число заполнения. Гладкая функция $K(x)$ представляет собой действительную часть функции $S(x)$.

В зависимости от значения параметра k имеют место две ветви решений уравнения Шредингера: решения, отвечающие чётным значениям k, и решения, отвечающие нечётным k.

Рассматриваемая модель допускает достаточно тесную аналогию с теорией сверхтекучести, которая была предложена Н.Н. Боголюбовым в

1947 году. Именно, получен аналог условия возникновения сверхтекучести в исследуемой модели большого числа частиц на решётке. При различных соотношениях на параметры, аналогичных условию Боголюбова в теории сверхтекучести, реализуются два возможных случая.

В первом из них основное состояние, обладающее энергией

$$E = N\left(T_1 \pm T_2 + \frac{V_1 + V_2}{4}\right) \pm T_2 - \frac{V_1}{2} \mp (1+2n)\, T_2\sqrt{1 - \frac{a}{2}} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $a = \pm (V_1 - V_2)/T_2 < 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, пространственно однородно и является аналогом сверхтекучего состояния. Здесь и ниже верхний знак отвечает чётным значениям k, нижний — нечётным.

Во втором случае, который реализуется при $a > 2$, существуют два разных асимптотически близких состояния с энергией

$$E = N\left(T_1 + \frac{V_1}{2} \pm \frac{T_2}{a}\right) - \frac{V_2}{2} \mp (1+2n)\, T_2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1} + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (2)$$

между которыми имеется симметрия. Последние два состояния можно интерпретировать как аналог вихревых решений в теории сверхтекучести. Средние числа частиц в этом случае зависят только от величины $a = \pm (V_1 - V_2)/T_2$, представляющей собой комбинацию параметров, входящих в гамильтониан.

Вычислено значение экспоненциально малого расщепления энергии вихревых решений [1]. В ряде случаев классический гамильтониан, соответствующий рассматриваемой необычной квазиклассической системе, имеет два вырожденных минимума. Волновые функции

$$\psi_j(x) = \varphi_j(x) e^{NK_j(x) + i\pi kxN}, \quad j = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

сосредоточенные в окрестностях минимумов, могут туннелировать друг в друга, что приводит к экспоненциально малому расщеплению энергетических уровней.

Следуя решению уравнения Шредингера, полученные асимптотически близкие инстантонные решения туннелируют друг в друга. Разность энергий симметричного и антисимметричного состояний вычислена с помощью квазиклассических методов В.П. Маслова и представляет собой экспоненциально малое расщепление энергетических уровней:

$$E_+ - E_- = (-1)^{k+1} T_2 \sqrt{\frac{2Na\sqrt{a^2-4}}{\pi}}\, \varphi_1^2(\bar{x}) e^{2NK_1(\bar{x})} \operatorname{sh} K_1'(\bar{x}) \left(1 + O\Big(\frac{1}{N}\Big)\right),$$

где $\varphi_1(x)$ — предэкспоненциальная функция, $\bar{x} = 1/2$, $K_1(\bar{x}) < 0$.

Во втором разделе первой главы проведено рассмотрение гамильтониана

$$\widehat{H} = \sum_{i,j=1}^{M} T_{ij}\hat{b}_i^+\hat{b}_j + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{M} V_{ij}\hat{b}_i^+\hat{b}_j^+\hat{b}_j\hat{b}_i$$

на произвольном конечном числе M точек. Получены асимптотические уравнения для собственных значений и векторов гамильтониана [4].

Пространственно однородное решение обладает энергетическим спектром квазиклассического вида

$$E = N\left(T_1 + (M-1)\,T_2 + \frac{V_1 + (M-1)\,V_2}{2M}\right) +$$
$$+\frac{M(M-1)}{2}T_2 - \sum_{i=1}^{M-1}(1+2m_i)T_2\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{2} - \frac{V_1 - V_2}{T_2}\right)} - \frac{V_1}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$m_i = 0, 1, 2, \ldots$, и существует при выполнении условия на параметры гамильтониана:

$$\frac{V_1 - V_2}{T_2} < \frac{M^2}{2}.$$

Полученное соотношение для энергии, неравенство, обеспечивающее условие существования пространственно однородного решения, совпадают в частном случае $M = 2$ с результатами первого раздела.

В третьем разделе исследован модельный гамильтониан вида

$$\widehat{H} = -\frac{T}{G}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\sum_{j=1}^{G}\hat{b}_j + \frac{J}{G}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i^+\sum_{j=1}^{G}\hat{b}_j\hat{b}_j - \mu\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i,$$

где μ – химический потенциал. С использованием асимптотических методов В.П. Маслова найдены энергетические уровни системы [3]. Построено асимптотическое решение уравнения Шредингера.

С другой стороны, с помощью вариационного принципа Н.Н. Боголюбова получена оценка для собственных значений гамильтониана [2]. Найдены значения аргументов вектора состояния, реализующие минимум энергии, а также соотношения на параметры гамильтониана, обеспечивающие существование этих решений. Показана эквивалентность результатов.

Глава 2. Ультравторичное квантование уравнения Шредингера

В первом разделе методы ультравторичного квантования и концепция истинного символа применены для модели Бардина-Купера-Шриффера [5]. Рассмотрены соответствующая система уравнений Гамильтона и система уравнений в вариациях, решения которых определяют спектр возбуждений фермионной системы.

Показано, что спектр возбуждений, полученный с помощью метода ультравторичного квантования, совпадает со спектром коллективных колебаний Н.Н. Боголюбова. Для уравнений самосогласованного поля БКШ-Боголюбова приведена пара Лакса.

Следующие два раздела отведены исследованию модельных систем взаимодействующих тождественных квантовых частиц — бозонов и фермионов. Рассмотрен истинный символ

$$\mathcal{H}\left[\Phi^+(\cdot),\Phi(\cdot)\right] = \iint dxdy\,\Phi^+(x,y)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)\right)\Phi(x,y) +$$
$$+2N\iiiint dxdydx'dy'\,V\,(x,y)\,\Phi^+(x,y)\Phi^+(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y',y)$$

ультравторично квантованной задачи, определенный для пары симметричных в случае бозонов и антисимметричных в случае фермионов относительно перестановок аргументов функций $\Phi^+(x,y)$, $\Phi(x,y)$, заданных на $L_2(\mathbf{T}^2)$. Решены соответствующие системы уравнений Гамильтона для каждой из статистик. Получены главные члены асимптотики собственных значений серий, соответствующих решениям гамильтоновых систем:

$$E_{k_1,k_2} = N\left(\frac{\hbar^2(k_1^2+k_2^2)}{2m}+\frac{v_{2k_2}\pm v_0}{4}\right),$$

где k_1, k_2 — волновые векторы вида

$$2\pi\left(\frac{n_1}{L_1},\frac{n_2}{L_2},\frac{n_3}{L_2}\right), \tag{3}$$

n_1, n_2, n_3 — целые числа, v_l — образ Фурье потенциала.

Представлено решение системы уравнений в вариациях:

$$\delta\Phi_l^+(x,y) = u_{1,l}\left(e^{i(-k_1+k_2)x+i(-k_1+l)y} \pm e^{i(-k_1+k_2)y+i(-k_1+l)x}\right) + \\ + u_{2,l}\left(e^{i(-k_1-k_2)x+i(-k_1+2k_2+l)y} \pm e^{i(-k_1-k_2)y+i(-k_1+2k_2+l)x}\right),$$

$$\delta\Phi_l(x,y) = -v_{1,l}\left(e^{i(k_1+k_2)y+i(k_1+l)x} \pm e^{i(k_1+k_2)x+i(k_1+l)y}\right) - \\ - v_{2,l}\left(e^{i(k_1-k_2)y+i(k_1+2k_2+l)x} \pm e^{i(k_1-k_2)x+i(k_1+2k_2+l)y}\right) + \\ + \sum_{l'\neq l,l+2k_2} w_{l,l'}\left(e^{i(k_1+k_2+l-l')x+i(k_1+l')y} - e^{i(k_1+k_2+l-l')y+i(k_1+l')x}\right),$$

где волновой вектор $l \neq -k_2$.

Задача на собственные значения системы уравнений в вариациях сведена к нахождению собственных значений уравнения

$$\widetilde{\lambda}X = MX.$$

Здесь

$$\widetilde{\lambda} = \lambda + \frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l),$$

X — вектор-столбец вида

$$X = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \\ v_{1,l} \\ v_{2,l} \end{pmatrix},$$

M — матрица

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & V & V_1 & 0 \\ V & B_2 & 0 & V_2 \\ M_1 & F & -B_1 & -V \\ F & M_2 & -V & -B_2 \end{pmatrix}$$

с элементами

$$B_1 = B_{k_2,l} + \frac{v_{l-k_2}}{2}, \qquad V = \frac{v_{l+k_2} \pm v_{2k_2}}{2},$$

$$B_2 = B_{k_2,l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2}, \qquad V_1 = -\frac{v_{l+k_2} \pm v_{l-k_2}}{2},$$

$$M_1 = 2(v_{l-k_2} \pm v_0)\varphi_{k_2,l}, \qquad V_2 = -\frac{v_{l+k_2} \pm v_{l+3k_2}}{2},$$

$$M_2 = 2(v_0 \pm v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2}, \quad F = (v_{2k_2} \pm v_{l+k_2})\left(\varphi_{k_2,l} \pm \varphi_{k_2,l+2k_2}\right),$$

где числа $B_{k_2,l}$, $\varphi_{k_2,l}$ имеют вид

$$B_{k_2,l} = \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + (v_{l-k_2} \pm v_{l+k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2},$$

$$\varphi_{k_2,l} = \mp\frac{b_l}{2} \pm \frac{\sigma_l}{2}\sqrt{b_l^2 - 1}, \quad b_l \equiv \frac{\frac{\hbar^2}{m}(l^2 - k_2^2) - (v_{2k_2} \pm v_0)}{v_{l-k_2} \pm v_{l+k_2}},$$

а k_1, k_2, l — трёхмерные векторы вида (3). Коэффициенты σ_l в случае бозонов тождественно совпадают с единицей, а в случае фермионов обладают свойствами $\sigma_{-l} = -\sigma_l$, $|\sigma_l| = 1$.

Получены соответствующие собственные значения системы уравнений в вариациях:

$$\lambda_{1,k_1k_2,l} = -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2 + l) \pm \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} + \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}},$$

$$\lambda_{2,k_1,k_2,l} = -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2 + l) \pm \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} - \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}},$$

где коэффициенты $\xi_{k_2,l}$, $\eta_{k_2,l}$ определяются равенствами

$$\xi_{k_2,l} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \left(\left(l_1^2 - k_2^2\right)^2 + \left(l^2 - k_2^2\right)^2\right) +$$
$$+ \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(l_1^2\left(v_{l+3k_2} - v_{2k_2}\right) + l^2\left(v_{l-k_2} - v_{2k_2}\right) - k_2^2\left(v_{l-k_2} + v_{l+3k_2} - 2v_{2k_2}\right)\right) -$$
$$- (v_{2k_2} \pm v_{l+k_2})(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} - 2v_{2k_2})/2,$$

$$\eta_{k_2,l} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(2\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(k_2^4 - k_2^2\left(l_1^2 + l^2\right) + l_1^2 l^2\right) - \left(l_1^2 + l^2 - 2k_2^2\right)\left(v_{2k_2} \pm v_{l+k_2}\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(2\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\left(k_2^4 - k_2^2\left(l_1^2 + l^2\right) + l_1^2 l^2\right) +\right.$$
$$+ \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(l_1^2\left(2v_{l-k_2} \pm v_{l+k_2} - v_{2k_2}\right) + l^2\left(2v_{l+3k_2} \pm v_{l+k_2} - v_{2k_2}\right) -\right.$$
$$\left.- 2k_2^2\left(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} \pm v_{l+k_2} - v_{2k_2}\right)\right) +$$
$$\left.+ 2(v_{l+3k_2} - v_{2k_2})(v_{l-k_2} - v_{2k_2}) + (v_{2k_2} \pm v_{l+k_2})(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} - 2v_{2k_2})\right)/4,$$
$$l_1 = l + 2k_2.$$

В приведённых соотношениях верхний знак соответствует статистике Бозе-Эйнштейна, а нижний — Ферми-Дирака (кроме переменного знака при σ_l).

Отметим, что для бозонов собственное значение $\lambda_{1,k_1,k_2,l}$ в предельном случае при $k_2 \to 0$ соответствует знаменитому спектру сверхтекучести Н.Н. Боголюбова:

$$\lambda_{1,k_1,l} = -\frac{\hbar^2}{m}k_1 l + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l\right)^2 - v_l^2}.$$

Приведена эквивалентная форма уравнений Гамильтона, которая позволяет определить «LA-пару» и представить стационарные уравнения в виде равенства нулю коммутатора:

$$[\widehat{A}, \widehat{L}]_- = 0.$$

Матрицы $\widehat{A}$ и $\widehat{L}$ имеют вид:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{G} \pm \dfrac{\alpha}{2} & -\widehat{\widetilde{R}} \\ \widehat{R} & \mp\dfrac{\alpha}{2} - \widehat{G}^T \end{pmatrix}, \quad \widehat{L} = \begin{pmatrix} \widehat{T} & \pm\widehat{\widetilde{B}} \\ \mp\widehat{B} & -\widehat{T} \end{pmatrix},$$

$\widehat{G}$, $\widehat{R}$, $\widehat{\widetilde{R}}$ — операторы с ядрами $G(x,y)$, $R(x,y)$, $\widetilde{R}(x,y)$, которые выражаются через функции $\Phi(x,y)$, $\Phi^+(x,y)$, $\widehat{G}^T$ — транспонированный оператор, а ядра операторов матрицы $\widehat{L}$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\delta(x-y) - \frac{\Omega}{2}\,\delta(x-y), \\ B(x,y) &= V(x,y)R(x,y), \\ \widetilde{B}(x,y) &= V(x,y)\widetilde{R}(x,y), \end{aligned}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, Ω — действительное число. Верхний знак относится к случаю бозе-частиц, нижний — к случаю ферми-частиц.

В четвёртом разделе рассмотрена система взаимодействующих фермионов на трехмерном торе $\mathbf{T}$ со сторонами L_1, L_2 и L_2. Значение интеграла от потенциала взаимодействия частиц между собой $\int V(r)d\mathbf{r}$ показывает, какой тип взаимодействия в системе превалирует — притяжения или отталкивания.

В работе академика Н.Н. Боголюбова была рассмотрена система, обладающая свойством сверхтекучести, в которой в среднем превалирует отталкивание $\int V(r)d\mathbf{r} > 0$.

При сближении частиц в He^3 и в He^4 происходит отталкивание, а при их отдалении друг от друга — притяжение. Исследован антисимметрический случай, соответствующий He^3, когда

$$\int V(r)d\mathbf{r} = 0,$$

то есть в среднем притяжение компенсирует отталкивание.

Следуя соображениям термодинамического предела в качестве такого потенциала взаимодействия можно получить выражение

$$V(x,y) = V_0 \Delta_x \delta(x-y),$$

где $x, y \in \mathbf{T}$ — координаты частиц, $\delta(x-y)$ — дельта-функция Дирака, Δ_x — оператор Лапласа, действующий по аргументу x.

Система уравнений Гамильтона представлена в виде равенства нулю коммутатора двух матриц

$$[A_l, L_l]_- = 0.$$

Показано, что решение этого уравнения относительно A_l определяется произвольной нечётной функцией $f(\cdot)$ и параметрами, связанными несколькими условиями.

Соответствующая система уравнений в вариациях имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_{1,k,l} = \frac{\hbar^2 l(l-2k)}{2m} + \frac{\hbar^2 k^2}{m} - \Omega - \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2},$$
$$\lambda_{2,k,l} = -\frac{\hbar^2 l(l+2k)}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{m} + \Omega + \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2},$$

где l, k — волновые векторы, Ω — действительное число. При $\Omega = \hbar^2 k^2/m$ спектр соответствует результату предыдущего раздела для частного случая рассмотренного здесь потенциала.

Глава 3. Ультраврторичное квантование уравнения для матрицы плотности

В первом разделе уравнение для матрицы плотности записано в ультравторично квантованном виде. Получено тождество для ультравторично квантованного гамильтониана, позволяющее определить истинный символ уравнения для матрицы плотности.

Рассмотрены соответствующая истинному символу система уравнений Гамильтона и система уравнений в вариациях [6]. Показано, что система уравнений в вариациях позволяет получить спектр возбуждений Н.Н. Боголюбова

$$\lambda_l = -\frac{\hbar^2}{m} pl + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l\right)^2 - v_l^2}.$$

Во втором разделе произведено ультравторичное квантование по парам аргументов уравнения для матрицы плотности. Доказано тождество для ультравторично квантованного гамильтониана, позволяющее определить истинный символ уравнения для матрицы плотности при ультравторичном квантовании по парам.

Исследование системы уравнений Гамильтона, соответствующей истинному символу, показало, что система обладает спектром, полученным в работе В.П. Маслова «О зависимости критерия сверхтекучести от радиуса капилляра», который был обобщён в предыдущей главе. Установлен важный математический результат возможности записи гамильтоновой системы в виде уравнения эволюции некоторого оператора — получена пара Лакса для символа, соответствующего уравнению для матрицы плотности в случае квантования по парам.

В заключении перечислены полученные результаты и кратко сформулированы основные выводы диссертационной работы.

Основные результаты и выводы

1. Проведено исследование модели большого числа частиц на решётке. Построена туннельная асимптотика волновой функции основного и первого возбуждённого состояний системы бозонов с бинарным взаимодействием. Получен аналог условия возникновения сверхтекучести. При различных соотношениях на параметры, аналогичных условию Боголюбова в теории сверхтекучести, реализуются два возможных случая. В первом из них основное состояние пространственно однородно и является аналогом сверхтекучего состояния. Во втором случае существуют два разных асимптотически близких состояния, между которыми имеется симметрия. Последние два состояния можно интерпретировать как аналог вихревых решений в теории сверхтекучести. Соответствующие волновые функции могут туннелировать друг в друга, что приводит к экспоненциальному расщеплению энергетических уровней. Вычислена разность энергий симметричного и антисимметричного возбужденных состояний, представляющая собой экспоненциально малое расщепление энергетических уровней.

2. Рассмотрен гамильтониан общего вида на произвольном конечном числе M точек. Получены асимптотические уравнения для собственных значений и векторов гамильтониана. Показано, что состояние с одинаковыми числами заполнения, обратно пропорциональными числу точек разбиения M, существует при выполнении определённого условия на параметры гамильтониана. Для этого пространственно однородного решения получен энергетический спектр системы.

3. Исследован модельный гамильтониан взаимодействующих бозонов. С помощью асимптотических методов В.П. Маслова найдены энергетические уровни системы. Проведено построение асимптотики собственных значений соответствующего уравнения Шредингера.

4. Методы ультравторичного квантования применены к уравнению Шредингера для модели сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера. Из системы уравнений в вариациях, соответствующей истинному символу для уравнения Шредингера, получен спектр коллективных колебаний, совпадающий со спектром коллективных колебаний Н.Н. Боголюбова. Приведена пара Лакса для уравнений самосогласованного поля модели БКШ.

5. Рассмотрены модельные квантовые системы тождественных частиц — бозонов и фермионов. Исходя из концепции истинного символа, получены решения соответствующих уравнений Гамильтона. Предъявлены главные члены асимптотики собственных значений серий, соответствующих решениям гамильтоновых систем. Исследована система уравнений в вариациях, получены точные спектры коллективных колебаний квазичастиц. Рассмотрена эквивалентная форма уравнений Гамильтона, допускающая представление в виде пары Лакса.

6. Исследована математическая модель для антисимметрических решений N-частичного уравнения Шредингера. Общее решение соответствующей системы уравнений представлено через произвольную нечётную функцию. Получены уравнения для определения спектра. Для одного из частных решений уравнений движения точно вычислен спектр, соответствующий системе уравнений в вариациях.

7. Методы ультравторичного квантования впервые применены к уравнению для матрицы плотности. Доказано тождество для ультравторично квантованного гамильтониана, которое позволяет определить истинный символ уравнения для матрицы плотности. Рассмотрены соответствующая истинному символу система уравнений Гамильтона и система уравнений в вариациях. В частности, система уравнений в вариациях позволяет получить спектр сверхтекучести Н.Н. Боголюбова.

8. Произведено ультравторичное квантование по парам аргументов уравнения для матрицы плотности. Определён истинный символ уравнения для матрицы плотности при ультравторичном квантовании по парам. Показано, что система обладает спектром, полученным в работе В.П. Маслова «О зависимости критерия сверхтекучести от радиуса капилляра». Впервые получена пара Лакса для символа, соответствующего уравнению для матрицы плотности.

Список публикаций

[1] *Голиков Д.С.* Об инстантонах в системе N частиц на решетке // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2003. №4. С. 12–15.

[2] *Голиков Д.С.* Некоторые состояния модельной системы бозонов // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2005. №3. С. 17–18.

[3] *Голиков Д.С.* Об асимптотике собственных значений модельного гамильтониана взаимодействующих бозонов // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2006. №1. С. 27–30.

[4] *Голиков Д.С.* Квантовая система произвольного числа уровней на решётке // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2006. №3. С. 7–10.

[5] *Голиков Д.С., Коваль Г.В.* Ультравторичное квантование Маслова в случае модели Бардина-Купера-Шриффера // ДАН. 2006. **408**. №6. С. 1–3.

[6] *Голиков Д.С., Коваль Г.В.* Символ Маслова для матрицы плотности // ДАН. 2007. **412**. №3. С. 1–4.

[7] *Голиков Д.С., Маслов В.П.* О точном решении четырехрядной матрицы, отвечающей уравнениям в вариациях для ультравторично квантованных задач // Мат. заметки. 2008. **83**. №2. С. 305–309.

[8] *Голиков Д.С.* Об инстантонах в системе N частиц на решётке // Тезисы международной конференции по фундаментальным наукам «Ломоносов 2003». Секция «Физика». Москва. 2003. С. 165–166.

[9] *Голиков Д.С.* О системах нескольких уровней // Всероссийская конференция по фундаментальным наукам «Молодёжь в науке». Секция «теоретическая физика». Саров. 2003.

[10] *Голиков Д.С.* Некоторые состояния модельной системы бозонов // Тезисы международной конференции по фундаментальным наукам «Ломоносовские чтения 2004». Секция «Физика». Москва. 2004. С. 112–114.

[11] *Голиков Д.С.* Об асимптотике собственных значений модельного гамильтониана взаимодействующих бозонов // Тезисы международной конференции по фундаментальным наукам «Ломоносовские чтения 2005». Секция «Физика». Москва. 2005. С. 81–84.