УДК 551.466

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ 5-ГО ПОРЯДКА*)

С. А. Арсеньев, А. Ю. Губарь, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Квадратично-кубичное нелинейное уравнение 5-го порядка для длинных волн в океане сведено к нелинейному уравнению Шрёдингера. Получены и исследованы решения в виде бризерных цугов длинных волн, модулированных кинками огибающих. Доказано, что длинные волны на воде конечной глубины устойчивы.

В последнее время интенсивно изучаются нелинейные эволюционные уравнения 5-го порядка, описывающие, в частности, волны в холодной квазинейтральной плазме [1], в электромагнитных линиях передач [2–4], гравитационные волны под ледяным покровом [5, 6], сейсмические волны в пористых и трещиноватых средах [7], длинные гравитационные волны на воде во втором приближении [8] при разложении потенциала скорости по параметрам амплитудной ($\alpha = a/H$, где a — амплитуда и H — глубина) и частотной ($\beta = \lambda^2/H^2$, где λ — длина волны) дисперсий:

$$\begin{gathered}\eta_t + \eta_x + \frac{\beta}{6}\eta_{3x} + \frac{7\beta^2}{144}\eta_{5x} + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \\ + \frac{5\alpha\beta}{12}\left[\eta\eta_{3x} + \frac{7}{2}\eta_x\eta_{2x}\right] - \frac{3a^2}{8}\eta^2\eta_x = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

До сих пор известны лишь два точных решения уравнений 5-го порядка, соответствующие периодическим стационарным волнам и уединенной волне фиксированной амплитуды [9, 10]. В работах [11–14] уравнения 5-го порядка исследовались численно и аналитически, в частности, удалось найти некоторые автомодельные решения. В настоящей статье мы покажем,что уравнение 5-го порядка (1) можно свести к кубично-нелинейному уравнению Шрёдингера, найдем его волновые решения и исследуем их свойства.

Введем замену $x \to x - t$ и перепишем (1) в виде

$$\begin{gathered}\widehat{L} + \frac{3}{2}\alpha\eta(\partial_x\eta) + \frac{5\alpha\beta}{12}\eta(\partial_x^3\eta) + \\ + \frac{35}{24}\alpha\beta(\partial_x\eta)(\partial_x^2\eta) - \frac{3\alpha^2}{8}\eta^2(\partial_x\eta) = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\widehat{L} = L(\partial_t, \partial_x)$ — линейный дифференциальный оператор, ∂_t и ∂_x — сокращенная запись частных производных. Если обозначить $\partial_x = p$ и $\partial_t = q$, то

$$L(p,q) = p + \frac{\beta}{6}q^3 + \frac{7\beta^2}{144}q^5. \tag{3}$$

Будем искать решение (2) в виде асимптотического ряда, содержащего малый параметр α:

$$\eta = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \dots \tag{4}$$

Здесь $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — приближения соответствующего порядка, зависящие от медленных и быстрых переменных x и t:

$$\begin{aligned}&x \to x_0, X_1, X_2, \dots, X_N = \alpha^n x,\\ &t \to t_0, T_1, T_2, \dots, T_N = \alpha^n t.\end{aligned} \tag{5}$$

При переходе к масштабным разложениям переменных (5) соответствующие дифференциальные операторы изменяются:

$$\partial_x \to \partial_{x_0} + \sum \alpha^k \partial_{X_k}, \partial_t \to \partial_{t_0} + \sum \alpha^k \partial_{T_k}. \tag{6}$$

Подставляя (4)–(6) в (2) и рассматривая члены соответствующих порядков малости, получим уравнения для $\varphi_0, \varphi_1, \dots$:

$$L_0\varphi_0 = 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}L_0\varphi_1 + L_1\varphi_0 + \frac{3}{2}\varphi_0\partial_{x_0}\varphi_0 + \\ + \frac{5\beta}{12}\left[\varphi_0\partial_{x_0}^3\varphi_0 + \frac{7}{2}(\partial_{x_0}\varphi_0)(\partial_{x_0}^2\varphi_0)\right] = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}L_0\varphi_2 + \mathrm{L}_1\varphi_1 + L_2\varphi_0 + \frac{3}{2}\left[\partial_{x_0}(\varphi_0\varphi_1) + \partial_{X_1}\left(\frac{\varphi_0^2}{2}\right)\right] + \\ + \frac{5\beta}{12}\left(\varphi_1\partial_{x_0}^3\varphi_0 + 3\varphi_0\partial_{x_0}^2\partial_{X_1}\varphi_0 + \varphi_0\partial_{x_0}^3\varphi_1\right) + \\ + \frac{35\beta}{24}\Big\{\left[(\partial_{X_1}\varphi_0) + (\partial_{x_0}\varphi_1)\right]\left(\partial_{x_0}^2\varphi_0\right) + \\ + (2\partial_{x_0}\partial_{X_1}\varphi_0 + \partial_{x_0}^2\varphi_1)(\partial_{x_0}\varphi_0) - \frac{3}{8}\varphi_0^2\partial_{x_0}\varphi_0\Big\} = 0,\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}&L_0 = L(\partial_{t_0}, \partial_{x_0}),\\ &L_1 = L_{0p}\partial_{T_1} + L_{0q}\partial_{X_1},\\ &L_2 = L_{0p}\partial_{T_2} + L_{0q}\partial_{X_2} + L_{0pp}\partial_{T_1}^2/2 + \\ &\qquad + L_{0pq}\partial_{T_1}\partial_{X_1} + L_{0qq}\partial_{X_1}^2/2\end{aligned}$$

— соответствующие члены тейлоровских разложений оператора в α-окрестности точки $(\partial_{t_0}, \partial_{x_0})$,

$$L_{0p}n_q m \equiv \left.\frac{\partial^{n+m}}{\partial p^n \partial q^m} L(p,q)\right|_{p=\partial_{t_0},\, q=\partial_{x_0}}.$$

Будем искать решение нулевого приближения φ_0 виде гармонической волны с медленно меняющейся

*) Работа доложена на Всероссийском семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» (Красновидово, 1996).

амплитудой:

$$\varphi_0 = A(X_1, \ldots, T_1, \ldots)\exp(i\theta) + \text{ к.с.}, \quad \theta = kx - \omega t + \delta. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7), получим дисперсионное соотношение

$$L(-i\omega, ik) = 0 \leftrightarrow \omega = \omega(k). \tag{11}$$

Подстановка же (10)–(11) в (8) приводит к уравнению для функции φ_1:

$$L_0\varphi_1 + (\partial_{T_1} + c_g\partial_{X_1})A\exp(i\theta) + \frac{3}{2}ikA^2\exp(2i\theta) + \frac{45}{24}(ik)^3\beta A^3\exp(2i\theta) + \text{ к.с. } = 0, \tag{12}$$

где $c_g = d\omega/dk = c_g(k)$ — групповая скорость. Чтобы избежать секулярно растущих членов в φ_1, необходимо потребовать, чтобы

$$(\partial_{T_1} + c_g\partial_{X_1})A = 0.$$

Отсюда следует, что возмущение уровня поверхности воды в первом порядке малости распространяется с групповой скоростью

$$A = A(\theta_1, X_2, \ldots, T_2, \ldots), \qquad \theta_1 = X_1 - c_gT_1. \tag{13}$$

Общее решение уравнения (12) можно представить в виде

$$\varphi_1 = A_{10} + A_{11}\exp(i\theta) + A_{12}\exp(2i\theta) + \text{ к.с.} \tag{14}$$

Для A_{12} в случае отсутствия резонанса на второй гармонике, т.е. при $L(-2i\omega, 2ik) \neq 0$, из (12) и (14) получаем выражение

$$A_{12} = -\left[\frac{(3/2)ik + (45/24)\beta(ik)^3}{L(-2i\omega, 2ik)}\right]A^2 \equiv f(k)A^2. \tag{15}$$

Далее без потери общности можно положить $A_{11} = 0$, а величину A_{10} определить из уравнения (9) в следующем порядке малости. По тем же самым операционным соображениям (14) ищем решение для φ_2 в виде

$$\varphi_2 = A_{22}\exp(2i\theta) + A_{23}\exp(3i\theta) + \text{ к.с.} \tag{16}$$

Подстановка (10), (14), (15) в (9) с требованием отсутствия секулярно растущих членов вызывает необходимость приравнять к нулю все члены, пропорциональные $\exp(i\theta)$ и 1. Это приводит к следующим уравнениям:

$$L_2A + \left[\frac{3}{2}(ik) + \frac{5\beta}{12}(ik)^3\right]AA_{10} + \left[f(k)\frac{3}{2}(ik) - \frac{3}{8}(ik)\right]A^2A^* = 0, \tag{17}$$

$$-c_g\partial_{\theta_1}A_{10} + \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{4}(ik)^2 - \frac{35}{24}(ik)^3\beta\right]\partial_{\theta_1}A^2 = 0. \tag{18}$$

Интегрируя (18), получаем выражение для A_{10}:

$$A_{10} = \frac{1}{c_g}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{24}\beta k^2\right)A^2 + B(\tau). \tag{19}$$

Наконец, подставляя (19) в (17), получаем кубично-нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$i\frac{\partial A}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} + [\nu_1(\tau) + \nu(k)A^2]A = 0. \tag{20}$$

Здесь

$$\nu(k) = \frac{9k}{4\chi}\left[1 + \frac{47}{72}\chi + O(\chi^2)\right] > 0,$$

$$\xi = \theta_1\left(\frac{-c_g}{2}\right)^{-1/2}, \qquad \tau = \frac{1}{a}\left(T_2 - \frac{aX_2}{c_g}\right), \qquad \chi = \beta k^2,$$

а $\nu_1(\tau)$ и $a = \text{const}$ определяются из конкретных начальных и граничных условий.

Положим для определенности $\nu_1(\tau) = \text{const}$, $\operatorname{Im}\nu_1 = 0$. Тогда, подставляя выражение

$$A = v(r)\exp[i(p\tau + q\xi)] \tag{21}$$

в уравнение (20), можно получить следующее уравнение:

$$-d_{rr}v + (q^2 - p + \nu_1)v - i(c + 2q)d_rv + \nu v^3 = 0. \tag{22}$$

Здесь $v(r)$ — действительная функция переменной $r = \xi - c\tau$, а c, p и q — постоянные величины. Поскольку v — действительная функция, имеет место равенство $c + 2q = 0$. Интегрируя (22), находим

$$d_{rr}v = E - V(v), \tag{23}$$

где $V(v) = bv^2 - (\nu v^4/2)$ и $b = p - q^2 - \nu_1$. Так как $\nu(k) > 0$, потенциал $V(v)$ имеет яму и, следовательно, (23) имеет финитное решение, если только $b > 0$. Это решение можно выразить через эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{sn}(n/m)$. Вводя более удобные обозначения, можно записать окончательный результат:

$$A = A_0\operatorname{sn}\left[\left(\frac{A_0}{m}\right) - \left(\frac{\nu}{2m}\right)^{1/2}(r - r_0)\right] \times \exp\left[i\left(pr - \frac{c\xi}{2}\right)\right] = R\exp(i\Phi). \tag{24}$$

Здесь A_0, m, c, r_0 — промежуточные действительные параметры и

$$p = \frac{\nu}{2}A_0^2\left[1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2\right] + \frac{c^2}{4} + \nu_1.$$

Алгебраическое выражение (24) описывает бризерный цуг волн. Он состоит из волн с амплитудой R первой гармоники, модулированной эллиптическим синусом порядка m, который определяется начальными условиями. Амплитуда R огибающей периодически осциллирует относительно переменной

$$\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{-c_g^1(k)/2}}(x - c_gt) - \alpha^2c\left[\frac{t - (a/c_g)x}{a}\right],$$

которая в первом порядке связана с системой волн, распространяющихся с групповой скоростью $c_g(k)$, и имеет в этой системе пространственный период осцилляций

$$\lambda = 4K(m)\left[-\frac{c_g'(k)}{2}\right]^{1/2} \Bigg/ \left[A_0\alpha\left(\frac{\nu}{2m}\right)^{1/2}\right], \qquad (25)$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Когда $m \to 0$, амплитуда бризерного цуга модулируется гармонической волной

$$\lim_{m\to 0} R \to A_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - c_g t) + O(\alpha^2)\right] + O(m^2). \qquad (26)$$

При определенном выборе $m = m(\alpha, \beta, k)$ этот период может быть конечным, т.е. иметь масштабы порядка 1 вместо $O(1/\alpha)$. Когда $m \to 1$, амплитуда бризерного цуга модулируется волной переключения или кинком с бесконечно большим периодом:

$$\lim_{m\to 1} R \to A_0 \operatorname{th}\left\{A_0\left[\frac{\nu(k)}{-c_g'(k)}\right]^{1/2}\alpha(x - c_g t) + O(\alpha^2)\right\}. \qquad (27)$$

Производная от кинка (27) представляет собой солитон. В общем случае форма бризерного цуга длинных волн на воде конечной глубины зависит от длины волны λ (25) и амплитуды A_0. Эта форма является переходной от гармоники (26) к волне переключения или кинку (27).

Существенно, что наряду с решениями типа бризеров (21), (24) уравнение (20) допускает и обычные волновые решения типа

$$A = A_0 \exp(i\varphi_0), \qquad \varphi_0 = k\xi - \omega t, \qquad (28)$$

которые оказываются устойчивыми по отношению к возмущениям амплитуд и фаз. Другими словами, модуляционная неустойчивость, типичная для гравитационных волн на глубокой воде (неустойчивость типа Захарова–Бенжамина–Фейра [15]), в нашем случае длинных волн на воде конечной глубины не существует. Доказательство этого нетривиального утверждения, фактически устанавливающего устойчивость длинных волн на воде во втором приближении, проведем, рассматривая малые добавки к решению (28):

$$A = A_0 + \delta, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1. \qquad (29)$$

Подставляя (29) в (20) и удерживая только линейные члены по δ и φ_1, получим следующую систему уравнений относительно возмущений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - 2k\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\delta - A_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi^2} = 0,$$
$$\left(\omega - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + k^2 + \nu_1 + 3\nu A_0^2\right)\delta + A_0\left(2k\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\varphi_1 = 0. \qquad (30)$$

Разыскивая решение (30) в виде волн δ, $\varphi_1 \sim \exp[i(\varkappa\xi - \Omega\tau)]$, получим дисперсионное соотношение

$$\Omega = 2\varkappa k \pm \sqrt{\varkappa^2 + 2\nu A_0^2}, \qquad (31)$$

из которого следует ввиду положительности ν и вещественность Ω, что и требовалось доказать. Формула (31) описывает боголюбовский спектр возбуждений в движущейся со скоростью ω/k среде, но мы не будем рассматривать здесь соответствующую физическую аналогию.

Полученные результаты имеют важное значение для теории длинных волн на воде, поскольку устанавливают свойства этих волн во втором приближении. Мы показали, что эти волны являются устойчивыми и их можно изучать с помощью нелинейного уравнения Шрёдингера. Найденные нами бризерные решения объясняют, например, особенности распространения цунами в океане в виде цугов волн с изменяющейся во времени огибающей. Из-за этого, в частности, волны цунами могут подходить к берегу и с отрицательной, и с положительной фазой колебаний уровня. В имеющихся каталогах цунами можно найти много примеров подобных записей колебаний уровня океана.

Литература

1. *Березин Ю.А.* Моделирование нелинейных волновых процессов. Новосибирск, 1982.
2. *Островский Л.А.* // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М., 1989. С. 29.
3. *Воляк К.И., Горшков А.С.* // Тр. ФИАН. 1984. **154**. С. 78.
4. *Nagashima H.* // J. Phys. Soc. Japan. 1979. **47**, No. 4. P. 1387.
5. *Марченко А.В.* // Прикл. матем. и мех. 1988. **52**, № 2. С. 230.
6. *Ильичев А.Т., Марченко А.В.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 1. С. 88.
7. *Николаевский В.Н.* // Там же. 1992. № 5. С. 110.
8. *Арсеньев С.А.* // Доклады Академии Наук. 1994. **234**, № 5. С. 635.
9. *Kano K., Nakayama T.* // J. Phys. Soc. Japan. 1981. **50**, No. 2. P. 361.
10. *Yamamoto Y., Takazawa E.I.* // Ibid. 1981. **50**, No. 11. P. 4104.
11. *Kawahara T.* // Ibid. 1972. **33**, No. 1. P. 260.
12. *Ильичев А.Т.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 99.
13. *Ильичев А.Т.* // Математические заметки. 1992. **52**, № 1. С. 42.
14. *Arrseniev S.A., Gubarr A.Y.* // Ocean Modelling. 1995. No. 106. P. 1.
15. *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М., 1987.

Поступила в редакцию
02.12.96