11. *Пономарев В.Н., Сметанин Е.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1978. № 5. С. 29; № 6. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1978. No.5. P. 25; No.6. P. 1).
12. *Hoiman S., Rosenbaum M., Ryan M.P., Shepley L.C.* // Phys. Rev. 1978. **D17**. P. 3141.
13. *Mukku C., Sayed W.A.* // Phys. Lett. 1979. **82B**. P. 382.
14. *Де'Витт Б.* Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
15. *Биррел Н., Девис П.* Квантовые поля в искривленном пространстве-времени. М., 1986.
16. *Pronin P.I., Stepanyantz K.V.* // Proc. Fourth Intern. Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High Energy and Nuclear Physics. World Scientific, 1995. P. 187.
17. *Sezgin E., Nieuwenhuizen P. van* // Phys. Rev. 1980. **D22**. P. 301.

Поступила в редакцию
31.03.97

УДК 517.947.42

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ

П. А. Крутицкий, К. А. Логгинова

(кафедра математики)

Построено явное решение краевой задачи о стекании электрического тока с периодической системы параллельных электродов, впаянных в полупроводниковую пленку, расположенную в постоянном магнитном поле. С математической точки зрения изучена краевая задача для гармонических функций с косой производной в граничном условии. Явное решение задачи построено путем сведения ее к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций с последующем конформным отображением на каноническую область, в которой задача Римана–Гильберта допускает решение в замкнутой форме.

1. Постановка задачи

Рассмотрим полупроводниковую пленку с электронным типом проводимости, занимающую всю плоскость переменных $w = (w_1, w_2)$. Будем считать, что толщиной пленки можно пренебречь. Полупроводниковая пленка находится в постоянном магнитном поле с магнитной индукцией $\mathbf{B}$, направленной перпендикулярно плоскости переменных (w_1, w_2). Через B обозначим проекцию магнитной индукции на ось Ow_3.

Уравнения, описывающие динамику электронной плазмы в замагниченном полупроводнике, имеют вид [1–3]

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \Lambda\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} u. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{J} = (J_1, J_2)$ — плотность тока, u — потенциал электрического поля, Λ — тензор проводимости, который имеет вид

$$\Lambda = \frac{\sigma}{1+\beta^2}\left\| \begin{matrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где σ — проводимость полупроводника в отсутствие магнитного поля, $\beta = \rho B$, ρ — подвижность носителей. Далее будем считать, что σ и β — вещественные константы, причем $\sigma \neq 0$.

В рассматриваемой модели угол между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектором плотности тока $\mathbf{J}$ равен $\arccos\left(1/(1+\beta^2)\right) \in [0, \pi/2)$. Если магнитное поле отсутствует, то этот угол равен нулю.

Рассмотрим бесконечную периодическую систему отрезков, расположенных параллельно оси Ow_1 с периодом 2π:

$$L_n = \{w:\ w_1 \in (-\alpha, \alpha),\ w_2 = 2\pi n\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Совокупность всех отрезков будем называть контуром $L = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} L_n$. Положительным направлением обхода L будем считать направление оси Ow_1. Предположим, что полупроводниковая пленка разрезана вдоль отрезков, составляющих контур L. Верхний берег разреза обозначим индексом «+», а нижний — индексом «–», так что

$$L_n^{\pm} = \{w:\ w_1 \in (-\alpha, \alpha),\ w_2 = 2\pi n \pm 0\}, \quad L^{\pm} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} L_n^{\pm}.$$

Предположим, что с разрезов L в полупроводник стекает ток, причем на берегах разрезов заданы нормальные токи:

$$\text{на } L^{+}: \quad J_2(w_1, 2\pi n + 0) = -q^{+}(w_1)\frac{\sigma}{1+\beta^2},$$
$$\text{на } L^{-}: \quad J_2(w_1, 2\pi n - 0) = -q^{-}(w_1)\frac{\sigma}{1+\beta^2},$$

где $w_1 \in (-\alpha, \alpha)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

С физической точки зрения контур L представляет собой совокупность электродов, впаянных в полупроводник, поэтому рассматриваемую задачу можно трактовать как задачу о стекании электрического тока с прямолинейных электродов, расположенных в замагниченном полупроводнике.

В силу периодичности геометрии задачи и граничных условий естественно разыскивать потенциал $u(w) = u(w_1, w_2)$ в классе функций 2π-периодических по w_2, поэтому предположим, что

$$u(w_1, w_2) = u(w_1, w_2 + 2\pi n),$$
$$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad w \in R^2 \setminus L. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е. Функция $u(w)$ принадлежит классу гладкости H_L^0, если

1) $u(w)$ непрерывна вне L, непрерывно продолжима на L^+ и L^- во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы контура L;

2) u_{w_1}, u_{w_2} непрерывны вне L, непрерывно продолжимы на L^+ и L^- всюду, за исключением концов L, в которых они могут иметь интегрируемую особенность, т.е. существуют константы $\varepsilon > -1$ и $A > 0$ такие, что

$$|\, u_{w_1} \,|, |\, u_{w_2} \,| \;\leqslant A \,|\, w - \alpha_n^{\pm} \,|^{\varepsilon} \tag{3}$$

при $|\, w - \alpha_n^{\pm} \,| \to 0$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Здесь через

$$\left| w - \alpha_n^{\pm} \right| = \left[(w_1 \mp \alpha)^2 + (w_2 - 2\pi n)^2 \right]^{1/2}$$

обозначено расстояние от точки $w = (w_1, w_2)$ до произвольного конца $\alpha_n^{\pm} = (\pm\alpha, 2\pi n)$ контура L;

3) $u(w)$ удовлетворяет условию периодичности (2) и условиям на бесконечности:

$$|\, u \,| < \mathrm{const}; \quad |\, u_{w_1} \,| = o(1), \quad w_1 \to \pm\infty.$$

Здесь и далее под (1) будем понимать функцию, которая равномерно стремится к нулю.

На основании уравнений (1) приходим к строгой математической постановке задачи.

З а д а ч а . Найти функцию $u(w_1, w_2)$, принадлежащую классу H_L^0, гармоническую в $R^2 \setminus L$ и удовлетворяющую граничным условиям на L:

$$\text{на } L^+: \quad u_{w_2}(w_1, 2\pi n + 0) - \beta u_{w_1}(w_1, 2\pi n + 0) = q^+(w_1),$$
$$\text{на } L^-: \quad u_{w_2}(w_1, 2\pi n - 0) - \beta u_{w_1}(w_1, 2\pi n - 0) = q^-(w_1),$$

при $w_1 \in (-\alpha, \alpha)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Условия на бесконечности и на концах контура L в определении класса H_L^0 обеспечивают отсутствие точечных источников на концах L и на бесконечности. Справедлива

Т е о р е м а 1 (о единственности). *Необходимое условие разрешимости задачи имеет вид*

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (q^+(w_1) - q^-(w_1))dw_1 = 0. \tag{4}$$

Если решение задачи существует, то оно определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если D — некоторая связная область, то для произвольной достаточно гладкой в $\bar{D}$ гармонической функции справедливы тождества:

$$\|\, \nabla u \,\|^2_{L_2(D)} = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl, \qquad \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя к D нормаль на ∂D.

Положим

$$D_d^n = \left\{ w \in R^2 : -d < w_1 < d, w_2 \in [2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi] \right\},$$

где $d > \alpha$.

Пусть u — решение задачи . Пользуясь гладкостью функции u, запишем второе из тождеств (5) для области $D_d^0 \backslash L_0$:

$$\int_{\partial(D_d^0 \backslash L_0)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl =$$
$$= \int_{\partial D_d^0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl + \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial w_2} \right)^- - \left(\frac{\partial u}{\partial w_2} \right)^+ \right] dw_1 = 0.$$

Если $d \to \infty$, то из периодичности функции u по w_2 и из ее поведения при $w_1 \to \pm\infty$ вытекает, что первый интеграл стремится к нулю. Подставляя граничные условия задачи во второй интеграл и учитывая непрерывность функции u на концах контура L, получим необходимое условие разрешимости задачи .

Пусть u_0 — решение однородной задачи . Пользуясь гладкостью функции u_0, запишем первое из тождеств (5) для области $D_d^0 \backslash L_0$:

$$\|\nabla u_0\|^2_{L_2(D_d^0 \backslash L_0)} =$$
$$= \int_{\partial D_d^0} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} dl + \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[u_0^- \left(\frac{\partial u_0}{\partial w_2} \right)^- - u_0^+ \left(\frac{\partial u_0}{\partial w_2} \right)^+ \right] dw_1.$$

Если $d \to \infty$, то из периодичности функции u_0 по w_2 и ее поведения при $w_1 \to \pm\infty$ вытекает, что первый интеграл стремится к нулю. Подставляя однородные граничные условия во второй интеграл и учитывая непрерывность u_0 на концах контура L, получим

$$\|\nabla u_0\|^2_{L_2(D_\infty^0 \backslash L_0)} =$$
$$= \beta \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} u_0^+ (u_0^+)_{w_1} dw_1 - \int_{-\alpha}^{\alpha} u_0^- (u_0^-)_{w_1} dw_1 \right] = 0.$$

Следовательно, $u_0 \equiv \mathrm{const}$ в D_∞^0. В силу периодичности $u_0 \equiv \mathrm{const}$ в R^2. Тем самым теорема доказана по причине линейности задачи .

2. Решение задачи K

Решение задачи будем строить в предположении, что функции $q^+(w_1)$, $q^-(w_1)$ принадлежат $C^{0,\lambda}[-\alpha, \alpha]$, $\lambda \in [0, 1]$ и удовлетворяют условию разрешимости (4) задачи .

Наряду с действительными переменными $w = (w_1, w_2)$ введем комплексную переменную $W = w_1 + iw_2$.

Введем класс гладкости h_L^0 для аналитических функций переменной W. Будем говорить, что функция принадлежит классу h_L^0, если она кусочно-голоморфна с линией скачков L, удовлетворяет условиям на бесконечности

$$F(W) = o(1), \quad |\, w_1 \,| \to \infty$$

и условиям периодичности

$$F(w_1 + iw_2) = F(w_1 + i(w_2 + 2\pi n)), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функция называется кусочно-голоморфной с линией скачков L, если она непрерывно продолжима на L слева и справа во всех точках, за исключением концов L, где она может иметь интегрируемые особенности [4].

Пусть $u(w)$ — решение задачи . Рассмотрим сопряженную к $u(w)$, вообще говоря, многозначную гармоническую функцию $v(w)$ и построим многозначную аналитическую функцию

$$\Psi(W) = u(w) + iv(w), \tag{6}$$

тогда

$$F_0(W) = \Psi_W(W) = u_{w_1}(w) - iu_{w_2}(w) \tag{7}$$

будет однозначной аналитической функцией, которая имеет смысл комплексной напряженности электрического поля $F_0 = -E_1 + iE_2$. Задача отвечает следующей задаче Римана–Гильберта относительно функции $F_0(W)$.

З а д а ч а R. Найти функцию $F_0(W)$ из класса h_L^0, удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} &\text{на } L^+: \quad \mathrm{Re}\left[(-\beta + i)F_0^+(W)\right] = q^+(w_1), \\ &\text{на } L^-: \quad \mathrm{Re}\left[(-\beta + i)F_0^-(W)\right] = q^-(w_1), \end{aligned}$$

где $F_0^+(W)$ и $F_0^-(W)$ — предельные значения $F_0(W)$ на L^+ и L^- соответственно.

Вводя функцию

$$F(W) = (i - \beta)F_0(W) \in h_L^0, \tag{8}$$

переформулируем задачу R в терминах функции $F(W)$, при этом граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} &\text{на } L^+: \quad F^+(W) = q^+(w_1), \\ &\text{на } L^-: \quad F^-(W) = q^-(w_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим конформное отображение плоскости $W = w_1 + iw_2$ на плоскость $z = x_1 + ix_2$, так что $z = \mathrm{e}^W$, $W = \ln z$. Контур L переходит в отрезок $\Gamma = \{x: \ x_1 \in (\mathrm{e}^{-\alpha}, \mathrm{e}^{\alpha}), \ x_2 = 0\}$ на оси Ox_1. Функция $F(W)$ переходит в

$$\Phi(z) = \Phi(\mathrm{e}^W) = F(W) \tag{9}$$

и $q^\pm$ переходит в

$$Q^\pm(x_1) = Q^\pm(\mathrm{e}^{w_1}) = q^\pm(w_1).$$

На плоскости z введем класс гладкости h_Γ^0. Будем говорить, что аналитическая функция $\Phi(z)$ принадлежит классу h_Γ^0, если она кусочно-голоморфна с линией скачков Γ и удовлетворяет условиям $\Phi(0) = \Phi(\infty) = 0$.

Пусть $F(W)$ — решение переформулированной задачи R, тогда функция $\Phi(z) = F(\ln z)$ принадлежит классу h_Γ^0 и на плоскости z удовлетворяет задаче Римана–Гильберта со следующими граничными условиями на Γ:

$$\mathrm{Re}\ \Phi^+(t) = Q^+(x_1), \qquad \mathrm{Re}\ \Phi^-(t) = Q^-(x_1). \tag{10}$$

Индексами «+» и «–» мы обозначаем предельные значения функций на Γ^+ и Γ^- соответственно: $\Gamma^\pm = \{x: x_1 \in (\mathrm{e}^{-\alpha}, \mathrm{e}^{\alpha}), x_2 = 0 \pm 0\}$.

Условия $\Phi(\infty) = \Phi(0) = 0$, введенные в определении класса h_Γ^0, вытекают из условий задачи R на бесконечности. Действительно, если $w_1 \to +\infty$, то $|z| \to \infty$, а если $w_1 \to -\infty$, то $|z| \to 0$.

Задачу Римана–Гильберта об отыскании функции $\Phi(z) \in h_\Gamma^0$ по граничному условию (10) назовем R_Γ. Решать эту задачу будем по схеме, предложенной в [5, 6].

Заметим, что если функция $\Phi(z)$ принадлежит классу h_Γ^0, то функция $\Phi_*(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$ также принадлежит классу h_Γ^0, и на действительной оси справедливо соотношение

$$\Phi^\pm(t) = \overline{\Phi_*^\mp(t)}. \tag{11}$$

Введем функции:

$$\varphi_1(z) = \Phi(z),$$

$$\varphi_2(z) = (\varphi_1(z))_* = \overline{\varphi_1(\overline{z})}. \tag{12}$$

Пользуясь (11), несложно доказать, что если $\Phi(z)$ — решение задачи R_Γ, то функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ должны удовлетворять следующей векторной задаче сопряжения.

З а д а ч а S_φ. Найти функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z) \in h_\Gamma^0$ по граничным условиям на Γ:

$$\varphi_1^+(t) = -\varphi_2^-(t) + 2Q^+(t), \quad \varphi_2^+(t) = -\varphi_1^-(t) + 2Q^-(t).$$

Полагая

$$\mu_1(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z), \quad \mu_2(z) = -\varphi_2(z) - \varphi_1(z), \tag{13}$$

сведем векторную задачу S_φ к двум независимым одномерным задачам сопряжения относительно функций $\mu_1(z), \mu_2(z) \in h_\Gamma^0$, которые должны удовлетворять следующим граничным условиям на Γ:

$$\begin{aligned} \mu_1^+(t) &= \mu_1^-(t) + 2\left(Q^+(t) - Q^-(t)\right), \\ \mu_2^+(t) &= -\mu_2^-(t) - 2\left(Q^+(t) + Q^-(t)\right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись [4–6], выпишем решение этих задач, исчезающее на бесконечности, но пока еще не удовлетворяющее условию при $z = 0$:

$$\mu_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathrm{e}^{-\alpha}}^{\mathrm{e}^{\alpha}} \frac{Q^+(t) - Q^-(t)}{t - z} dt,$$

$$\mu_2(z) = -\frac{1}{\pi i \Theta(z)} \int\limits_{\mathrm{e}^{-\alpha}}^{\mathrm{e}^{\alpha}} \frac{Q^+(t) + Q^-(t)}{t - z} \Theta^+(t) dt + \frac{c}{\Theta(z)},$$

где — произвольная константа, $\Theta(z) = (z - e^{\alpha})^{1/2} \times (z - e^{-\alpha})^{1/2}$, $\Theta^+(t) = i|\Theta(t)|_\Gamma$,

$$|\Theta(t)| = |t - e^{\alpha}|^{1/2} \, |t - e^{-\alpha}|^{1/2} \tag{14}$$

— модуль прямого значения $\Theta(z)$ на Γ. Удовлетворяя условию $\mu_2(0) = 0$, находим константу :

$$c = \frac{1}{\pi} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \frac{1}{t} |\Theta(t)| \left(Q^+(t) + Q^-(t) \right) dt = $$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \theta(\xi) \left(q^+(\xi) + q^-(\xi) \right) d\xi, \quad t = e^{\xi},$$

которая оказывается чисто вещественной. Мы используем обозначение

$$\theta(\xi) = \left|\Theta(e^{\xi})\right| = \left|e^{\xi} - e^{-\alpha}\right|^{1/2} \left|e^{\xi} - e^{\alpha}\right|^{1/2} = $$
$$= e^{\xi/2} \left| \operatorname{sh} \frac{\xi + \alpha}{2} \, \operatorname{sh} \frac{\xi - \alpha}{2} \right|^{1/2}. \tag{15}$$

Удовлетворяя условию $\mu_1(0) = 0$, приходим к необходимому условию разрешимости задачи из теоремы 1, которое считается выполненным.

Теперь из соотношений (13) несложно получить функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$, дающие решение векторной задачи сопряжения S_φ.

Легко проверить, что полученные функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ удовлетворяют условию (12) и, согласно [5, 6], решение задачи Римана–Гильберта R_Γ дается формулой

$$\Phi(z) = \varphi_1(z) = \frac{\mu_1(z) - \mu_2(z)}{2},$$

так что

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \frac{Q^+(t) - Q^-(t)}{t - z} dt + $$
$$+ \frac{1}{2\pi i \Theta(z)} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \Theta^+(t) \frac{Q^+(t) + Q^-(t)}{t - z} dt - \frac{c}{2\Theta(z)}. \tag{16}$$

Учитывая, что $\Phi(0) = 0$, и пользуясь теоремой Коши, представим функцию $\Phi(z)/z$ в виде интеграла Коши:

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \frac{P(t_0)}{t_0 - z} \frac{dt_0}{t_0}, \tag{17}$$

где

$$P(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = $$
$$= Q^+(t_0) - Q^-(t_0) + $$
$$+ \frac{1}{\pi i |\Theta(t_0)|} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} |\Theta(t)| \frac{Q^+(t) + Q^-(t)}{t - t_0} dt - \frac{c}{i|\Theta(t_0)|}, \tag{18}$$

а функция $|\Theta(t_0)|$ введена в (14).

Возвращаясь на плоскость $W = \ln z$ и считая, что W — произвольная точка плоскости, а W_0 — произвольная фиксированная точка, из (7)–(9) получим

$$F(W) = \Phi(z),$$
$$\Psi_W(W) = F_0(W) = (-\beta + i)^{-1} F(W),$$
$$\Psi(W) = \frac{1}{-\beta + i} \int\limits_{W_0}^{W} F(W) dW = \frac{1}{-\beta + i} \int\limits_{z_0}^{z(W)} \frac{\Phi(z)}{z} dz = $$
$$= \frac{1}{-\beta + i} \int\limits_{z_0}^{z(W)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \frac{1}{t_0} \frac{P(t_0)}{t_0 - z} dt_0 dz = $$
$$= -\frac{1}{-\beta + i} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} P(t_0) \ln(z(W) - t_0) \frac{dt_0}{t_0} + A, \tag{19}$$

где A — произвольная константа.

Отсюда получим решение исходной задачи в соответствии с (6):

$$u(w) = \operatorname{Re} \Psi(W) = $$
$$= \frac{1}{1 + \beta^2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \left[\operatorname{Re} p(\xi_0) \ln R(w, \xi_0) - \operatorname{Im} p(\xi_0) \gamma(w, \xi_0) + \right.$$
$$\left. + \beta \left[\operatorname{Re} p(\xi_0) \gamma(w, \xi_0) + \operatorname{Im} p(\xi_0) \ln R(w, \xi_0) \right] \right] d\xi_0 + A_0, \tag{20}$$

где A_0 — произвольная вещественная константа,

$$R(w, \xi_0) = \left[(e^{w_1} \cos w_2 - e^{\xi_0})^2 + (e^{w_1} \sin w_2)^2 \right]^{1/2} = $$
$$= \left[e^{2w_1} + e^{2\xi_0} - 2 e^{w_1 + \xi_0} \cos w_2 \right]^{1/2} = $$
$$= \sqrt{2} \, e^{(w_1 + \xi_0)/2} [\operatorname{ch}(w_1 - \xi_0) - \cos w_2]^{1/2}.$$

Функция $p(\xi_0)$ связана с $P(t_0)$ из (18) соотношением $p(\xi_0) = P(e^{\xi_0})$, так что

$$\operatorname{Re} p(\xi_0) = q^+(\xi_0) - q^-(\xi_0),$$
$$\operatorname{Im} p(\xi_0) = -\frac{1}{\pi} \frac{e^{\xi_0}}{\theta(\xi_0)} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{q^+(\xi) + q^-(\xi)}{e^{\xi} - e^{\xi_0}} \theta(\xi) d\xi = $$
$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{\xi_0/2}}{\theta(\xi_0)} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{q^+(\xi) + q^-(\xi)}{\operatorname{sh}(\frac{\xi - \xi_0}{2})} \theta(\xi) \frac{d\xi}{e^{\xi/2}},$$

причем функция $\theta(\xi)$ определена в (15).

Через $\gamma(w, \xi_0)$ обозначена многозначная функция, которая определяется с точностью до $2\pi m$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ формулами

$$\cos \gamma(w, \xi_0) = \frac{e^{w_1} \cos w_2 - e^{\xi_0}}{R(w, \xi_0)},$$
$$\sin \gamma(w, \xi_0) = \frac{e^{w_1} \sin w_2}{R(w, \xi_0)}.$$

Заметим, что построенная функция $u(w)$ является однозначной, поскольку

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{Re}p(\xi_0)d\xi_0 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{Im}p(\xi_0)d\xi_0 = 0 \qquad (21)$$

вследствие того, что

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\xi_0)d\xi_0 = \int_{\mathrm{e}^{-\alpha}}^{\mathrm{e}^{\alpha}} P(t_0)\frac{dt_0}{t_0} = 0. \qquad (22)$$

Действительно, решение задачи Римана–Гильберта R_Γ, построенное в (16), стремится к нулю на бесконечности, т.е.

$$\lim_{|z|\to\infty} \Phi(z) = 0. \qquad (23)$$

Из представления (17) имеем

$$\Phi(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_{\mathrm{e}^{-\alpha}}^{\mathrm{e}^{\alpha}} \frac{P(t_0)}{t_0 - z}\frac{dt_0}{t_0} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{e}^{-\alpha}}^{\mathrm{e}^{\alpha}} \frac{P(t_0)}{t_0}dt_0 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z|\to\infty.$$

Сравнивая это соотношение с (23), убеждаемся в справедливости (22).

Воспользовавшись формулами (16), (19) и свойствами интегралов типа Коши из монографии [4], нетрудно проверить, что построенная в (20) функция $u(w)$ удовлетворяет неравенству (3) из определения класса H_L^0 с показателем $\varepsilon = -1/2$.

Поскольку $\cos\gamma(w_1, w_2, \xi_0) = \cos\gamma(w_1, w_2 + 2\pi k, \xi_0)$, $\sin\gamma(w_1, w_2, \xi_0) = \sin\gamma(w_1, w_2 + 2\pi k, \xi_0)$ и $R(w_1, w_2, \xi_0) = R(w_1, w_2 + 2\pi k, \xi_0)$ для любого целого k, то функция $u(w)$ из (20), очевидно, 2π-периодическая по w_2.

Непосредственной проверкой с учетом (21) можно убедиться, что функция (20) удовлетворяет условиям при $w_1 \to \pm\infty$ (см. п. 3 из определения класса гладкости H_L^0).

Таким образом, явное решение задачи построено и дается формулой (20).

Теорема 2. *Если $q^+(w_1), q^-(w_1)$ принадлежат $C^{0,\lambda}[-\alpha, \alpha]$, где показатель Гельдера $\lambda \in (0,1]$, и выполнено необходимое условие разрешимости* (4)*, то решение задачи существует и дается формулой* (20)*, в которой A_0 — произвольная вещественная константа.*

С помощью функции $u(w)$, которая имеет смысл потенциала электрического поля, несложно определить другие параметры замагниченного полупроводника (напряженность электрического поля, плотность тока) по формулам (1).

Литература

1. *Габов С.А., Крутицкий П.А.* // Матем. моделирование. 1989. **1**, № 5. С. 71.
2. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Т.* Физика полупроводников. М., 1990.
3. *Владимиров В.В., Волков А.Ф., Мейликов Е.З.* Плазма полупроводников. М., 1979.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
5. *Крутицкий П.А.* // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 4. С. 143.
6. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1990. **30**, № 11. С. 1689.

Поступила в редакцию
04.04.97