РАДИОФИЗИКА

УДК 621.3.09:621.373.1

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ ЭКРАНИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ С КЕРРОВСКИМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

А. Ф. Александров, В. А. Кубарев

(кафедра физической электроники)

Рассматривается распространение электромагнитных волн в волноводах с полным или частичным заполнением средой керровского типа с положительной нелинейностью. Получены дисперсионные соотношения, изучены дисперсионные характеристики. Показано, что зависимость замедления волны от ее интенсивности имеет керровский характер с определенным эффективным коэффициентом нелинейности.

В последнее время возрастает интерес к вопросам распространения электромагнитных волн в пространственно неоднородных нелинейных средах [1–4]. При таком распространении в системах возникает множество эффектов различной физической природы, включая преобразование сигналов, мультистабильность, формирование солитонов и т. п. Определенную специфику эти процессы приобретают в СВЧ-диапазоне, где размеры неоднородности, как правило, порядка длины волны излучения. Например, вблизи критических частот нелинейных волноводов возможно возбуждение медленных и даже нераспространяющихся солитонов [5].

В работах по релятивистской СВЧ-электронике обсуждается использование нелинейных волноводов в качестве адаптивных замедляющих структур, в которых синхронизм волны с электронным потоком может длительно поддерживаться за счет ее замедления в процессе усиления [6]. В связи с этим необходим анализ дисперсионных свойств простейших типов таких волноводов, к которым относятся плоские экранированные волноводы с полным или частичным заполнением керровским диэлектриком (кубично-нелинейной средой) с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL}|E^2|$.

Полагаем, что волна типа H_{01} распространяется вдоль оси z, ось x направлена перпендикулярно проводящим электродам, расположенным на расстоянии $2a$, по оси y волновод однороден. Тогда отличны от нуля компоненты E_y электрического поля и H_x, H_z магнитного поля. Рассматривая самовоздействие волны, возможной генерацией гармоник будем пренебрегать.

1. При полном заполнении волновода керровским диэлектриком распределение поля описывается нелинейным уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} = \left(k^2 - \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)E_y\,, \tag{1}$$

где ω, k, c — частота, продольное волновое число волны и скорость света. Следует отметить, что для волн E-типа отличны от нуля по крайней мере две компоненты электрического поля и их описание существенно сложнее.

Будем использовать следующие безразмерные переменные: $X = x/a$, $(-1 \leqslant X \leqslant 1)$, $\Omega = \omega a/c$, $q = ka$, $E = E_y/E_0$, $E_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_{NL}}$ $(\varepsilon_{NL} > 0)$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_L + E^2$. В этих переменных уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{d^2E}{dX^2} = (q^2 - \varepsilon_L\Omega^2 - \Omega^2E^2)\,E\,. \tag{2}$$

Его решение можно записать через эллиптическую функцию Якоби $\mathrm{cn}(x|m)$ [7]:

$$\begin{aligned} E &= E_m\,\mathrm{cn}(X\sqrt{\varepsilon_L\Omega^2 + \Omega^2E_m^2 - q^2}|m)\,,\\ m &= \frac{\Omega^2E_m^2}{2(\varepsilon_L\Omega^2 + \Omega^2E_m^2 - q^2)}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где E_m — максимальная амплитуда поля (при $X = 0$), m — модуль $(0 \leqslant m \leqslant 1)$. Учитывая, что полупериод функции Якоби равен полному эллиптическому интегралу первого рода $K(m)$, из граничного условия на проводящей стенке волновода $(E(X = \pm1) = 0)$ получим нелинейное дисперсионное соотношение

$$\varepsilon_L\Omega^2 + \Omega^2E_m^2 - q^2 = K^2\left(\frac{\Omega^2E_m^2}{2(\varepsilon_L\Omega^2 + \Omega^2E_m^2 - q^2)}\right). \tag{4}$$

Очевидно, что в пределе слабых полей ($E_m \to 0$, $K(0) \to \pi/2$) оно переходит в дисперсионное уравнение для волновода с линейным диэлектриком.

Амплитуду электрического поля E_m естественно связать с погонной мощностью волны, распространяющейся в волноводе. Используя выражение для поперечного распределения поля (3) и вычисляя поток вектора Умова–Пойнтинга, для нормированной (на $P_0 = \dfrac{c}{4\pi}E_0^2a = \dfrac{ca}{4\pi\varepsilon_{NL}}$) погонной мощности получим

$$P = nE_m^2N\,, \quad n = \frac{q}{\Omega}\,, \quad N = \frac{1}{mK(m)}(E(m) - m_1K(m))\,, \tag{5}$$

где n — замедление волны, N — ее норма, $m_1 = 1 - m$ — дополнительный модуль, $E(m)$ — полный эллиптический интеграл второго рода [7].

Используя соотношения (3)–(5), зависимость замедления волны от ее мощности на фиксированной частоте Ω можно представить в параметрическом виде (параметр m):

$$\begin{aligned} n &\equiv \frac{q}{\Omega} = \sqrt{\varepsilon_L - \frac{(1-2m)K^2(m)}{\Omega^2}}\,,\\ P &= nE_m^2N\,, \quad E_m^2 = \frac{2mK^2(m)}{\Omega^2}\,,\\ N &= \frac{1}{mK(m)}(E(m) - m_1K(m))\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, изменяя в (6) m от 0 до 1, получим $n(P)$ при выбранной частоте волны (рис. 1). С увеличением мощности замедление монотонно возрастает от начального значения $n_0 = \sqrt{\varepsilon_L - \pi^2/(4\Omega^2)}$, причем на участке $P \ll 1$ — линейно:

$$n = n_0 + n_{2e}P\,, \quad n_{2e} = \frac{3}{4n_0^2}\,,$$

где n_{2e} — эффективный коэффициент нелинейности. В отличие от безграничной нелинейной среды, где $n = \sqrt{\varepsilon} = n_L + P/n_L^2$, $n_L = \sqrt{\varepsilon_L}$, в волноводе существует дисперсия эффективного коэффициента нелинейности, причем он возрастает вблизи критической частоты ($\Omega = \pi/2$, $n_0 \to 0$).

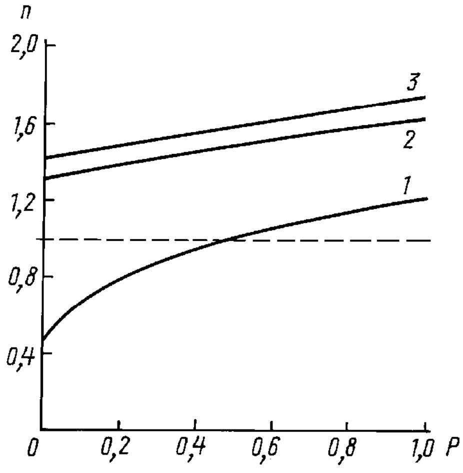

Рис. 1. Зависимость замедления волны n от ее нормированной мощности P в нелинейном волноводе с керровским диэлектриком при $\varepsilon_L = 2{,}25$ для $\Omega = 1{,}1$ (*1*); 2,1 (*2*) и 3,1 (*3*)

В соответствии с (3), (4) распределение поля описывается соотношением $E = E_m\,\mathrm{cn}(XK(m)|m)$; с ростом мощности происходит фокусировка волны к плоскости симметрии волновода ($X = 0$).

2. Волновод с частичным заполнением образован двумя пластинами толщиной d из керровского диэлектрика, расположенными на поверхностях проводящих экранов; зазор между ними шириной $2(a-d)$ будем считать вакуумным. В этом случае начало координат удобно поместить на поверхность одного из экранов, тогда в нормированных величинах $0 \leqslant X \leqslant X_d$, $X_d = d/a$ соответствует диэлектрику, а $X_d \leqslant X \leqslant 1$ — вакууму.

Решение нелинейного уравнения Гельмгольца (2) в диэлектрике можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
E = E_d \operatorname{sd}(Xq_d|m)\,, \\
E_d = \frac{\sqrt{S}}{q_d}\,, \qquad q_d = \sqrt[4]{\left(\varepsilon_L \Omega^2 - q^2\right)^2 + 2\Omega^2 S}\,, \\
m = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\varepsilon_L \Omega^2 - q^2)}{q_d^2}\right],
\end{gathered} \tag{7}
$$

где sd — эллиптическая функция Якоби [7], $S = (\partial E/\partial X|_{X=0})^2 > 0$ — константа, связанная с мощностью волны, q_d — поперечное волновое число в диэлектрике. В вакуумной части для рассматриваемой симметричной волны имеем

$$
E = E_v \operatorname{ch}(q_v(1-X))\,, \qquad q_v^2 = q^2 - \Omega^2\,, \tag{8}
$$

где E_v — поле в центре волновода, q_v — поперечное волновое число для области замедленных волн.

Сшивая решения (7), (8) на границе диэлектрика ($X = X_d$), получим дисперсионное уравнение

$$
q_d \frac{\operatorname{cn}(q_d X_d|m)}{\operatorname{sn}(q_d X_d|m)\operatorname{dn}(q_d X_d|m)} = -q_v \operatorname{th}(q_v(1-X_d)) \tag{9}
$$

и связь амплитуд поля в диэлектрике и вакууме:

$$
E_v = E_d \frac{\operatorname{sd}(q_d X_d|m)}{\operatorname{ch}(q_v(1-X_d))}\,. \tag{10}
$$

В области быстрых волн соответствующие соотношения получаются в результате очевидной замены $q_v \to i q_v$; при этом гиперболические функции заменяются на тригонометрические.

Вычисление погонной мощности волны с учетом распределения поля (7), (8), (10) дает

$$
\begin{aligned}
P &= n E_v^2 N\,, \\
N &= \frac{E_d^2}{E_v^2}\frac{1}{q_d m m_1}\left\{E(q_d X_d|m) - m_1 q_d X_d - \right. \\
&\qquad \left. - m\frac{\operatorname{sn}(q_d X_d|m)\operatorname{cn}(q_d X_d|m)}{\operatorname{dn}(q_d X_d|m)}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{(1-X_d) + \frac{1}{2q_v}\operatorname{sh}(2q_v(1-X_d))\right\}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Здесь первое слагаемое соответствует доле мощности, распространяющейся в диэлектрике, а второе — в вакууме.

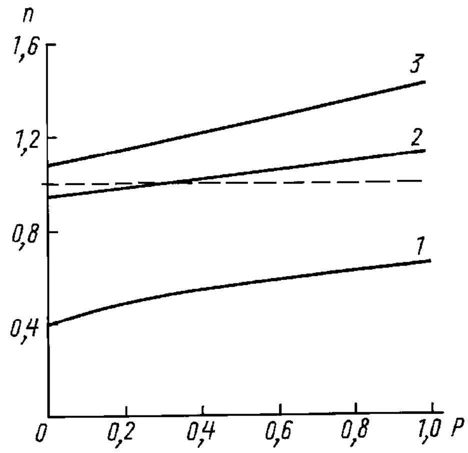

Рис. 2. Зависимость замедления волны n от ее нормированной мощности P в нелинейном волноводе с частичным заполнением керровским диэлектриком при $\varepsilon_L = 2{,}25$ $X_d = 0{,}5$ для $\Omega = 1{,}5$ (*1*); 2,5 (*2*) и 3,5 (*3*)

Зависимость замедления волны от мощности $n(P)$ при заданной толщине диэлектрика X_d и фиксированной частоте волны Ω можно получить путем численного решения дисперсионного уравнения (9) с учетом (7), изменяя волновое число q и находя соответствующее значение параметра S. После этого вычисляются замедление $n = q/\Omega$ и нормированная погонная мощность P (11). Соответствующие результаты представлены на рис. 2. Как и в волноводе со сплошным заполнением, можно, аналогично (6), ввести эффективный коэффициент нелинейности $n_{2e}(\Omega)$; определить его аналитически в данном случае затруднительно.

С точки зрения возможности использования рассмотренного волновода в качестве нелинейной замедляющей структуры представляет интерес также размерный коэффициент нелинейности n_2, определяющий изменение замедления волны ($n = n_0 + n_2 I_v$) при увеличении ее интенсивности ($I_v = c/(8\pi)\, n E_v^2 E_0^2$) в месте транспортировки электронного пучка — центре волновода:

$$
n_2 = n_{2e}\frac{8\pi N(0)}{c E_0^2} = n_{2e}\frac{8\pi N(0)}{c}\varepsilon_{NL}\,, \tag{12}
$$

где $N(0)$ — норма волны (11) при малых мощностях ($P \to 0$). Видно, что коэффициент n_2 равен коэффициенту нелинейности диэлектрика ε_{NL}, умноженному на определенный коэффициент заполнения, зависящий от геометрии волновода и частоты.

Таким образом, полученные дисперсионные соотношения позволяют исследовать характеристики нелинейных волноводов с полным и частичным заполнением керровским диэлектриком при любых уровнях мощности электромагнитной волны. Зависимость замедления от мощности при умеренных ее значениях близка к линейной с определенным эффективным коэффициентом нелинейности.

Литература

1. *Бойко Б.Б., Петров Н.С.* Отражение света от усиливающих и нелинейных сред. Минск, 1988.

2. *Кураев А.А., Слепян Г.И.* // Proc. 1989 URSI Int. Symp. Electromagnetic Theory. Sweden, Stockholm, 1989. P. 210.
3. *Хаджи П.И., Федоров Л.В.* // ЖТФ. 1991. **61**, № 5. С. 110.
4. *Bilbault J.M., Michaux B., Kennis P.* et al. // Proc. XXV URSI General Assembly. Franse, Lille, 1996. P. 35.
5. *Ведерко А.В., Дубровская О.Б., Марченко В.Ф., Сухоруков А.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 3. С. 4 (Moscow University Phys. Bull. 1992. N3. P.5).
6. *Кубарев В.А., Черепенин В.А.* // Радиотехн. и электроника. 1996. **41**. № 7. С. 861.
7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Поступила в редакцию
10.02.97