Литература

1. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Минаев Д.В., Сычкова А.В.* // Радиотехн. и электроника. 1993. **38**, № 5. С. 804.
2. *Боголюбов А.Н., Минаев Д.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. № 2. С. 67 (Moscow University Phys. Bull. 1993. N 2. P. 63).
3. *Nelder J.A., Mead R.* // Computer J. 1964. **7**. P. 172.

Поступила в редакцию
05.02.97

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.3.09:621.373.1

КОНКУРЕНЦИЯ ПРОЦЕССОВ САМОЛОКАЛИЗАЦИИ И ДЕЛОКАЛИЗАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ РЕШЕТКЕ

А. П. Сухоруков, А. В. Чурилова

(кафедра радиофизики)

Рассматривается эволюция колебаний в двумерных решетках с кубической нелинейностью вблизи седловой точки дисперсионной поверхности. С помощью двух найденных первых интегралов получено строгое аналитическое решение связанных нелинейных дифференциальных уравнений для ширин области возбуждения, описывающих процессы самолокализации и делокализации в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Установлены основные закономерности пространственной динамики колебаний в зависимости от соотношения нелинейных и дисперсионных свойств системы.

Введение

Анализу динамических процессов при формировании двумерных нелинейных структур уделяется большое внимание в оптике, радиофизике, физике твердого тела, физике поверхностных волн и т. д. (см., напр., [1–4]). При этом особый интерес представляет изучение возбуждения решетки вблизи особых точек дисперсионной поверхности, где групповая скорость близка к нулю. Ранее нелинейная динамика рассматривалась в основном около экстремальных точек. При этом в рамках модели сплошной среды процессы самолокализации или делокализации описывалась $3D$-уравнениями типа НУШ [5]. В настоящей статье внимание уделяется сравнительно новому типу нелинейной динамики вблизи седловой точки дисперсионной поверхности. Здесь вдоль одного направления развивается самолокализация, а в перпендикулярном — делокализация нелинейных колебаний. В соответствии с этим эволюционное уравнение для колебаний принимает принципиально другой вид: вторые производные по пространственным координатам, описывающие диффузию комплексной амплитуды в плоскости решетки, входят с разными знаками, а не с одним, как в НУШ. Нами выведена пара связанных нелинейных дифференциальных уравнений для ширин области возбуждения и получены строгое аналитическое и численное решения этих уравнений.

1. Эволюционные уравнения двумерных нелинейных колебаний

Рассмотрим двумерную решетку, составленную из контуров с резонансной частотой ω_0 и коэффициентом связи χ. Дисперсионное уравнение для колебаний такой системы имеет следующий вид [5]:

$$\cos\Phi_x + \cos\Phi_y = (\omega_0^2 - \omega^2)/(2\chi\omega^2)\,, \qquad (1)$$

где Φ_x и Φ_y — набеги фазы на ячейку вдоль осей x и y соответственно. Из анализа (1) следует, что на частоте $\omega = \omega_0$ дисперсионная поверхность имеет четыре особые точки типа седла при $\Phi_x = \pm\pi$, $\Phi_y = 0$, и $\Phi_x = 0$, $\Phi_y = \pm\pi$.

Пусть решетка колеблется на частоте, близкой к ω_0, с быстрой пространственной фазовой модуляцией, например, вдоль оси x: $\Phi_x = \pi$, $\Phi_y = 0$. В рамках модели сплошной среды с кубической нелинейностью можно получить уравнение для комплексной амплитуды колебаний [5] в виде

$$i\frac{\partial A}{\partial \theta} + D\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) + \delta A + \gamma |A^2| A = 0\,, \qquad (2)$$

где $\theta = \omega_0 t$ — безразмерное время, $D = \chi l^2/2$ — коэффициент диффузии, l — расстояние между соседними контурами, $\delta = (\omega_0 - \omega)/\omega_0$ — отстройка частоты, γ — коэффициент нелинейности. Если $\gamma D > 0$, то область возбуждения стремится уменьшиться вдоль оси x (самолокализация) и возрасти вдоль оси y (делокализация). При $\gamma D < 0$ оси меняются ролями.

По аналогии с методом безаберрационного описания самофокусировки [6] представим область колебаний в виде гауссовского распределения амплитуды с квадратичной фазовой модуляцией:

$$A = \left(E_0 \Big/ \sqrt{f_x f_y}\right) \exp\left(-x^2/(a_o^2 f_x^2) - y^2/(a_0^2 f_y^2) - i\Psi\right)\,, \qquad (3)$$

где фаза $\Psi = f_x' x^2/(4Df_y) - f_y' y^2/(4Df_y) + \varphi(t)$, а f_x и f_y — безразмерные ширины области возбуждения, меняющиеся во времени. Подставляя (3) в (2) и следуя стандартной методике [6], можно найти систему двух уравнений:

$$f_x'' = 1/f_x^3 - \alpha/(f_x^2 f_y)\,, \quad f_y'' = 1/f_y^3 + \alpha/(f_x f_y^2)\,, \tag{4}$$

где дифференцирование ведется по нормированному времени $\tau = \theta/t_d$, $t_d = 4D/a_0^2$ — безразмерное время дисперсионного расплывания, a_0 — начальный радиус области возбуждения, $\alpha = (\gamma E_0^2 a_0^2)/(4D)$ — параметр нелинейности. Система (4) имеет первые интегралы

$$H = (f_x')^2 - (f_y')^2 + 1/f_x^2 - 1/f_y^2 - 2\alpha/(f_x f_y)\,, \tag{5}$$

$$I = f_x^2 - f_y^2 + 2\alpha\tau^2 + \beta\tau\,. \tag{6}$$

Здесь H — гамильтониан системы.

Рассмотрим далее эволюцию симметричного начального возбуждения решетки без фазовой модуляции, полагая $f_x(0) = f_y(0) = 1$, $f_x'(0) = f_y'(0) = 0$ и, следовательно, $I = 0$, $\beta = 0$. Результаты численного решения уравнений (4) при $\alpha = 100$ представлены на рис. 1. Видно, что сначала ширина вдоль оси x уменьшается (происходит самолокализация), а вдоль оси y возрастает (развивается делокализация). Затем после прохождения «фокуса» наблюдается нелинейное расплывание по обоим направлениям. Однако для данного случая можно получить строгое аналитическое решение.

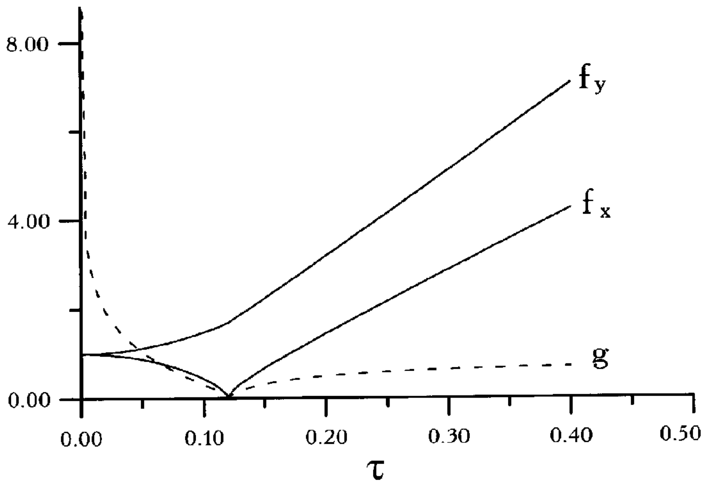

Рис. 1. Зависимость ширин области возбуждения f_x и f_y от времени. Пунктиром изображен график вспомогательной функции $g(\tau)$

2. Точное аналитическое решение уравнений для ширин области колебаний

Для начального возбуждения в виде круговой области $I = 0$, $\beta = 0$. В этом случае (6) преобразуется к более простому виду:

$$f_y^2 - f_x^2 = 2\alpha\tau^2\,. \tag{7}$$

Теперь ширины выразим через вспомогательную функцию $g(\tau)$:

$$f_x = (2\alpha)^{1/2}\tau\,\mathrm{sh}\,g\,, \quad f_y = (2\alpha)^{1/2}\tau\,\mathrm{ch}\,g\,. \tag{8}$$

При этом соотношение (7) выполняется тождественно. Подставляя (8) в (5), находим уравнение для $g(\tau)$ с разделяющимися переменными:

$$\frac{\alpha\,\mathrm{sh}(2g)dg}{(\alpha\,\mathrm{sh}(2g) - 1)^{1/2}} = \mp\frac{d\tau}{\tau^2}\,. \tag{9}$$

Здесь знак минус соответствует начальному убыванию функции g, а знак плюс — последующему ее росту (см. рис. 1). Интегрируя (9), получим

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[4]{1+\alpha^2} + 1/\sqrt[4]{1+\alpha^2}\right)F(\beta, r) - \\ &-2\sqrt[4]{1+\alpha^2}E(\beta, r) + \left(2\alpha\,\mathrm{ch}(2g)\sqrt{\alpha\,\mathrm{sh}(2g) - 1}\right)\Big/ \\ &\Big/\left(\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha\,\mathrm{sh}(2g) - 1\right) = 2/\tau\,,\end{aligned} \tag{10}$$

где $F(\beta, r)$ и $E(\beta, r)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [7],

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{1+\alpha^2} - 1\right)\Big/\left(2\sqrt{1+\alpha^2}\right)}\,,$$

$$\begin{aligned}\beta = \arccos\Big(&\left(\sqrt{1+\alpha^2} + 1 - \alpha\,\mathrm{sh}(2g)\right)\Big/ \\ &\Big/\left(\sqrt{1+\alpha^2} - 1 + \alpha\,\mathrm{sh}(2g)\right)\Big)\,.\end{aligned}$$

Проанализируем поведение функции $g(\tau)$, график которой представлен на рис. 1. В начальный момент времени $\tau = 0$ имеем $g \to \infty$. Затем значение функции падает и достигает минимума при τ_0. Используя (7) и (8), можно показать, что в точке минимума вспомогательной функции касательные к кривым f_x, f_y проходят через начало координат: $f_x' = f_x/\tau_0$, $f_y' = f_y/\tau_0$. В этой же точке τ_0 нетрудно получить точные аналитические выражения для ширин области возбуждения: $f_x = \tau_0\Big/\sqrt{\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}}$, $f_y = \tau_0\Big/\sqrt{\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}}$. Если нелинейность велика: $\alpha \gg 1$, то примерно в тот же момент времени $\tau_{\min} \approx \tau_0$ достигает минимального значения ширина области возбуждения вдоль оси x (направления самолокализации). Из (10) можно получить следующие простые выражения: $\tau_0 \approx \tau_{\min} = 1,18/\sqrt{\alpha}$, $f_x(\tau_{\min}) = 0,83/\alpha$, $f_y(\tau_{\min}) = 1,668$, что с хорошей точностью подтверждается данными численных расчетов.

На рис. 2 представлены зависимости минимальной ширины $f_{x\,\min}$ и соответствующего этой точке значения $f_y(\tau_{\min})$ от параметра нелинейности α. Видно, что на больших временах наблюдения $\tau \to \infty$ эти функции стремятся к постоянным значениям, которые в принципе можно найти из неявных выражений типа (10).

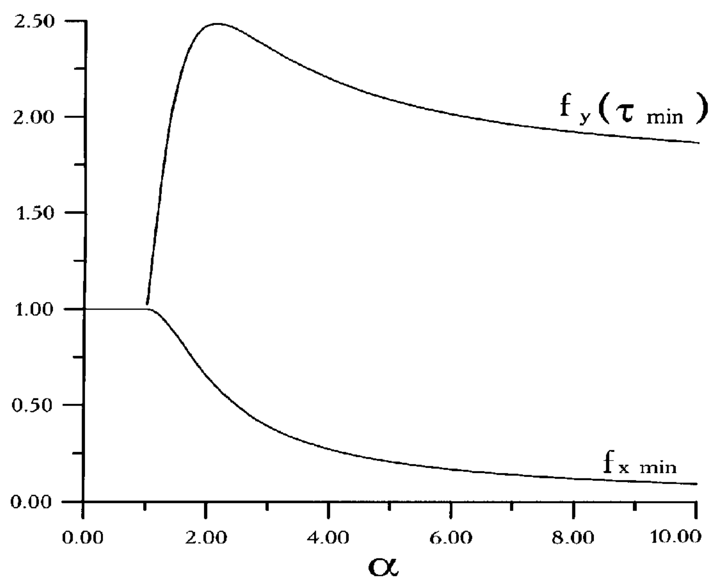

Рис. 2. Зависимости минимальной ширины области возбуждения вдоль оси самолокализации $f_{x\,\min}$ и соответствующего этому же моменту времени значения ширины вдоль перпендикулярного направления $f_y(\tau_{\min})$ от параметра нелинейности α

Заключение

Таким образом, в работе исследована конкуренция процессов самолокализации и делокализации нелинейных колебаний двумерной решетки в двух взаимно перпендикулярных направлениях на частоте, близкой к седловой точке дисперсионной поверхности. Найдены точные аналитические решения двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений для ширин области возбуждения по двум осям. Результаты аналитических расчетов подтверждаются и дополняются данными численного моделирования. В частности, получены формулы для минимальной ширины и времени самокомпрессии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-18592) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 95-0-2.2-76).

Литература

1. *Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д.* Устойчивость структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький, 1989.
2. *Pouget J., Remoissenet M., Tamga J.M.* // Phys. Rev. 1993. **B47**, № 22. P. 14866.
3. *Rainer Scharf, Bishop A.R.* // Phys. Rev. 1991. **A43**, № 12. P. 6535.
4. *Ведерко А. В., Дубровская О. Б., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 3. С. 4 (Moscow University Phys. Bull. 1992. № 3. P. 5).
5. *Сухоруков А. П., Чурилова А. В.* // Изв. РАН, сер. физ. 1996. **60**, № 12. С. 80.
6. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М., 1990.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступила в редакцию
09.12.96

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 577.346

ПРИРОДА НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ПИКА ТЕРМОГРАММ ЗАМЕДЛЕННОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ ЛИСТЬЕВ

А. В. Гущин, А. К. Кукушкин

(кафедра биофизики)

Исследована связь между термограммами замедленной флуоресценции (ЗФ) и кривыми термолюминесценции (ТЛ) листьев высших растений. Показано, что низкотемпературный пик полосы *A* кривой ТЛ и первый пик термограмм ЗФ имеют одну природу.

Для исследования температурной зависимости активности фотосинтетического аппарата наряду с изучением термолюминесценции часто используют так называемый метод термограмм, основанный на регистрации флуоресценции (быстрой, замедленной) при непрерывном нагревании образца после предварительного охлаждения. Изучению термограмм быстрой флуоресценции и термолюминесценции (ТЛ) посвящено большое количество работ [1–3] и обзоров [4, 5]. Термограммы замедленной флуоресценции (ЗФ) исследованы намного меньше, а максимумы на термограммах ЗФ объясняются только на качественном уровне [6]. Поэтому нашей задачей было изучение низкотемпературного пика термограмм ЗФ с использованием данных по ЗФ и ТЛ.