

где

$$I_{\perp} = \pi^{2-\zeta+\varepsilon} \Gamma^{-1}(\varepsilon - \zeta + 2) \int_0^{\infty} d\omega^2 (\omega^2)^{\varepsilon-\zeta+1} \times \left[F(p^2 + \omega^2, pk_i) - \sum_{l=0}^{\zeta-3} \frac{(\omega^2)^l}{l!} F^{(l)}(p^2, pk_i) \right]. \quad (17)$$

По терминологии Вильсона, формула (17) представляет собой не что иное, как определение интеграла от функции $F(p^2 + \omega^2, pk_i)$ по «поперечному пространству» нецелой размерности $2(\varepsilon - \zeta + 2)$. В свою очередь формула (16) определяет $I(\varepsilon)$ как интеграл по «продольному пространству» целой положительной размерности 2ζ от $I_{\perp}(p)$. Совместно формулы (16) и (17) задают $I(\varepsilon)$ как интеграл нецелой размерности $4 + 2\varepsilon$ от функции $F(p, k_i)$. Поэтому при желании можно воспользоваться хорошо разработанной техникой интегрирования по пространствам нецелой размерности. Надо только иметь в виду, что каждое такое интегрирование будет

проводиться со своим значением ε ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и т.д.). Для перехода к физической размерности нужно к полученному результату последовательно применять операции $\mathcal{L}(\varepsilon_2 \downarrow 0)$, $\mathcal{L}(\varepsilon_1 \downarrow 0)$ и т.д.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. 'tHooft G., Veltman M. // Nucl. Phys. 1972. **B44**. P.189
2. Славнов Д.А. // ТМФ. 1997. **110**. С.399.
3. Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. **20**. С.585.
4. Ильин В.А., Имашев М.С., Славнов Д.А. // ТМФ. 1982. **52**. С.177.
5. Славнов Д.А. // ТМФ. 1985. **62**. С.335.
6. Weinberg S. // Phys. Rev. 1960. **118**. P.838.
7. Славнов Д.А. // ТМФ. 1973. **17**. С.169.
8. Wilson K.G. // Phys. Rev. 1973. **D7**. P.2911.
9. Коллинз Дж. Перенормировка. М., 1988.

Поступила в редакцию
06.06.97

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА ИНВАРИАНТНАЯ И КООРДИНАТНАЯ ДЛИНА В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Определены временные и пространственные масштабы в инерциальных системах отсчета на основе финслеровой инвариантности, указана соответствующая финслерова метрическая функция и вычислены финслеровы коэффициенты деформаций.

Продолжая работы [1–2] и используя принятые в них обозначения, рассматриваем две системы отсчета S_0 и $S(v)$ и используем финслеровы кинематические преобразования:

$$\begin{aligned} T &= H_{(0)}^0 t + H_{(1)}^0 x, \\ X &= H_{(0)}^1 t + H_{(1)}^1 x, \quad Y = H_{(2)}^2 y, \quad Z = H_{(3)}^3 z \end{aligned} \quad (1)$$

или их векторное представление

$$X^P = H_{(Q)}^P x^Q, \quad (2)$$

где $X^P = (T, X, Y, Z)$ относятся к S_0 и $x^P = (t, x, y, z)$ относятся к $S(v)$; $P, Q, R = 0, 1, 2, 3$. Справедливо тетрадное представление

$$g_{PQ}(v) = \sum_{R=0}^3 q_R H_P^{(R)}(v) H_Q^{(R)}(v) \quad (3)$$

для финслерова метрического тензора, где

$$q_P = (1, -1, -1, -1) \quad (4)$$

в соответствии с пространственно-временной сигнатурой тензора g_{PQ} . Явные выражения для компонент

$[H_{(Q)}^P(v), H_P^{(Q)}(v)]$ указаны в работе [1]. Мы ограничимся случаем $j = 1$.

Кинематические преобразования (1)–(2) имеют чисто пассивный смысл: они задают правила изменения компонент векторов при переходе из S_0 в $S(v)$. Физической причиной этих изменений является деформация собственных масштабов (эталонов времени и длины) в системе отсчета $S(v)$ вследствие ее движения относительно системы отсчета S_0 . При этом сами четырехмерные векторы $[X^P]$ остаются неизменными, сохраняют свое направление в четырехмерном пространстве-времени.

Как и в [1, 2], мы предполагаем, что x^1 -ось и X^1 -ось систем отсчета S_0 и $S(v)$ параллельны и что у трехмерного вектора скорости \mathbf{v} компоненты v^2 и v^3 равны нулю, и используем обозначение $v = v^1$, так что $S(v)$ движется вдоль x^1 -оси, если $v > 0$, и против — если $v < 0$.

Определение

$$\|X\|_{S(v)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{PQ}(v) X^P X^Q \quad (5)$$

задает координатную длину вектора X^P относительно системы отсчета $S(v)$. Используя преобразования (2)–(4), получим

$$\begin{aligned} \|X\|_{S(v)} &= (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2, \\ |\mathbf{x}| &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому справедливо

Предложение 1. В $S(v)$ координатная длина четырехмерных векторов определяется обычным псевдоевклидовым правилом (6) независимо от финслерова обобщения.

Фактически это утверждение является прямым следствием пространственно-временной сигнатуры (4) финслерова метрического тензора. Можно также сказать, что пространство наблюдений в системе отсчета $S(v)$ является псевдоевклидовым. Поскольку $g_{PQ}(v=0) = g_P \delta_{PQ}$ (следствие равенств (3) и (4)), то определение (6) совпадает с определением (5) в самой выделенной системе отсчета S_0 . Такого совпадения нет в системе отсчета $S(v)$ при финслеровом обобщении.

В то же время $S(v)$ -координатная длина (5) не инвариантна относительно финслеровых кинематических преобразований (1)–(2), ибо они более общие, чем лоренцевы.

Пусть теперь существует финслерова метрическая функция $F(T, \mathbf{X})$, инвариантная относительно преобразований (1)–(2), так что

$$F(T, \mathbf{X}) = F(t, \mathbf{x}). \quad (7)$$

Назовем

$$\|X\|_F \stackrel{\text{def}}{=} F(X^0, \mathbf{X}) \quad (8)$$

F -длиной четырехмерного вектора (X^P). Согласно (7) она инвариантна относительно кинематических преобразований (1)–(2). Это свойство инвариантности F -длины позволяет использовать ее для согласования масштабов во времени и длины в различных системах отсчета.

Действительно, пусть (\tilde{X}^P) и $(\tilde{\tilde{X}}^P)$ — два времениподобных вектора. В собственных системах отсчета они имеют компоненты $(\tilde{x}^0, 0, 0, 0)$ и $(\tilde{\tilde{x}}^0, 0, 0, 0)$ соответственно. Величины \tilde{x}^0 и $\tilde{\tilde{x}}^0$ имеют физический смысл собственных промежутков времени. Поскольку

$$F(x^0, 0, 0, 0) \equiv x^0 \quad (9)$$

(как следствие инвариантности (7)), то справедливы равенства

$$\tilde{x}^0 = F(\tilde{X}^P), \quad \tilde{\tilde{x}}^0 = F(\tilde{\tilde{X}}^P). \quad (10)$$

Итак, мы видим, что верно

Предложение 2. Финслерова F -длина времениподобного вектора имеет ясный физический смысл: она равна собственному времени, соответствующему этому вектору. В частности, как следствие (10), равенство $\tilde{x}^0 = \tilde{\tilde{x}}^0$ собственных промежутков времени имеет место тогда и только тогда, когда равны F -длины векторов, т. е. когда

$$F(\tilde{X}^P) = F(\tilde{\tilde{X}}^P). \quad (11)$$

Собственное время определяется инвариантной финслеровой F -длиной (которая отлична от $S(v)$ -координатной длины). Справедливо тождество

$$F(T, 0) = T. \quad (12)$$

Нас теперь интересует альтернативная

Проблема. Какой инвариантный смысл следует придать понятию «отрезки равной длины в системе отсчета $S(v)$ »?

Рассмотрим в $S(v)$ отрезок на x^1 -оси и обозначим через x его длину. Он геометрически представляется четырехмерным вектором $x^P = (0, x, 0, 0)$. Преобразуя этот вектор из $S(v)$ в S_0 согласно закону (1), получим

$$T = xv/V(v), \quad X = x(1 - g|v|)/V(v) \quad (13)$$

(использованы формулы (59) из [1]). Если F — финслерова метрическая функция, относящаяся к такому случаю, то должно выполняться равенство

$$F(T, X) = xF(v, 1 - g|v|)/V(v). \quad (14)$$

По своему физическому смыслу понятие инвариантной пространственной длины предполагает равенство

$$x = F(T, X) \quad (15)$$

(ср. (10)). Вследствие (15) равенство (14) возможно тогда и только тогда, когда функция F удовлетворяет тождеству

$$F(v, 1 - g|v|) = V(v). \quad (16)$$

Наиболее полное соответствие с обычными представлениями в системе отсчета S_0 будет достигаться, когда выполняется еще и тождество

$$F(0, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|, \quad |\mathbf{X}| = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2} \quad (17)$$

(мы считаем $F > 0$). Условия (17) и (12) аналогичны друг другу.

В работе [1] из условия инвариантности (7) была выведена финслерова метрическая функция $F(T, \mathbf{X})$ для случая времениподобных векторов (X^P), для которых $|\mathbf{X}|/|T| < g_+$. Именно эту функцию следует использовать в (8)–(12). Метод вывода, использованный в [1], применим и к случаю, когда векторы (X^P) пространственноподобны, т. е. когда $|\mathbf{X}|/|T| > g_+$. Опуская вывод и вычисления, приведем полученный результат:

$$F(T, \mathbf{X}) = (|\mathbf{X}| - g_+|T|)^{g_+/2A} (|\mathbf{X}| - g_-|T|)^{-g_-/2A}, \quad (18)$$

$$|\mathbf{X}|/|T| > g_+.$$

Полагая

$$F(T, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|Z(q), \quad q = |T|/|\mathbf{X}| < 1/g_+, \quad (19)$$

находим соответствующую производящую функцию:

$$Z(q) = (1 - g_+q)^{g_+/2A} (1 - g_-q)^{-g_-/2A}. \quad (20)$$

Поскольку $Z(0) = 1$, то из (19) следует, что справедливо

Предложение 3. При выборе (18) тождество (17) выполняется.

Удовлетворяет ли функция (18) тождеству (14)? Проверим: $1 - g|v| - g_{\pm}|v| = 1 - (g_{\pm} + g)|v| = 1 + g_{\mp}|v|$ (использована формула (36) из [1]). Следовательно, левая часть в (14) будет равна функции $(1 + g_{-}|v|)^{g_+/2A} \times (1 + g_{+}|v|)^{-g_-/2A}$. Но последняя функция есть в точности $V(v)$ (см. (34) в работе [1]).

Итак, мы доказали, что справедливо

Предложение 4. При использовании финслеровой метрической функции (18) тождество (14) удовлетворяется во всей области $|v| < g_+$.

Предложение 5. Финслерова метрическая функция (18) определяет инвариантную пространственную длину в соответствии с (15).

Если (\tilde{X}^P) и $(\tilde{\tilde{X}}^P)$ — два вектора в $(g < g_+)$ -области, то соответствующие им собственные пространственные длины равны тогда и только тогда, когда $F(\tilde{X}^P) = F(\tilde{\tilde{X}}^P)$, т.е. условие вида (11) применимо и в этом случае. Итак, мы дали полное решение сформулированной выше проблемы.

Интересно еще рассмотреть в $S(v)$ вектор $x^P = (0, 0, y, 0)$, т.е. элемент длины y на x^2 -оси в $S(v)$. Используя (1), получим $Y = y/d(v)$ ($d(v)$ — функция, найденная в [1] и задаваемая формулой (39) из [1]). Согласно (17) $F(0, Y) = Y$. Следовательно, мы доказали

Предложение 6. F -инвариантная длина отрезка, перпендикулярного направлению трехмерного вектора скорости \mathbf{v} , не деформируется.

Предложение 7. $S(v)$ -координатные длины x и y равны в F -инвариантном смысле тогда и только тогда, когда

$$Y = d(v)x. \quad (21)$$

Напротив, $S(v)$ -инвариантные длины x и y равны в системе отсчета $S(v)$, когда просто $x = y$, а $S(v)$ -координатная длина y деформируется (по закону $y = d(v)Y$, где $d(v) \neq 1$ при финслеровом подходе) в результате движения системы отсчета $S(v)$ относительно системы отсчета S_0 . Поэтому предложения 6 и 7 необходимо иметь в виду при внимательном анализе соответствующих релятивистских экспериментов.

Введем следующее

Определение. Пусть L — трехмерная поверхность в системе отсчета $S(v)$, образованная концами отрезков, выходящих из начала координат (из точки $(0,0,0,0)$) системы отсчета $S(v)$. Если каждой точке $(x, y, z) \in L$ отвечает одинаковая F -инвариантная длина R , то L называется поверхностью равной F -инвариантной длины R в $S(v)$ или, для краткости, R -поверхностью в $S(v)$.

Отличие финслерова параметра g от нуля приводит к такому эффекту, что R -поверхность перестает быть (привычной) сферой!

Чтобы получить уравнение для R -поверхности, мы должны рассмотреть в $S(v)$ пространственноподобные векторы $x^P = (0, x, y, z)$ и преобразовать их в систему

отсчета S_0 по закону (1), а затем вычислить величину $q = |T|/|\mathbf{X}|$, что дает

$$q = q(g; v, \theta) = |v \cos \theta| / [Q(v) + (v^2 - g|v| + g^2 v^2) \cos^2 \theta]^{1/2}. \quad (22)$$

Мы используем обозначения

$$r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}, \quad x = r \cos \theta. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (20), мы из (19) найдем, что справедливо

Предложение 8. Уравнение R -поверхности в $S(v)$ имеет вид $r = r(\theta)$, где

$$r(\theta) = RV(v) / [(1 - g|v|)Z(q) \cos \theta]. \quad (24)$$

В случае $q \ll 1$ функция (20) разлагается следующим образом:

$$Z(q) = 1 + gq - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}gq^3 - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{2}{3}g^2\right)q^4 + O(5), \quad (25)$$

$$Z^2(q) = 1 + 2gq - q^2 - \frac{2}{3}gq^3 + \frac{1}{6}g^2q^4 + O(5), \quad (25a)$$

так что учет лишь низшей поправки по g в функции (19) даст приближенное выражение

$$F^2(T, \mathbf{X}) = \mathbf{X}^2 - T^2 + 2g|\mathbf{X}||T|, \quad (26)$$

представляющее собой ближайшее финслерово обобщение обычного лоренцева определения длины $|\mathbf{X}|^2 - T^2$ пространственноподобных векторов. Если подставить (1) в (26) и затем использовать (23), то получится представление

$$F^2(T, \mathbf{X}) = r^2(\theta)[1 - g|v|(1 - |\cos \theta|)^2], \quad (27)$$

из которого следует, что в таком низшем приближении функция (24) может быть взята в простом виде

$$r(\theta) = n(\theta)R, \quad n(\theta) = 1 + \frac{1}{2}g|v|(1 - |\cos \theta|)^2. \quad (28)$$

Из (28) прямо следует, что

$$r(0) = R, \quad n(0) = 1, \quad (29)$$

$$r(\theta) = r(\theta + \pi), \quad (30)$$

и функция

$$u(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} r\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) / r(\theta) \quad (31)$$

равна

$$u(\theta) = 1 + \frac{1}{2}g|v|[2(|\cos \theta| - |\sin \theta|) - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]. \quad (32)$$

Если воспользоваться выражением

$$c(\theta) = 1 + \frac{1}{2}g|v|(1 + \cos^2 \theta) \quad (33)$$

для скорости светового сигнала (формула (49) в работе [2]), то из (28) получим

$$n(\theta)/c(\theta) = 1 - g|v||\cos \theta|, \quad (34)$$

а функция

$$p(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} [c(\theta)]^{-1} - u(\theta) \left[c\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right]^{-1} \quad (35)$$

упростится и примет вид

$$p(\theta) = g|v|(|\sin \theta| - |\cos \theta|) \quad (36)$$

(использована формула (32)). Справедливо равенство

$$p(\theta) = -p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad (37)$$

а также

$$c(\theta + \pi) = c(\theta + 2\pi) = c(\theta), \quad c\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = c\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right). \quad (38)$$

Функция (22) может быть представлена в виде

$$q = |v \cos \theta| c(\theta). \quad (39)$$

Равенство (30) указывает на «равноправность взаимно-противоположных направлений в системе отсчета $S(v)$ », т.е. справедливо

Предложение 9. При поворотах отрезков на 180° их F -длина не изменяется.

Из (28) следует сделать вывод, что $n(\theta)$ является «коэффициентом деформации отрезков x^1 -оси при повороте на угол θ ». Другими словами, как следствие (28) и (29), справедливо

Предложение 10. Если на x^1 -оси в $S(v)$ находится отрезок длиной x , то после поворота на угол θ его F -длина должна измениться и стать равной

$$s(\theta) = n(\theta)x. \quad (40)$$

Ясен и смысл функции (31): она является коэффициентом деформации отрезка, составляющего угол θ с x^1 -осью, при повороте отрезка на угол 90° , т.е. справедливо

Предложение 11. Если отрезок в $S(v)$ составляет угол θ с x^1 -осью и имеет длину $l(\theta)$, то после поворота на угол 90° его F -длина должна измениться и стать равной $l(\theta + \pi/2)$ согласно равенству

$$l(\theta + \pi/2) = u(\theta)l(\theta). \quad (41)$$

Применим полученные формулы к анализу эксперимента типа Майкельсона–Морли. Пусть в $S(v)$ имеется отрезок длиной l_1 под углом θ к x^1 -оси и отрезок длиной l_2 под углом $(\theta + \pi/2)$ к x^1 -оси. Отрезки опираются на точку $C = (0, 0, 0, 0)$ (центр в $S(v)$) и перпендикулярны друг другу. Из точки C выходят два световых сигнала, один сигнал идет вдоль l_1 -отрезка, в конце его отражается обратно и возвращается в точку C , а другой сигнал совершает аналогичный путь вдоль l_2 -отрезка. Обозначим через τ разность времени хода этих сигналов. Повернем l_1l_2 -систему на угол 90° и повторим опыт. Обозначим через τ' соответствующую новую разность времени хода. Имеем

$$\tau = \frac{l_1}{c(\theta)} + \frac{l_1}{c(\theta + \pi)} - \frac{l_2}{c(\theta + \pi/2)} - \frac{l_2}{c(\theta + 3\pi/2)},$$

$$\tau' = \frac{l_1 u(\theta)}{c(\theta + \pi/2)} + \frac{l_1 u(\theta)}{c(\theta + 3\pi/2)} - \frac{l_2 u(\theta + \pi/2)}{c(\theta + \pi)} - \frac{l_2 u(\theta + \pi/2)}{c(\theta + 2\pi)}.$$

Использование формул (35)–(38) сразу дает простой результат:

$$\frac{1}{2}(\tau - \tau') = (l_1 + l_2)p(\theta), \quad p(\theta) = g|v|(|\sin \theta| - |\cos \theta|). \quad (42)$$

В частности,

$$\frac{1}{2}(\tau - \tau') = \begin{cases} -(l_1 + l_2)g|v|, & \text{если } \theta = 0, \\ 0, & \text{если } \theta = 45^\circ, \\ (l_1 + l_2)g|v|, & \text{если } \theta = 90^\circ. \end{cases} \quad (43)$$

Формулы (42)–(43) указывают на существенную анизотропию финслерова эффекта.

Финслерова функция $Z(q)$ (формула (20)) относится к случаю пространственноподобных векторов X^P . Ее аналогом для случая времениподобных векторов X^T является функция $V(v)$ (даваемая формулой (34) в работе [1]). В римановом (псевдоевклидовом) пределе мы имеем $Z(q)|_{g=0} = \sqrt{1 - (T/|X|)^2}$ и $V(v)|_{g=0} = \sqrt{1 - (|X|/T)^2}$.

Функции $Z(q)$ и $V(v)$ разительно отличаются характером разложения по своим аргументам, соответственно по $q \ll 1$ и по $v \ll 1$, а именно: финслеровы поправки входят в разложение функции $V(v)$ по v начиная только с членов $O(gv^3)$, т.е. с весьма высокого порядка малости, в то время как согласно (25) в разложение функции $Z(q)$ финслеровы поправки входят уже начиная с членов самого низшего порядка $O(gq)$! Именно последняя причина вызвала появление $O(gv)$ -поправок в формулах (26)–(36). Наличие таких поправок, резкое отличие в характере разложения функций $Z(q)$ и $V(v)$ — факты, которые едва ли можно было бы «предвидеть» до нахождения явного вида функции $Z(q)$ (формула (20)). Общей чертой в разложениях обсуждаемых функций является только то, что $Z(q)$ не содержит поправок типа $O(gq^2)$, а $V(v)$ не содержит поправок типа $O(gv^2)$.

В совокупности доказанные выше предложения 1–11 дают подробный ответ на вопрос, «как возникают финслеровы деформации временных и пространственных масштабов», и предлагают замкнутые и достаточно точные аналитические средства для их вычисления. В частности, предложения 9–11 указывают на простые поправки на $O(gv)$ -уровне, которые необходимо учитывать при внимательном финслеровом анализе известных релятивистских экспериментов (см., напр., [3, 4]), при предсказании новых пост-лоренцевых релятивистских экспериментов. Так, например, появляются простые финслеровы $O(gv)$ -поправки (42)–(43) к эффектам в экспериментах типа Майкельсона–Морли. Зная явный вид функций $Z(q)$ и $V(v)$, можно вычислять финслеровы поправки любого более высокого порядка.

Литература

1. Асанов Г.С. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С 18. (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 1. P. 15).
2. Асанов Г.С. // Там же. 1996 № 3. С. 8 (Ibid. No. 3. P. 1).
3. Haugan M.P., Will C.M. // Physics Today. 1987. 40. P. 69.
4. Will C.M. // Phys. Rev. 1992. D45. P. 403.

Поступила в редакцию
19.05.97