УДК 537.84

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕДНИХ ПОЛЕЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Д. Д. Соколов

(кафедра математики)

Построено явное решение в виде винеровского интеграла по случайным траекториям задачи Коши для уравнения динамо средних полей. Полученное решение оказывается существенно более сложным, чем соответствующее решение уравнения индукции. С помощью этого решения исследуется задача о построении эффективной верхней оценки скорости роста среднего магнитного поля и задача об эволюции магнитного поля в среде с флуктуирующей спиральностью.

Введение

Эволюция крупномасштабного магнитного поля $\mathbf{B}$ в турбулентном потоке $\mathbf{v}$ электропроводящей несжимаемой жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \beta \Delta \mathbf{B}, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}$ — средняя скорость, а β — коэффициент турбулентной диффузии. Это уравнение динамо средних полей было получено Штеенбеком, Краузе и Рэдлером (см. [1]) путем усреднения уравнения индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \nu_m \Delta \mathbf{H} \tag{2}$$

для эволюции полного магнитного поля $\mathbf{H}$ (ν_m — молекулярный коэффициент магнитной диффузии), которое в свою очередь является следствием уравнений Максвелла для квазистационарного магнитного поля.

Замечательно, что структура уравнений (1) и (2) различна. В первом из них (кроме естественной перенормировки коэффициентов) возникает специфический член со спиральностью α, отвечающий (наряду с дифференциальным вращением) за генерацию крупномасштабного магнитного поля. Оказывается, что этот новый член существенно изменяет свойства уравнения. В частности, для уравнения (2) с помощью метода функциональных интегралов сравнительно просто записывается явное решение задачи Коши (см. [2, 3]) в виде формулы, аналогичной известной формуле Каца–Фейнмана для уравнения Шрёдингера, тогда как для уравнения (1) получить подобное решение ранее не удавалось. Ниже мы покажем, как путем некоторого естественного обобщения понятия интеграла подобную формулу можно записать и для уравнения (1), и обсудим с ее помощью природу различий некоторых свойств уравнений (2) и (1).

Решение задачи Коши

Формулы типа Каца–Фейнмана обычно получают в результате подбора и проверяют путем подстановки в исходное уравнение. Поэтому мы сначала запишем искомую формулу, а затем обсудим ее смысл. Итак,

$$B_i(\mathbf{x}, t) = M_{\mathbf{x}} \left\{ \prod_{s=0}^{t} \left[\delta_{ij} + \frac{\alpha}{2\beta} e_{ilj} d\mathbf{w}_l + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\alpha^2}{4\beta}\delta_{ij} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} e_{ilj} \right) d\,s \right] B_{0j}(\xi_t), \right\}, \tag{3}$$

где e_{ijk} — вполне антисимметричный тензор, $\mathbf{B}_0$ — магнитное поле в начальный (нулевой) момент времени, $\mathbf{w}_l$ — стандартный винеровский процесс в момент времени s, а случайная траектория ξ описывает перемещение частицы, проходящей в момент времени t через точку $\mathbf{x}$ и движущейся под действием турбулентной скорости и диффузии. Траекторию этой частицы можно найти как решение следующего интегрального уравнения:

$$\xi_s = \mathbf{x} - \int_{t-s}^{t} \mathbf{V}(\xi_{s'}, s') d\,s' + 2\beta \mathbf{w}_{t-s}. \tag{4}$$

Символ $M_{\mathbf{x}}$ обозначает среднее значение (винеровский интеграл) по случайным траекториям ξ, проходящим через точку $\mathbf{x}$ в момент времени t. Другими словами, уравнение (4) задает правило пересчета стандартной меры Винера в меру, описывающую распределение случайного процесса ξ. При желании интегрирование в рассматриваемой формуле можно было бы вести непосредственно по мере Винера (см. [4]). Напомним, что в отличие от формулы Каца–Фейнмана для уравнения Шрёдингера мера Винера в формуле (3) является обычной мерой Лебега на некотором подпространстве пространства C, так что не возникает проблем с обоснованием существования данного интеграла (см. подробнее [5]).

Символ $\prod$ обозначает матричный мультипликативный интеграл (см., напр., [6, гл. XV, џ 6]), с помощью которого в работах [2, 3] записываются аналогичные формулы для уравнения (2). Однако в данном случае мы вынуждены ввести в подынтегральное выражение члены, пропорциональные $d\,\mathbf{w}$, т.е. рассмотреть *стохастический мультипликативный матричный интеграл.*

По-видимому, ранее этого не приходилось делать по крайней мере в задачах магнитной гидродинамики, однако это понятие строится путем непосредственного объединения конструкций мультипликативного интеграла [6] и стохастического интеграла (см., напр., [7]). Для определенности мы понимаем здесь стохастический интеграл в смысле Ито.

Формула (3) переходит в соответствующее решение для уравнения (2) при $\alpha = 0$ и замене β на ν_m и $\mathbf{V}$ на $\mathbf{v}$. При этом стохастический мультипликативный интеграл превращается в обычный мультипликативный интеграл. Отметим, что адвективные члены в уравнении (2) воспроизводятся с помощью переносного члена в уравнении (4), а других членов с производными магнитного поля уравнение (2) не содержит. Синтез понятий стохастического и мультипликативного интеграла понадобился нам для того, чтобы воспроизвести новые члены с производными магнитного поля, возникающие в уравнении (1).

При проверке справедливости формулы (3) путем подстановки ее в уравнение (1) нужно принять во внимание формулу Ито для дифференцирования функции винеровского процесса

$$d\,F(w) = F' d\,w + \frac{1}{2} F'' d\,t. \qquad (5)$$

Второй член этой формулы нужен для того, чтобы при вычислении временной производной от винеровского интеграла (3) члены, пропорциональные $d\,\mathbf{w}$, группировались в квадратичное по α выражение, однако уравнение (1) не содержит соответствующего члена. Для того чтобы скомпенсировать этот лишний член, необходимо ввести в слагаемое, пропорциональное $d\,s$, аналогичный член с противоположным знаком, что и сделано в формуле (3). Еще один член этой формулы пропорционален градиенту спиральности и соответствует члену с производными от α в уравнении (1).

Формула (3) дает убывающее на пространственной бесконечности решение задачи Коши. Именно это решение представляет интерес в задачах о генерации магнитных полей в так называемой теории динамо.

Поскольку формула (3) дает явное решение задачи Коши для уравнения (1), она, конечно, интересна сама по себе. Однако применение формулы (3), очевидно, не решает все вопросы, возникающие в связи с приложениями этого уравнения. Дело в том, что далеко не всегда в структуре явного решения можно усмотреть те свойства крупномасштабного магнитного поля, которые представляют непосредственный интерес. В частности, для задачи динамо важно, растет ли решение уравнения (1) экспоненциально со временем и какова скорость этого роста. Однако подобную информацию совсем непросто извлечь из явного решения (3). Тем не менее явное решение уравнения (2) оказалось полезным для выяснения свойств уравнения (2) [3]. Ниже мы продемонстрируем, что и решение (3) может оказаться полезным.

Стабилизируемость уравнения динамо средних полей

Представляется несомненным, что скорости роста решений уравнений (1) и (2) для физически осмысленных ситуаций ограничены сверху. Однако подкрепить эту уверенность конкретными оценками оказывается неожиданно непросто. В частности, наивное представление о том, что максимальная скорость роста решения уравнения (2) ограничена сверху максимумом собственных значений матрицы $\left\| \dfrac{\partial v_i}{x_k} \right\|$, оказывается ошибочным в силу существования так называемых медленных динамо, в которых экспоненциальный рост магнитного поля может происходить и в том случае, когда все собственные числа этой матрицы равны нулю. Однако, пользуясь представлением решения уравнения (2) в виде винеровского интеграла, удается оценить скорость роста магнитного поля сверху величиной $27 \max\limits_{\mathbf{x},i,k} \left| \dfrac{\partial v_i}{x_k} \right|$ [8]. Для получения этой оценки вводится понятие стабилизируемости уравнения, которое состоит в следующем. В правую часть уравнения, исследуемого на стабилизируемость, вводится дополнительный член, описываемый некоторым оператором $-\widehat{W}$. Оператор $\widehat{W}$ назывется стабилизатором, если после его введения в исследуемое уравнение все решения этого уравнения со временем затухают. Скорость роста решения эволюционного уравнения, в правой части которого стоит оператор $\widehat{W}$, и характеризует скорость роста решений рассматриваемого уравнения. Кроме того, качество оценки зависит от того, насколько проста структура оператора $\widehat{W}$. Понятие стабилизатора позволяет единообразно описать, опираясь на формулы типа Каца–Фейнмана, все виды динамо и избежать осложнений, связанных с существованием медленных динамо.

В частности, для уравнения (2) в работе [8] построен ограниченный стабилизатор, пропорциональный единичному оператору. При этом коэффициент перед единичным оператором выбирается так, чтобы заведомо сделать матрицу, стоящую перед $d\,s$ в формуле типа (3), отрицательно определенной. Для уравнения (1) подобная конструкция не приводит к желательному результату, поскольку в формуле (3) кроме члена с $d\,s$ присутствует член с $d\,\mathbf{w}$, который нельзя замажорировать этим способом. Поэтому, строя здесь стабилизатор для уравнения (1), нам приходится выбрать его в виде

$$\widehat{W} = \mathrm{rot}\,(\alpha \mathbf{B}) + \frac{\beta}{2} \Delta \mathbf{B} + 27 \max_{\mathbf{x},ik} \left| \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right|. \qquad (6)$$

Стабилизатор (6) устраняет из уравнения (1) члены, пропорциональные α, и сводит, таким образом, задачу о его стабилизируемости к рассмотренной в работе [8] задаче о стабилизируемости уравнения (2). Поскольку максимальная скорость роста решения уравнения (1) при $\mathbf{V} = 0$ составляет $\alpha^2/4\beta$ [9], то стабилизатор (6) соответствует скорости роста $\alpha^2/\beta + 27 \max\limits_{\mathbf{x},ik} \left| \dfrac{\partial V_i}{x_k} \right|$. Однако стабилизатор (6) представляет собой неограниченный оператор, который к тому же не обязательно коммутирует с правой частью уравнения (1). Поэтому полученная здесь оценка стабилизируемости решения уравнения (1) качественно хуже, чем аналогичная оценка для уравнения (2), полученная в работе [8].

Отметим, что хотя уравнение (1) и является следствием уравнения (2), стабилизируемость первого уравнения не вытекает непосредственно из стабилизируемости второго. Дело в том, что при выводе уравнения (1) обычно делаются предположения, скажем, о том, что поле турбулентных скоростей $\mathbf{v}$ является гауссовским. Однако в таком поле хотя и с исчезающе малой вероятностью величины типа $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ могут быть больше любой наперед заданной величины, так что оценки [8] оказываются неприменимыми.

Магнитное поле в среде с флуктуирующей спиральностью

Формулы типа Каца–Фейнмана для уравнения (2) полезны прежде всего потому, что с их помощью в пределе коротких времен корреляции можно вывести уравнение (1) при любых магнитных числах Рейнольдса [2]. Соответствующая модель короткокоррелированного поля турбулентных скоростей $\mathbf{v}$ вводится следующим образом. При любом $\Delta > 0$ рассматривается вспомогательное поле скорости $\mathbf{v}^\Delta$, которое строится так. Временная ось нарезается на полуинтервалы вида $[n\Delta; (n+1)\Delta)$ и предполагается, что на каждом из этих полуинтервалов значения поля $\mathbf{v}^\Delta$ представляют собой не зависящие от времени равнораспределенные случайные поля, статистически независимые друг от друга на разных полуинтервалах. Короткокоррелированное поле скорости $\mathbf{v}$ является обобщенным случайным полем (подобно тому как δ-функция является обобщенной функцией), и его понимают как предел полей $\mathbf{v}^\Delta$ при $\Delta \to 0$. Для того чтобы предельное поле скорости не обратилось в нуль, нужно применить следующую нормировку: $\mathbf{v}^\Delta = \Delta^{-1/2}\widetilde{\mathbf{v}}$, где случайные поля $\widetilde{\mathbf{v}}$ равнораспределены при всех Δ (такого же типа нормировка применяется и при определении δ-функции). Далее, пользуясь малостью величины Δ, записывают с нужной точностью асимптотическое представление для соответствующей формулы типа Каца–Фейнмана и подбирают уравнение, которому оно отвечает.

Наряду с уравнением индукции для случайного поля скорости в литературе рассматривают и уравнение динамо средних полей со случайным распределением спиральности (краткий обзор соответствующих работ и формальную постановку задачи см. в работе [10]). Однако до сих пор не удавалось вывести замкнутое дифференциальное уравнение для магнитного поля, осредненного по флуктуациям спиральности, а приходилось непосредственно работать с уравнением (1) со случайными коэффициентами. Тем не менее природа трудностей с выводом осредненного уравнения оставалась непроясненной. Формула (3) показывает, почему в данном случае нельзя применить технику короткокоррелированного приближения.

Короткокоррелированное поле спиральности нужно было бы вводить как предел при $\Delta \to 0$ полей спиральности $\alpha^\Delta = \Delta^{-1/2}\widetilde{\alpha}$, где поле $\widetilde{\alpha}$ строится по аналогии с полем $\widetilde{\mathbf{v}}$. Нетрудно видеть, однако, что при этом величины типа $\alpha^\Delta \mathbf{w}_\Delta$ не стремятся к нулю при $\Delta \to 0$. Поскольку подобного рода члены возникают при вычислении выражения (3) для малых Δ, неясно, как выписать соответствующее асимптотическое представление для винеровского интеграла.

Еще больше проблем возникает с членом типа $\alpha^2 d\,s$ в формуле (3). В самом деле, в исходное уравнение (1) спиральность входит только линейно, поэтому кажется логичным рассматривать большие и кратковременные флуктуации спиральности с нулевым средним. Однако квадратичные комбинации α всегда имеют ненулевые средние, которые оказываются порядка Δ^{-1}. Если же считать, что величины α^Δ ограничены при $\Delta \to 0$ (чтобы не возникало указанных трудностей), то, как нетрудно проверить с помощью формулы (3), следуя вычислениям [2], спиральность вовсе выпадает из конечного результата.

Работа была поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 95-01-01284 и 96-02-16252.

Литература

1. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., 1984.
2. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* // Магнитная гидродинамика. 1983. № 4. С. 67.
3. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* // Sov. Sci. Rev. C: Math. Phys. 1988. **7**. P. 1.
4. *Dittrich P., Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* // Astr. Nachr. 1984. **305**. P. 119.
5. *Семенов Д.В.* // Матем. заметки. 1989. **45**. С. 123.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.
7. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М., 1972.
8. *Sokoloff D.D.* // Russ. J. Math. Phys. 1997. **4**. P. 10.
9. *Sokoloff D.D., Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1983. **25**. P. 293.
10. *Соколов Д.Д.* // Астрон. журн. 1996. **74**, № 1. С. 75.

Поступила в редакцию
17.02.97