ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

3. Независимость, условные возможность и необходимость. Условный относительно σ-алгебры интеграл

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассмотрено понятие условного относительно заданной σ-алгебры интеграла по возможности, имеющего хорошо известный аналог в теории вероятностей.

Введение

Понятия условной вероятности и независимости, играющие важную роль в теории вероятностей, имеют прямые аналоги и в теории возможностей. Эти понятия рассматриваются в настоящей работе, которая является продолжением работ [1, 2]. Поскольку в теории возможностей независимость событий может быть охарактеризована как в терминах их возможностей, так и в терминах их необходимостей, рассмотрены три понятия независимости: по возможности (P-независимости), по необходимости (N-независимости) и полной независимости. Альтернативные характеристики связи событий определены как условная возможность и условная необходимость. В общем случае они могут быть многозначными функциями на σ-алгебре событий, позволяющими охарактеризовать связь возможностей и необходимостей в терминах соотношений $>$, $=$ или $<$.

В работе рассмотрено понятие условного относительно заданной σ-алгебры интеграла по возможности, имеющего хорошо известной аналог в теории вероятностей.

1. Независимость. Условные возможность и необходимость

Определение 1. Пусть $(X, \mathcal{A}, P)$— возможностное пространство [1]. События $A, B \in \mathcal{A}$ назовем P–независимыми (по возможности), если $P(A \cap B) = \min(P(A), P(B))$ $(= P(A) \bullet P(B)$ в полукольце $\mathcal{R}_{(p)})$.*)

В случае независимости A и B возможность $P(A \cap B)$ принимает максимальное значение, которое (как и $P(A \cup B)$) полностью определяется возможностями $P(A)$ и $P(B)$ [1].

Определение 2. Вариантом условной относительно события $B \in \mathcal{A}$ возможности события $A \in \mathcal{A}$ назовем любое решение $P(A|B)$ уравнения

$$\min(P(A|B), P(B)) = P(A \cap B), \quad A, B \in \mathcal{A}. \qquad (1)$$

Любые два решения $P(A|B)$ и $\tilde{P}(A|B)$ назовем эквивалентными; эквивалентность будем отмечать знаком равенства: $P(A|B) = \tilde{P}(A|B)$.

Условной относительно события $B \in \mathcal{A}$ возможностью события $A \in \mathcal{A}$ назовем класс (эквивалентности) всех ее вариантов; для условной возможности будем также использовать обозначение $P(A|B)$.

Уравнение (1) разрешимо относительно $P(A|B)$ при любых $A, B \in \mathcal{A}$, ибо $P(B) \geq P(A \cap B)$, $A, B \in \mathcal{A}$. Всякое его решение удовлетворяет условиям: для любых $A, B \in \mathcal{A}$: $P(A|B) = P(A \cap B)$, если $P(B) > P(A \cap B)$; $P(A|B) \geq P(A \cap B)$, если $P(B) = P(A \cap B)$. В последнем случае события A и B независимы, так как $P(B) = P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)) \leq P(B)$, причем $P(A|B)$, как и $P(A)$, не меньше $P(B)$.

Среди решений уравнения (1) имеются удовлетворяющие условиям $P(A \cup B|C) = \max(P(A|C), P(B|C))$, $P(A \cap B|C) \leq \min(P(A|C), P(B|C))$, $P(X|C) = 1$, позволяющим считать их возможностью на $\mathcal{A}$ (параметрически зависящей от $B \in \mathcal{A}$ в (1)). Такими решениями, удовлетворяющими перечисленным условиям и инвариантными относительно любой монотонно возрастающей биекции $[0,1] \to [0,1]$, являются, например, $P(A|B) = P(A \cap B)$, $A \in \mathcal{A}$, а также

$$P(A|B) = \begin{cases} P(A \cap B), & \text{если } P(B) > P(A \cap B), \\ 1, & \text{если } P(B) = P(A \cap B), \end{cases} \quad A \in \mathcal{A}. \qquad (2)$$

Замечание. Поскольку при условии $P(B) = P(A \cap B)$ события A и B независимы, кажется естественным в этом случае определить $P(A|B) = P(A)$. Однако так определенный вариант условной возможности в отличие, например, от (2), вообще говоря, не аддитивен. Действительно, пусть события A, B и C таковы, что $P(A) > P(B) > P(\emptyset)$, $P(C) > P(\emptyset)$, $P(B \cap C) = P(C)$, $A \cap C = \emptyset$. Тогда $P(A|C) = P(A \cap C) = P(\emptyset)$, $P(B|C) = P(B)$, $P(A \cup B|C) = P(A \cup B) = \max(P(A), P(B)) = P(A) \neq \max(P(A|C), P(B|C)) = P(B)$.

В связи с понятием условной возможности естественно рассмотреть другое определение независимости; отметим его звездочкой.

Определение 1*. Событие A назовем P-независимым* от B, если существует вариант условной возможности $P(A|B) = P(A)$; события A и B

*) Часто используется термин «невзаимодействующие» события [3].

назовем P-независимыми*, если A P-не зависит* от B и B P-не зависит* от A.

Лемма 1. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *Событие A P-независимо* от B,* 2) *A и B P-независимы*,* 3) *A и B P-независимы.*

Доказательство. Действительно, пусть событие A P-независимо* от B. Тогда $P(A \cap B) = \min(P(A|B), P(B)) = \min(P(A), P(B))$, т.е. A и B P-независимы (утверждение 1) $\Rightarrow$ 3)). Если же $P(A \cap B) = \min(P(A), P(B))$, то существуют как вариант $P(A|B) = P(A)$, так и вариант $P(B|A) = P(B)$, ибо в этом случае $\min(P(A|B), P(B)) = \min(P(A), P(B))) = \min(P(B|A), P(A))$, т.е. A и B P-независимы* (утверждение 3) $\Rightarrow$ 2)). Импликация утверждения 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна. ■

Интуитивные представления о независимости события A от B, согласно которым возможность A не зависит от того, имеет место B или нет, согласуются с формальными определениями. Действительно, пусть A и B P-независимы, $P(A \cap B) = \min(P(A), P(B))$, причем $P(B) > P(A)$. Тогда $P(A|B) = P(A \cap B) = P(A)$, возможность A не зависит от истинности B, или, иначе говоря, возможности $A \subset X$ и $A \cap B \subset B$ равны.

Вместе с тем $P(B|A) \geq P(A \cap B)$ и может быть выбран вариант условной возможности, равный $P(B) > P(A \cap B)$.

С другой стороны, A и B зависимы, если и только если $P(A) > P(A \cap B)$, $P(B) > P(A \cap B)$, и в этом случае $P(A) > P(A|B) = P(A \cap B) = P(B|A) < P(B)$. Зависимость непременно приводит к уменьшению возможности: $P(A) = P(A|X) > P(A|B)$, что обусловлено уменьшением множества альтернатив, сопутствующим замене $A \to A \cap B$ при условии B.

Что касается свойств условной возможности, отметим, что так как*) $P(A|B \cap C) \bullet P(B \cap C) = P(A|B \cap C) \bullet P(B|C) \bullet P(C) = P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B|C) \bullet P(C)$, то $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C) \bullet P(B|C)$. Приведем также аналог формулы полной вероятности — формулу полной возможности. Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, тогда

$$P(A) = P(A \cap X) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)) = \mathop{\Large +}_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) =$$

$$= \mathop{\Large +}_{n=1}^{\infty} (\min(P(A|B_n), P(B_n)) = \mathop{\Large +}_{n=1}^{\infty} \left(P(A|B_n) \bullet P(B_n)\right),$$
$$A \in \mathcal{A}. \tag{3}$$

Определение 3. Пусть $f_A(\cdot), f_B(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ — характеристические функции (х.ф.) нечетких событий A и B соответственно. Последние назовем P-независимыми, если $p(f_A \bullet f_B(\cdot)) = p(f_A(\cdot)) \bullet p(f_B(\cdot))$. Вариантом условной относительно нечеткого события B возможности нечеткого события A назовем любое решение $p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot))$ уравнения

$$\min p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot)), p(f_B(\cdot)) = p(f_A \bullet f_B(\cdot)), \quad f_A(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \tag{4}$$

Любые два решения уравнения (4) назовем эквивалентными, факт эквивалентности будем отмечать знаком равенства; класс эквивалентности решений уравнения (4) назовем условной относительно нечеткого события B возможностью нечеткого события A.

В данном случае $p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot)) = p(f_A \bullet f_B(\cdot))$, если $p(f_B(\cdot)) > p(f_A \bullet f_B(\cdot))$; $p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot)) \geq p(f_A \bullet f_B(\cdot))$, если $p(f_B(\cdot)) = p(f_A \bullet f_B(\cdot))$.

Для нечетких событий так же как в определении 1* вводится понятие независимости*, при этом выполняется дословный аналог леммы 1. В частности, нечеткое событие A P-независимо от B, если существует вариант условной возможности, для которого $p(f_A(\cdot) \mid f_B(\cdot)) = p(f_A(\cdot))$. Другое понятие условной возможности рассмотрено в работе [4].

Рассмотрим понятие независимости с точки зрения необходимости [2].

Определение 1′. События $A, B \in \mathcal{A}$ назовем N-независимыми, если**) $N(A \cup B) = \max(N(A), N(B))$ ($= N(A) \bullet N(B)$ в полукольце $\mathcal{R}_{(n)}$).

Определение 2′. Вариантом условной относительно события $B \in \mathcal{A}$ необходимости события $A \in \mathcal{A}$ назовем любое решение $N(A|B)$ уравнения $\max(N(A|B), N(B)) = N(A \cup B)$, $A, B \in \mathcal{A}$. Любые его решения удовлетворяют условиям

$$N(A|B) \begin{cases} = N(A \cup B), \text{ если } N(B) < N(A \cup B), \\ \leq N(A \cup B), \text{ если } N(B) = N(A \cup B), \end{cases} \quad A, B \in \mathcal{A}$$

и считаются эквивалентными; эквивалентность будем отмечать знаком равенства. Класс (эквивалентности) всех решений назовем условной необходимостью и, как любое решение, обозначим $N(A|B)$.

Определение 1′*. Событие A назовем N-независимым* от B, если существует вариант условной необходимости $N(A|B) = N(A)$; события A и B назовем N-независимыми*, если A N-независимо от B и B N-независимо* от A.

Имеет место двойственный аналог леммы 1.

Лемма 1′. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *событие A N-независимо* от B;* 2) *A и B N-независимы*;* 3) *A и B N-независимы.*

Доказательство леммы 1′ и содержательная интерпретация N-независимости и условной необходимости могут быть получены на основе доказательства леммы 1 и соответственно на основе интерпретации P-независимости и условной возможности, если учесть, что условия $N(A \cup B) = \max(N(A), N(B))$, $N(A \cup B) = \max(N(A|B), N(B))$ эквивалентны соответственно $P((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \min(P(X \setminus A), P(X \setminus B))$, $P((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \min(P(X \setminus A|X \setminus B), P(X \setminus B))$. ■

Иначе говоря, N-независимость A и B эквивалентна P-независимости $X \setminus A$ и $X \setminus B$, а $N(A|B) = \neg P(X \setminus A|X \setminus B)$.

Среди свойств условной необходимости выделим формулу полной необходимости, двойственную форму-

*) Операции умножения «$\bullet$» и сложения «$\mathop{\Large +}$» в полукольце $\mathcal{R}_{(p)}$ определены соответственно как «min» и «max».

**) В полукольце $\mathcal{R}_{(n)}$ «$\bullet$»$\sim$«max», «$\mathop{\Large +}$»$\sim$«min» [2].

ле полной возможности (3). Пусть $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \varnothing$ и A — любое событие. Поскольку $A = A \cup (\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} (A \cup A_j)$, то согласно определениям операций сложения и умножения в полукольце $\mathcal{R}_{(n)}$ [2]

$$N(A) = \inf_j N(A \cup A_j) = \mathop{\textstyle+}_{j=1}^{\infty} (N(A|A_j) \bullet N(A_j)),\ A \in \mathcal{A}.$$

Определение 3$'$. Пусть $g_A(\cdot), g_B(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ — х.ф. нечетких событий A и B соответственно. Последние назовем N-независимыми, если $n(g_A \bullet g_B(\cdot)) = n(g_A(\cdot)) \bullet n(g_B(\cdot))$.

Вариантом условной относительно нечеткого события B необходимости $n(g_A(\cdot)|g_B(\cdot))$ нечеткого события A назовем любое решение уравнения $\max(n(g_A(\cdot)|g_B(\cdot)), n(g_B(\cdot))) = n(g_A \bullet g_B(\cdot))$, $g_A(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$. Как и выше, условной необходимостью назовем класс всех ее вариантов.

Для нечетких событий, как в определении 1*, вводится понятие N-независимости*, при этом выполняется аналог леммы 1.

Определение 4. События A и B назовем вполне независимыми, если они P- и N-независимы.

События A и B вполне независимы, если и только если как A и B, так и $X \setminus A$ и $X \setminus B$ P-независимы (или N-независимы).

2. Условный относительно σ-алгебры интеграл по возможности

Условный относительно σ-алгебры интеграл по возможности является аналогом условного относительно σ -алгебры математического ожидания в теории вероятностей. Пусть $(X, \mathcal{A}, P)$ — возможностное пространство, $p(f(\cdot))$ — интеграл $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ по возможности P и $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$ [2].

Определение 5. Класс $\mathcal{C}$-измеримых функций $p(f(\cdot) \mid \mathcal{C})(x)$, $x \in X$, принимающих значения в $([0,1], \mathcal{B})$, назовем условным относительно $\mathcal{C}$ интегралом $f(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, если для любого события $C \in \mathcal{C}$

$$p((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = p((p(f(\cdot) \mid \mathcal{C}) \bullet \chi_C)(\cdot)). \qquad (5)$$

Каждую функцию $p(f(\cdot)|\mathcal{C})(\cdot)$, удовлетворяющую уравнению (5) при любом $C \in \mathcal{C}$, назовем вариантом условного относительно $\mathcal{C}$ интеграла $f(\cdot)$. Условный интеграл и каждый его вариант будем обозначать одинаково посредством $p(f(\cdot)|\mathcal{C})(\cdot)$.

Условный интеграл $p(\chi_A(\cdot) \mid \mathcal{C})(x)$, $x \in X$, назовем условной относительно σ-алгебры $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ возможностью события $A \in \mathcal{A}$ и обозначим $P(A \mid \mathcal{C})(x)$, $x \in X$, равно как и каждый ее вариант. Соответственно $p(f(\cdot)|C)(\cdot)$ назовем условной относительно C возможностью нечеткого события с х. ф. $f(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Пусть $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ — $\mathcal{A}$-измеримое разбиение X, т.е. $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots$, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_j$, и $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{D})$ — минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{D}$. Всякая $\mathcal{C}$-измеримая функция, в том числе и $p(f(\cdot) \mid \mathcal{C})(\cdot)$, принимает постоянные значения на A_i, $i = 1,2,\ldots$, поэтому в данном случае

$$p(f(\cdot) \mid \mathcal{C})(x) = \mathop{\textstyle+}_{j=1}^{\infty} \left(p_j(f(\cdot)) \bullet \chi_{A_j}(x)\right),\quad x \in X, \qquad (6)$$

где коэффициенты $p_j(f(\cdot))$, $j = 1,2,\ldots$, в силу равенств (5) и (6) при $C = A_k$ (и линейности $p(\cdot)$) подчинены условию $p((f \bullet \chi_{A_k})(\cdot)) = p_k(f(\cdot)) \bullet P(A_k)$, $k = 1,2,\ldots$ Иначе говоря, $p_k(f(\cdot))$ — условная относительно события A_k возможность нечеткого события с х.ф. $f(\cdot)$ (см. определение 3). В частности, для $f(\cdot) = \chi_A(\cdot)$, $A \in \mathcal{A}$, $p((\chi_A \bullet \chi_{A_k})(\cdot)) = P(A \cap A_k) = \min(p_k(\chi_A(\cdot)), P(A_k))$, $k = 1,2,\ldots$, и согласно определению условной возможности $p_k(\chi_A(\cdot)) = P(A \mid A_k)$, $k = 1,2,\ldots$ Для условной относительно $\mathcal{C}$ возможности события $A \in \mathcal{A}$ равенство (6) дает выражение

$$P(A \mid \mathcal{C})(x) = \mathop{\textstyle+}_{k=1}^{\infty} (P(A \mid A_k) \bullet \chi_{A_k}(x)),\ x \in X. \qquad (7)$$

Воспользовавшись соотношением (5) при $C = X$, $f(\cdot) = \chi_A(\cdot)$ и равенством (7), получим формулу полной возможности (3).

Пусть $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{C}$-измерима и $\chi_C(\cdot)$ — х.ф. множества $C = \{x \in X,\ g(x) = c\} \in \mathcal{C}$, $c \in [0,1]$. Тогда, воспользовавшись соотношением (5), нетрудно получить, что

$$p((g \bullet f)(\cdot) \mid \mathcal{C})(x) = (g \bullet p(f(\cdot) \mid \mathcal{C}))(x),\ x \in X.$$

Иначе говоря, $\mathcal{C}$-измеримая функция как постоянная может быть вынесена из-под знака условного относительно $\mathcal{C}$ интеграла.

Нетрудно убедиться, что можно указать вариант $p(f(\cdot)|\mathcal{C})(\cdot)$ условного относительно $\mathcal{C}$ интеграла, который является интегралом $f(\cdot)$ [2] (мерой на $\mathcal{L}(X)$ [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
2. *Пытьев Ю.П.* // Там же. № 4. С. 3 (Ibid. No. 4. P. 1).
3. *Dubois D., Prade H.* Theorie des Possibilites. MASSON, Paris–Milano–Barcelona–Mexico, 1988.
4. *Нгуен Ф.Т.* // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р. Ягера. М., 1986. С. 285.

Поступила в редакцию
26.03.97