Литература

1. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М., 1985.
2. *Корниенко А. Г., Тернов И. М., Френкин А. Р., Чижов Г. А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. N 4. P. 1).
3. *Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
4. *Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.* // УФН. 1994. **164**, № 2. С. 121.
5. *Халилов В. Р., Чижов Г. А.* Динамика классических систем: Учеб. пособие. М., 1993.
6. *Гостев В. Б., Френкин А. Р.* // ТМФ. 1991. **88**, № 1. С. 37.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М., 1967.

Поступила в редакцию
12.02.97

УДК 519.6:512.394:621.372.8

НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ РЕДУКЦИЕЙ К ЗАДАЧЕ КОШИ

В. П. Моденов

(кафедра математики)

Рассматривается алгоритм нахождения обратных функций и его применение к решению характеристических уравнений математической физики.

Корректность математической постановки задачи Коши (существование, единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части дифференциального уравнения), а также большой арсенал приближенных аналитических и численных методов (Эйлера, Рунге–Кутта, Адамса, Крылова и др.) делают актуальной проблему разработки алгоритмов редукции к задаче Коши широкого класса задач математической физики.

1. Рассмотрим *алгоритм нахождения обратной функции* для случая, *когда исходная функция явно задана аналитически.*

Теорема о производной обратной функции [1] позволяет сформулировать достаточно простой и эффективный алгоритм решения задачи определения этой функции, основанный на сведении ее к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Пусть функция

$$y = y(x), \qquad x \in X, \quad y \in Y$$

при $x = x_0$ принимает значение $y = y_0$, имеет производную

$$y'(x) \neq 0, \qquad x \in X,$$

и удовлетворяет дифференциально-полиномиальному свойству (ДП-свойству) [2]:

$$y'(x) = P[y(x)] = a_0(x) + a_1(x)y(x) + \ldots + a_n(x)y^n(x)\,.$$

Тогда существует однозначная непрерывная обратная функция

$$x = x(y), \qquad y \in Y,$$

которая является решением задачи Коши

$$dx/dy = R(x,y), \qquad x(y_0) = x_0,$$

где правая часть дифференциального уравнения

$$R(x,y) = 1/P[y(x)]$$

— рациональная алгебраическая функция переменных x и y.

Заметим, что ДП-свойство может быть заменено более общим дифференциально-алгебраическим свойством (ДА-свойством)

$$y'(x) = G(x,y),$$

где G — алгебраическая функция x и y. Алгоритм обобщается также на случай аналитических функций комплексных переменных.

Проиллюстрируем его на примерах.

2. *Задача нахождения функции $x = x(y)$, обратной гиперболическому тангенсу,*

$$y = \operatorname{th} x, \qquad (-\infty < x < +\infty, \ -1 < y < 1),$$

в силу ДП-свойства

$$(\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

редуцируется к задаче Коши

$$dx/dy = 1/(1-y^2), \qquad x(0) = 0,$$

решением которой на множестве $-1 < y < 1$ является функция

$$x = \operatorname{Arth} y = (1/2)\ln[(1+y)/(1-y)].$$

3. *Решение характеристического уравнения, определяющего невырожденный спектр собственных значений третьей краевой задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя*

$$\lambda J_n'(\lambda) + hJ_n(\lambda) = 0,$$

где $J_n(\lambda)$ — функция Бесселя n-го порядка, сводится к задаче нахождения функции $\lambda = \lambda(h)$, обратной для функции

$$h = -\lambda J_n'(\lambda)/J_n(\lambda),$$

удовлетворяющей в силу уравнений Бесселя ДП-свойству

$$h' = h^2/\lambda + (\lambda^2 - n^2)/\lambda.$$

Следовательно, данная задача редуцируется к задаче Коши

$$d\lambda/dh = \lambda/(h^2 + \lambda^2 - n^2), \qquad \lambda(0) = \nu,$$

где ν — нули производной $J_n'(\nu)$.

В частности, при $|h| \ll 1$, $\nu \gg n$ по формуле Тейлора имеем асимптотическое представление

$$\lambda \simeq \nu + h/\nu.$$

4. Рассмотрим *задачу вычисления простых корней характеристического уравнения*

$$w_1'(t) - q w_1(t) = 0,$$

содержащего первую функцию Эйри [3].

Нахождение функции $t = t(q)$, удовлетворяющей этому уравнению, сводится к задаче определения функции, обратной

$$q = F(t) = w_1'(t)/w_1(t),$$

для которой в силу уравнения Эйри

$$w_1''(t) - t w_1(t) = 0$$

выполняется ДП-свойство

$$F'(t) = t - F^2(t).$$

Применяя рассматриваемый алгоритм, редуцируем данную задачу к задаче Коши для уравнения Риккати

$$dt/dq = 1/(t - q^2), \qquad t(0) = t_n,$$

где t_n — нули производной $w_1'(t_n)$.

5. *Случай нахождения обратной функции, когда исходная функция задана неявно*, может быть рассмотрен аналогично [4].

Пусть, например, функция $y = y(x)$ неявно задана уравнением

$$F[y(x)] = G[x,\, y(x)],$$

где F — трансцендентная функция, удовлетворяющая ДП (или ДА) свойству, а G — алгебраическая функция, и известно решение этого уравнения

$$F(y_0) = G(x_0,\, y_0).$$

Тогда, если существует обратная функция $x = x(y)$ и выполнены условия теоремы о производной неявно заданной функции [1], то задача о нахождении этой обратной функции редуцируется к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, с алгебраической правой частью:

$$dx/dy = R(x,y), \qquad x(y_0) = x_0,$$

6. В качестве иллюстрации предлагаемого алгоритма рассмотрим *задачу об определении толщины d диэлектрического слоистого волновода по известной (измеренной) комплексной постоянной распространения β* ТЕ-мод этого волновода.

Как известно [5], уравнение, связывающее постоянную распространения ТЕ-моды с толщиной волновода, является трансцендентным и имеет вид

$$\operatorname{tg} \varkappa d = \varkappa(\gamma + \theta)/(\varkappa^2 - \gamma\theta),$$

где

$$\varkappa^2 = k^2\varepsilon_1 - \beta^2, \qquad \gamma^2 = \beta^2 - k^2\varepsilon_2, \qquad \theta^2 = \beta^2 - k^2\varepsilon_3,$$

$$k^2 = \omega^2/c^2, \qquad \operatorname{Re}\varepsilon_1 > \operatorname{Re}\varepsilon_3 \geqslant \operatorname{Re}\varepsilon_2,$$

c — скорость света в вакууме, ω — циклическая частота установившихся электромагнитных колебаний, ε_1 — комплексная диэлектрическая проницаемость диэлектрического слоистого волновода, ε_2 и ε_3 — комплексные диэлектрические проницаемости полубесконечной среды соответственно над волноведущим слоем и под ним.

Заменяя уравнение ему эквивалентным:

$$\operatorname{tg} y(x) = G[x,\, y(x)],$$

где

$$x = 1/kd, \quad y = \varkappa d,$$

$$\widehat{\gamma}^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - y^2x^2, \quad \widehat{\theta}^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - y^2x^2,$$

$$G(x,y) = yx(\widehat{\gamma} + \widehat{\theta})/(y^2x^2 - \widehat{\gamma}\widehat{\theta}),$$

редуцируем полученное уравнение к следующей задаче Коши:

$$dx/dy = (1 + G^2 - G_y')/G_x', \qquad x(\pi n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Численное решение этой задачи проводилось в комплексной плоскости для различных структур типа воздух–полимер–металл (В/П/М). При расчете значения диэлектрических проницамостей воздуха (В) и полимерной пленки (П) были приняты соответственно равными 1 и 2,523. Диэлектрические проницаемости металлического слоя (М) принимались равными: $-16,32 - i \cdot 0,5414$ для серебра (Ag); $-39,88 - i \cdot 15,56$ для алюминия (Al); $-10,28 - i \cdot 1,04$ для золота (Au). Данные значения диэлектрических проницаемостей соответствуют длине волны, равной 6330Å. Металлический слой считаем полубесконечным.

В таблице приведены посчитанные значения kd, соответствующие измеренным значениям [5] комплексных постоянных распространения β/k. В пределах точности счета полученные результаты соответствуют [5].

Структура	Мода	$(\mathrm{Re}\beta/k)_{\mathrm{exp}}$	$(\mathrm{Im}\beta/k)_{\mathrm{exp}}\cdot 10^7$	kd
В/П/Ag	TE_0	1,584	11	26
В/П/Al	TE_0	1,588	30	59
В/П/Au	TE_0	1,588	4	72

В заключение отметим, что данный алгоритм оказывается особенно удобным при вычислении функций, обратных трансцендентным (в общем случае, комплексного аргумента), удовлетворяющим ДП (или ДА) свойству, так как алгоритм не требует при его реализации вычисления этих функций и их производных.

Алгоритм может быть использован в решении обратных задач идентификации геометрических и физических параметров по известным спектральным характеристикам.

Литература

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М., 1965.
2. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**, № 3. С 536.
3. *Крылов Г.Н.* // Проблемы дифракции и распространения волн. Л., 1985. № 19. С 174.
4. *Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. матем. и киберн. 1983. № 2. С 62.
5. *Kaminov I.P., Mammel W.L., Weber H.P.* // Appl. Opt. 1974. **13**. P 396.

Поступила в редакцию
03.03.97