С другой стороны, задача Коши (3) и соответствующая теоретическая гистограмма могут быть отнесены к узкой окрестности некоторой начальной точки. Формально такая возможность может быть учтена путем решения задачи идентификации на множестве $f(A,c,p) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(A,p_i)$ с неопределенным $c = \{c_1,\ldots,c_n\}$.

При дальнейшей разработке этой проблемы в диагностических целях естественно учесть, что наряду с погрешностями измерений входная информация может содержать и «биологический шум» по отношению к принятой модели. Для повышения качества диагностики следует совершенствовать модель, учитывая, например, многообразие иммунокомпетентных клеток.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В.Ф.Бутузову и В.М.Репину за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Бернет Ф.* Целостность организма и иммунитет. М., 1964.
2. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М., 1991.
3. *Марчук Г.И., Поляк Р.Я., Зуев С.М., Каляев Д.В.* // Журн. Всесоюз. хим. о-ва. 1988. **33,** №5. С.537.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1979.
5. *Кузнецова Г.П.* // Тез. докл. научн.-техн. конф. по пробл. увеличения эффективн. работы железнодор. транспорта Дальневост. района. Хабаровск, 26–27 окт., 1995. С.198.
6. *Федосеева В.Н., Порядин Г.В., Ковальчук Л.В.* и др. Руководство по иммунологическим и аллергологическим методам в гигиенических исследованиях. М., 1993.
7. *Fishman M., Perelson A.S.* // J. Theor. Biol. 1995. **173**. P.241.
8. *Хантов Р.М., Пинегин Б.В., Истамов Х.И.* Экологическая иммунология. М., 1995.
9. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М., 1985.
10. *Гласко В.Б.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
11. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.2. М., 1980.
12. *Гласко В.Б., Щепетилов А.В.* // ЖВМ и МФ. 1991. **30**, №12. С.1826.
13. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1969. **39**. №5. С.195.
14. *Гончарский А.В., Ягола А.Г.* // ДАН СССР. 1969. **184**. №4. С.771.
15. *Иванов В.К.* // Матем. сб. 1963. **61**. С.211.
16. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
17. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* // ЖВМ и МФ. 1965. **5**. №3. С.463.

Поступила в редакцию
27.11.96

УДК 533.951

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

И.М.Алешин

(кафедра физики Земли)

Рассмотрено влияние периодической неоднородности положительного фона на динамику нелинейных потенциальных волн в холодной плазме в кубическом по амплитуде поля приближении. Показано, что такая неоднородность приводит к расщеплению спектра ленгмюровской волны на две ветви, одна из которых оказывается затухающей. Неоднородность среды приводит также к нелинейному сдвигу частоты.

Рассмотрим систему, состоящую из электронного газа, погруженного в положительно заряженный фон с плотностью заряда $\rho(r) = en_+(r)$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r})\,, \quad \rho_0 = \mathrm{const}\,,$$

— элементарный заряд.

Если длина волны возмущения $\lambda = 2\pi/k$ много больше характерного размера неоднородности :

$$\lambda \gg a\,, \tag{1}$$

то любую величину, характеризующую свойства системы $z(\mathbf{r},t)$, можно представить в виде суммы быстро и медленно меняющихся слагаемых:

$$z(\mathbf{r},t) = Z(\mathbf{r},t) + \delta z(\mathbf{r},t)\,, \tag{2}$$

$$Z(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta d\xi\, Z(\mathbf{r}+\xi) = \langle z(\mathbf{r},t)\rangle\,, \qquad \lambda \ll \Delta^{1/3} \ll \lambda\,. \tag{3}$$

Однородность системы предполагает пренебрежение членами вида

$$\langle \delta z \delta n_0\rangle\,, \tag{4}$$

где $\delta n_0(\mathbf{r})$ — отклонение плотности электронов от ее среднего значения N_0. Предполагая, что

$$\delta n_0 \ll N_0\,, \tag{5}$$

можно использовать хорошо разработанные методы, применяемые в однородных задачах (см., напр., [1, 2]) и с учетом членов вида (4).

Для определения координатной зависимости равновесной электронной плотности необходимо использовать кинетическое уравнение для матрицы плотности [3] или функции распределения [4]. В последнем случае для классической и сильно вырожденной электронной плазмы имеем соответственно (см. приложение)

$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \begin{cases} A_M \exp\{e\varphi_0(\mathbf{r})/T\}\,, \\ A_F(1-2e\varphi_0(\mathbf{r})/E)^{3/2}\,, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ — самосогласованный потенциал поля, создаваемый электронами и положительным фоном, T, E_F — температура и энергия Ферми

Считая выполненными неравенства (5) и (1), будем полагать

$$\delta n_0 \sim \varphi_0\,, \tag{7}$$

что позволяет заменить формулы (6) линейными по φ_0 выражениями.

Для описания длинноволновых потенциальных*) возмущений ($\omega/ku \ll 1$, ω — частота, u — средняя скорость хаотического движения частиц) воспользуемся уравнениями «холодной» гидродинамики [2]. Для простоты ограничимся рассмотрением одномерного случая: поверхности постоянной плотности положительного заряда (это плоскости, перпендикулярные оси $\mathbf{x}$, совпадающей с направлением распространения волны. После применения к этим уравнениям процедуры усреднения (2)–(3) для медленно и быстро меняющихся величин имеем соответственно

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \left(N_0 V + NV + \langle \delta n_0 \delta v\rangle + \langle \delta n \delta v\rangle\right) = 0\,, \\ \partial_t V + \dfrac{1}{2}\partial_x\left(V^2 + \langle \delta v^2\rangle\right) = -\left(\dfrac{e}{m}\right) E\,, \\ \partial_x E = -4\pi e N\,, \end{cases} \tag{8a}$$

$$\begin{cases} \partial_t \delta n + \partial_x\left(N_0 \delta v + V\delta n_0 + N\delta v + V\delta n\right) = 0\,, \\ \partial_t \delta v + \partial_x V \delta v = -\left(\dfrac{e}{m}\right) E\,, \\ \partial_x \delta E = -4\pi e \delta n\,. \end{cases} \tag{8b}$$

Здесь n, v — концентрация и скорость возмущений, E — напряженность самосогласованного электрического поля.

Периодическую функцию δn_0 можно представить в виде

$$\delta n_0 = N_0 \sum_{s\neq 0} \nu_s \exp(ik_s x)\,, \quad k_s = s k_a\,.$$

Разложение быстро меняющихся величин по той же системе функций позволяет перейти в (8б) от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям для пространственных гармоник. Далее, преобразованием Фурье по времени и «медленной» координате в (8) задача сводится к решению интегральных уравнений для фурье-образов исходных величин. Для решения полученных таким образом уравнений используем итерационную процедуру разложения по степеням электрического поля [1]. Выражая все величины через фурье-амплитуду электрического поля, в кубическом приближении получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\omega,k)\,E(\omega,k) + \textstyle\int D(1;2)\widetilde{\kappa}^{(2)}(1;2)\,E(1)\,E(2) + \\ &+ \textstyle\int D(1;2;3)\,\widetilde{\kappa}^{(3)}(1;2;3)\,E(1)\,E(2)\,E(3) = 0\,, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &(j) \equiv (\omega_j;k_j)\,, \\ &\widetilde{\varepsilon}(\omega,k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1+\eta^2\zeta(\omega)\right)\,, \\ &\zeta(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2\varepsilon_0(\omega)}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,, \\ &\eta^2 = \sum_{s\neq 0} \nu_s \nu_{-s}\,, \\ &D(1;2;\ldots;s) = d\omega_1 dk_1 d\omega_2 dk_2 \ldots d\omega_s dk_s \times \\ &\qquad \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_s) \times \\ &\qquad \times \delta(k - k_1 - k_2 - \ldots - k_s)\,, \\ &\widetilde{\kappa}^{(s)}(1;\ldots;s) = \widetilde{\kappa}^{(s)}(1;\ldots;s) + \eta^2 \Delta\widetilde{\kappa}^{(s)}(1;\ldots;s)\,, \end{aligned}$$

$\kappa^{(s)}$ — нелинейные восприимчивости однородной плазмы [1]. Ввиду громоздкости выражений для $\Delta\widetilde{\kappa}^{(s)}$ приведем формулы лишь для тех из них, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\begin{aligned} &\Delta\widetilde{\kappa}^{(3)}(1;2;3) = \frac{1}{3}\left(\Delta\kappa^{(3)}(1;2;3) + \Delta\kappa^{(3)}(2;3;1) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \Delta\kappa^{(3)}(3;1;2)\right)\,, \\ &\Delta\kappa^{(3)}(1;2;3) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_1\omega_2\omega_3}\left(\Delta\kappa_a^{(3)}(1;2;3) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \alpha^2 k_a^2 \Delta\beta^{(3)}(1;2;3)\right)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha^2 = \sum_{s\neq 0} s^2 \nu_s \nu_{-s} \Big/ \sum_{s\neq 0} \nu_s \nu_{-s} \sim O(1)\,, \\ &\kappa_\beta^{(3)} = b_{2,3}\left(\frac{1+\zeta}{\omega} + \frac{1}{\omega_1\zeta_1}\right) + d_{2,3}(\zeta+\zeta_1)\,, \\ &b_{i,j} = \left((1+\zeta_{i,j})(\zeta_i+\zeta_j)\right)/\omega_{i,j} + \zeta_{i,j}\left(\frac{1}{\omega_i\varepsilon_{0i}} + \frac{1}{\omega_j\varepsilon_{0j}}\right)\,, \\ &d_{i,j} = \frac{1}{\omega_{i,j}\varepsilon_{0i,j}}\left(\frac{\zeta_i+\zeta_j}{\omega_{i,j}}\,\frac{1}{\omega_i\varepsilon_{0i}} + \frac{1}{\omega_j\varepsilon_{0j}}\right)\,, \\ &\omega_{i,j} = \omega_i + \omega_j\,, \\ &F_{i,j} = F(\omega_{i,j})\,. \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде нелинейной волны. Для этого положим

$$E(\omega,k) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n \delta(\omega - n\omega_0)\,\delta(k - nk_0)\,. \tag{10}$$

Подстановка разложения (10) в уравнение (9) преобразует последнее в бесконечную систему алгебраических уравнений для гармоник. Считая $E(n) \sim E(\pm1)^n$, $E(0) \sim E(\pm1)^2$, $E(n) \equiv E(n\omega_0, nk_0)$, в кубическом приближении можно ограничиться пятью уравнениями для гармоник с $n = 0, \pm1, \pm2$. Разрешая полученную систему

*) В силу анизотропии среды разделение возмущений на продольные и поперечные в общем случае невозможно. Однако можно выделить ветвь колебаний, в которой одна из компонент электрического поля превышает другую в $\sim k_a^2/k^2$ раз.

относительно $E(1) = E(-1) \equiv E_0/2$, с точностью до E_0^3 имеем

$$\widetilde{\varepsilon}(1) + \frac{3}{4}\alpha^2 k_a^2 \eta^2 E^2 \Delta\widetilde{\kappa}_\beta^{(3)}(1;-1;1) = 0\,, \tag{11}$$

где в силу условия (1) сохранены слагаемые, пропорциональные большой величине k_a^2.

Из уравнения (11) после введения безразмерных величин $\Omega = \omega/\omega_p$, $\sigma = \alpha k_a E/m\omega_p$ получаем нелинейное дисперсионное соотношение

$$\begin{gathered} 1 - \frac{1}{\Omega^2}\left(1 + \eta^2\zeta(\Omega)\right) - \frac{3}{4}\frac{(\eta\sigma)^2}{\Omega^4} \times \\ \times \left\{-8\zeta^2(\Omega) + \frac{\zeta(\Omega)}{\Omega^2\varepsilon_0(2\Omega)}\left[\zeta(\Omega) + \frac{2}{\varepsilon_0(\Omega)}\right]\right\} = 0\,. \end{gathered} \tag{12}$$

В линейном приближении уравнение (12) имеет два решения:

$$\Omega_{1,2}^{(0)} = 1 \pm \eta\,, \tag{13}$$

т.е. периодическая неоднородность среды приводит к расщеплению спектра плазменных волн на две ветви.

Уравнение (12) преобразуется в уравнение пятой степени относительно квадрата частоты, следовательно, имеет пять корней. Однако физический смысл имеют те из них, которые в пределе $\sigma \to 0$ переходят в (13):

$$\Omega_i \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \Omega_i^{(0)}\,. \tag{14}$$

Чтобы получить приближенные выражения для корней нелинейного дисперсионного уравнения, положим

$$\omega = 1 + \mu\,, \quad \mu \ll 1\,. \tag{15}$$

Подстановка (15) в (12) приводит к кубическому уравнению для μ:

$$\mu^3 - \eta^2\mu + 3\eta^2\sigma^2 = 0\,.$$

Из анализа этого уравнения следует, что один из его корней, соответствующий меньшему из линейных корней в (13), всегда действителен. Два других корня комплексны, если безразмерная амплитуда поля σ превышает пороговое значение

$$\sigma > \sigma_0 = 3^{-4/5}(2\eta)^{1/2}\,.$$

При этом условию (14) удовлетворяет корень с отрицательной мнимой частью. Таким образом, эта ветвь является затухающей. На рисунках изображены зависимости действительных частей частот (рис. 1) и декремента (рис. 2) от амплитуды поля.

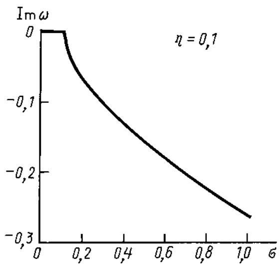

Рис. 1

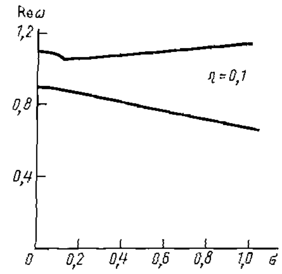

Рис. 2

Приложение

Решение стационарного уравнения Власова

$$\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}f(\mathbf{r},\mathbf{v}) + \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0$$

есть произвольная функция его характеристики

$$f(\mathbf{r}, v) = f_0\left(\frac{mv^2}{2} - e\varphi(\mathbf{r})\right)\,.$$

Пусть

$$F_0(v^2) \equiv \langle f_0 \rangle = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta d\mathbf{r} f_0(\mathbf{r} + \xi,\, v)\,,$$

где $F_0(v^2)$ — заданная функция. Тогда

$$f_0(\mathbf{r}, v) = \frac{1}{A}F_0\left(\frac{mv^2}{2} - e\varphi(\mathbf{r})\right)\,, \tag{A1}$$

где константа A определяется из условия квазинейтральности

$$\frac{1}{\Delta}\int_\Delta n_0(\xi)\,d\xi = N_0\,. \tag{A2}$$

Интегрируя (A1) по $d\mathbf{v}$, с учетом (A2) и явного вида $F_0(v^2)$ получаем формулы (6).

Литература

1. Электродинамика плазмы / Под ред. А.И.Ахиезера. М., 1974.
2. *Ситенко А.Г.* Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев, 1973.
3. *Власов А.А.* // ЖЭТФ. 1938. **8**, №2. С.291.
4. *Климонтович Ю.Л., Силин В.П.* // УФН. 1960. **70**. С.247.

Поступила в редакцию
13.11.96