АСТРОНОМИЯ

УДК 521.19

ВАРИАЦИИ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА ВНЕШНЕЙ ОРБИТЫ ξ U.Ma.

Н. А. Соловая

(ГАИШ)

Получено аналитическое решение для вариаций эксцентриситета внешней орбиты в тройных звездных системах типа ε Lyr. В качестве примера рассмотрена система ξ U.Ma.

Введение

В работе [1] была получена система дифференциальных уравнений возмущенного движения тройной системы, в гамильтониане которой учтены члены третьего и четвертого порядков. Использовался метод вариации произвольных постоянных и была введена новая система канонических переменных. Члены высших порядков могут играть заметную роль в случае возникновения резонансов. Харрингтон [2] учитывал влияние членов высших порядков численными методами. Оказалось, что это требует большой затраты машинного времени, и поэтому желательно разработать аналитичесий способ учета возмущений.

В настоящей статье, учитывая третий член в гамильтониане, мы получили аналитические выражения для возмущений эксцентриситета внешней орбиты. В промежуточном движении орбита удаленной точки есть некеплеровский эллипс с движущимся узлом и периастром и неизменным эксцентриситетом. Для возмущенного движения, если принять в расчет третий член, гамильтониан зависит от двух угловых переменных g_1 и g_2 — периастров внешней и внутренней орбит. В этом случае эксцентриситет внешней орбиты имеет слабые периодические вариации. В качестве примера выбрана система ξ U.Ma.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение трех материальных точек со сравнимыми массами m_0, m_1, m_2 и отношением больших полуосей $a_1/a_2 < 0,1$. Орбиту тесной пары будем называть внутренней, а орбиту удаленной точки — внешней. Оскулирующие орбиты составляющих тройной системы предполагаются эллиптическими, причем их эксцентриситеты и наклонности могут быть произвольными. Возмущающая функция, из которой исключены короткопериодические члены, имеет вид

$$\begin{aligned}R = &\frac{15}{512}\gamma_4 \frac{L_1^6}{L_2^8}\frac{e_1 e_2\sqrt{1-e_2^2}}{(1-e_2)^3(1+e_2)^3}\times\\ &\times\Big[\left(4+3e_1^2\right)\left(-1-11q+5q^2+15q^3\right)\cos(g_1-g_2)+\\ &+35e_1^2(1-q)(1+q)^2\cos(3g_1-g_2)+\\ &+\left(4+3e_1^2\right)\left(-1+11q+5q^2-15q^3\right)\cos(g_1+g_2)+\\ &+35e_1^2(-1+q)^2(1+q)\cos(3g_1+g_2)\Big],\end{aligned} \tag{1}$$

в которой γ_4 — коэффициент, зависящий от масс, L_1 и L_2 — элементы Делоне, e_1 и e_2 — эксцентриситеты внутренней и внешней орбит, q — косинус угла взаимного наклона, g_1 и g_2 — аргументы периастров орбит. Каноническая система уравнений в переменных Λ_j и λ_j имеет вид

$$\frac{d\Lambda_j}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}, \qquad \frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial \Lambda_j}, \tag{2}$$

для $j = 1, 2, 3, 4, 5$, где

$$Z = \varepsilon + R, \tag{3}$$

$$\Lambda_1 = A_1, \quad \Lambda_2 = A_2, \quad \Lambda_3 = \frac{2}{\pi} W_1(g_1),$$

$$\Lambda_4 = A_4, \quad \Lambda_5 = A_5, \tag{4}$$

$$\lambda_3 = \lambda_{30} + \nu_3 (t - t_0), \tag{5}$$

$$\lambda_{30} = \frac{3\pi\delta}{A_1 \overline{G}_2^2 K \Sigma_1} B_3, \qquad \nu_3 = -\frac{3\pi\delta}{A_1 \overline{G}_2^2 K \Sigma_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3},$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 = &B_4 + \kappa_4 (t - t_0) + \\ &+ (Q_4\Sigma_1 + Q_5\Sigma_2 + Q_6\Sigma_4 + Q_7\Sigma_5)\,\frac{2K}{\pi}\lambda_3,\end{aligned} \tag{6}$$

$$W_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{0} W_1'(g_1)\, dg_1, \tag{7}$$

$W_1(g_1)$ — функция, которая в промежуточном движении [3] удовлетворяет уравнению 6-го порядка, λ_3 и λ_4 — вековые части угловых переменных g_1 и g_2, A_j, B_3 и B_4 — постоянные интегрирования в промежуточном движении.

Гамильтониан системы Z состоит из двух слагаемых ε и R: ε соответствует невозмущенному движению и не зависит от угловых переменных, R — возмущающая часть, зависящая от двух угловых переменных — g_1 и g_2. Необходимо выразить возмущающую функцию через новые переменные Λ_j, λ_3 и λ_4. Выражение функции R через Λ_3 является сложной проблемой, так как для этого нужно решить уравнение

$$\Lambda_3 = \frac{2}{\pi} W_1(g_1). \tag{8}$$

Но можно поступить следующим образом. Найдем полную производную

$$\frac{d\Lambda_3}{dt} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial W_1}{\partial A_1}\frac{dA_1}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial A_2}\frac{dA_2}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial A_3}\frac{dA_3}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial A_4}\frac{dA_4}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial A_5}\frac{dA_5}{dt}\right), \tag{9}$$

где

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{dA_5}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_5} = 0. \tag{10}$$

Отсюда A_1, A_2 и A_5 — постоянные.

Из формул промежуточного движения [3] имеем

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_3} = \frac{A_1\,\overline{G}_2^2}{6\,\delta}\,K\,\Sigma_1,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_4} = -K\,\left(Q_4\,\Sigma_1 + Q_5\,\Sigma_2 + Q_6\,\Sigma_4 + Q_7\,\Sigma_5\right), \tag{11}$$

где K — полный эллиптический интеграл. Легко получаем уравнения

$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{6\,\delta}{A_1\,\overline{G}_2^2\,\Sigma_1}\left[\frac{\pi}{2\,K}\frac{\partial R}{\partial \lambda_3} + \left(Q_4\,\Sigma_4 + Q_5\,\Sigma_2 + Q_6\,\Sigma_4 + Q_7\,\Sigma_5\right)\frac{\partial R}{\partial \lambda_4}\right],$$

$$\frac{dA_4}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_4}. \tag{12}$$

Преобразуем уравнения

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial \Lambda_i}\ : \tag{13}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \Lambda_i} = \frac{\partial Z}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial \Lambda_i} + \frac{\partial Z}{\partial A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \Lambda_i} + \frac{\partial Z}{\partial A_3}\frac{\partial A_3}{\partial \Lambda_i} + \frac{\partial Z}{\partial A_4}\frac{\partial A_4}{\partial \Lambda_i} + \frac{\partial Z}{\partial A_5}\frac{\partial A_5}{\partial \Lambda_i}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_1}{\partial \Lambda_1} = 1, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \Lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \Lambda_1} = \frac{\partial W_1}{\partial A_1}\Big/\frac{\partial W_1}{\partial A_3}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \Lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial A_5}{\partial \Lambda_1} = 0,\\
&\frac{\partial A_1}{\partial \Lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \Lambda_2} = 1, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \Lambda_2} = \frac{\partial W_1}{\partial A_2}\Big/\frac{\partial W_1}{\partial A_3}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \Lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial A_5}{\partial \Lambda_2} = 0,\\
&\frac{\partial A_1}{\partial \Lambda_3} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \Lambda_3} = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \Lambda_3} = \frac{\pi}{2}\Big/\frac{\partial W_1}{\partial A_3}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \Lambda_3} = 0, \quad \frac{\partial A_5}{\partial \Lambda_3} = 0,\\
&\frac{\partial A_1}{\partial \Lambda_4} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \Lambda_4} = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \Lambda_4} = \frac{\partial W_1}{\partial A_4}\Big/\frac{\partial W_1}{\partial A_3}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \Lambda_4} = 1, \quad \frac{\partial A_5}{\partial \Lambda_4} = 0,\\
&\frac{\partial A_1}{\partial \Lambda_5} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \Lambda_5} = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \Lambda_5} = \frac{\partial W_1}{\partial A_5}\Big/\frac{\partial W_1}{\partial A_3}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \Lambda_5} = 0, \quad \frac{\partial A_5}{\partial \Lambda_5} = 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Частные производные имеют вид [3]

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_1} = -K\,\left(Q_1\,\Sigma_1 + Q_2\,\Sigma_2 + Q_3\,\Sigma_3\right),$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_2} = 0,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_5} = -K\,\left(\frac{4\,\overline{c}\,\overline{G}_2^2}{\delta}\,\Sigma_1 + Q_6\,\Sigma_4 - Q_7\,\Sigma_5\right). \tag{16}$$

Получаем

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial A_1} - \frac{\partial Z}{\partial A_3}\left[-\frac{Q_1\,\Sigma_1 + Q_2\,\Sigma_2 + Q_3\,\Sigma_3}{A_1\,\overline{G}_2^2\,\Sigma_1}\,6\,\delta\right],$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial A_2},$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\left(\frac{6\,\pi\,\delta}{2\,A_1\,\overline{G}_2^2\,K\,\Sigma_1}\right)\frac{\partial Z}{\partial A_3},$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = \left[\frac{Q_4\,\Sigma_1 + Q_5\,\Sigma_2 + Q_6\,\Sigma_4 + Q_7\,\Sigma_5}{A_1\,\overline{G}_2^2\,\Sigma_1}\,6\,\delta\right]\frac{\partial Z}{\partial A_3} - \frac{\partial Z}{\partial A_4},$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = \left[\frac{\frac{4\,\overline{c}\,\overline{G}_2^2}{\delta}\,\Sigma_1 + Q_6\,\Sigma_4 - Q_7\,\Sigma_5}{A_1\,\overline{G}_2^2\,\Sigma_1}\,6\,\delta\right]\frac{\partial Z}{\partial A_3}. \tag{17}$$

Воспользовавшись тем, что постоянные A_j легко могут быть выражены через оскулирующие кеплеровские элементы, получим дифференциальное уравнение для изменения эксцентриситета внешней орбиты. Дифференциальное уравнение для A_4

$$\frac{dA_4}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_4}. \tag{18}$$

Постоянная A_4 выражается через оскулирующие кеплеровские элементы следующим образом:

$$A_4 = L_2\,\sqrt{1 - e_2^2}. \tag{19}$$

Тогда

$$\frac{dA_4}{dt} = -L_2\,\frac{e_2}{\sqrt{1 - e_2^2}}\,\frac{de_2}{dt}. \tag{20}$$

Дифференциальное уравнение для e_2 имеет вид

$$\frac{de_2}{dt} = -\frac{\sqrt{1 - e_2^2}}{L_2\,e_2}\,\frac{\partial R}{\partial \lambda_4} = -\frac{A_4}{A_2^2\,e_2}\,\frac{\partial R}{\partial \lambda_4}, \tag{21}$$

где R — возмущающая функция в новых переменных:

$$\begin{aligned}
R = {} & \frac{15\,A_1^6\,e_1\,e_2\,\sqrt{1 - e_2^2}\,\gamma_4}{512\,A_2^8\,\left(1 - e_2\right)^3\,\left(1 + e_2\right)^3}\,\times\\
&\times\Big[\left(4 + 3e_1^2\right)\left(-1 - 11q + 5q^2 + 15q^3\right)\cos\left(\lambda_3 - \lambda_4 + \Theta\right) +\\
&+ 35\,e_1^2\,\left(1 - q\right)\,\left(1 + q\right)^2\,\cos\left(3\,\lambda_3 - \lambda_4 + \Theta\right) +\\
&+ \left(4 + 3\,e_1^2\right)\,\left(-1 + 11\,q + 5\,q^2 - 15\,q^3\right)\cos\left(\lambda_3 + \lambda_4 + \Theta\right) +\\
&+ 35\,e_1^2\,\left(-1 + q\right)^2\,\left(1 + q\right)\,\cos\left(3\,\lambda_3 + \lambda_4 + \Theta\right)\Big].
\end{aligned} \tag{22}$$

Решая уравнение (21) методом последовательных приближений, мы получили первое приближение для изменения эксцентриситета:

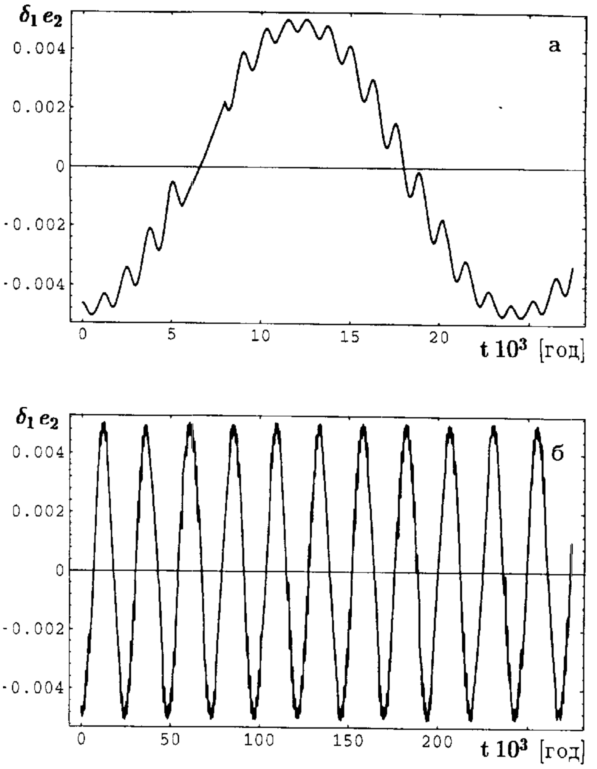

Рис. 1. Изменения величины эксцентриситета $\delta_1 e_2$ на интервале 27 000 лет (*а*) и 270 000 лет (*б*)

$$
\begin{aligned}
\delta_1 e_2 - {} & \frac{15A_1^6 e_1\left(1-e_2^2\right)\gamma_4}{512A_2^9\left(1-e_2\right)^3\left(1+e_2\right)^3}\times \\
\times & \left[-\frac{35e_1^2\left(1-q\right)\left(1+q\right)^2}{3\nu_3-\nu_4}\cos\left(t\left(-3\nu_3+\nu_4\right)+\Theta\right)-\right. \\
& -\frac{\left(4+3e_1^2\right)\left(-1-11q+5q^2+15q^3\right)}{\nu_3-\nu_4}\cos\left(t\left(-\nu_3+\nu_4\right)+\Theta\right)+ \\
& +\frac{35e_1^2\left(-1+q\right)^2\left(1+q\right)}{3\nu_3+\nu_4}\cos\left(t\left(3\nu_3+\nu_4\right)+\Theta\right)+ \\
& \left.+\frac{\left(4+3e_1^2\right)\left(-1+11q+5q^2-15q^3\right)}{\nu_3+\nu_4}\cos\left(t\left(\nu_3+\nu_4\right)+\Theta\right)\right].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Здесь Θ есть величина, зависящая от начальных условий.

2. Приложение теории к системе ξ U.Ma.

Тройная звездная система ξ U.Ma., компоненты которой движутся по короткопериодическим орбитам с периодами около двух лет (внутренняя орбита) и 60 лет (внешняя орбита), представляет собой интересный объект для применения этой теории. Система наблюдалась в течение десятилетий. Она имеет массы одного порядка с солнечной массой и для нее известны все кеплеровские элементы, необходимые для вычислений.

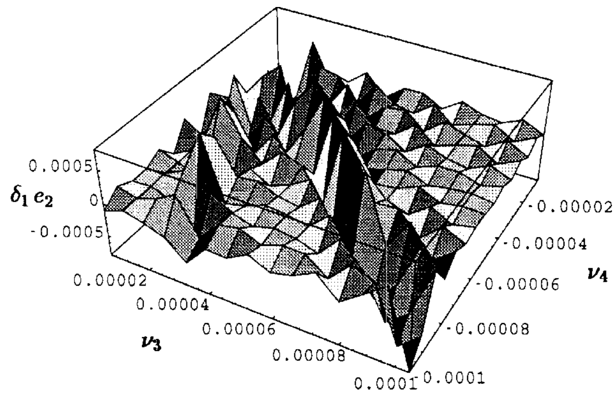

Рис. 2. Изменения величины эксцентриситета $\delta_1 e_2$ при изменении ν_3 от $0{,}645 \cdot 10^{-5}$ до $1 \cdot 10^{-4}$ и ν_4 от $-0{,}716 \cdot 10^{-5}$ до $1 \cdot 10^{-4}$ на интервале $t = 270\,000$ лет

Были взяты следующие элементы из работы [4] для эпохи $T_0 = 1900,00$:

$$m_0 = 0,83, \qquad m_1 = 0,30, \qquad m_2 = 0,92,$$

внутренняя орбита:	внешняя орбита:
$a_1 = 1,56$ AU	$a_2 = 19,46$ AU
$e_1 = 0,56$	$e_2 = 0,414$
$M_1 = 118,29^\circ$	$M_2 = 211,58^\circ$
$\omega_1 = 146,00^\circ$	$\omega_2 = 127,5^\circ$
$\Omega_1 = 326,00^\circ$	$\Omega_2 = 101,5^\circ$
$i_1 = 86,3^\circ$	$i_2 = 122,65^\circ$

Результаты представлены графически. На рис. 1 представлены слабые вариации на интервале времени 27 000 лет и 270 000 лет. Рис. 2 иллюстрирует явления, близкие к резонансам.

Заключение

В работе выведены дифференциальные уравнения для определения возмущений эксцентриситета, когда в гамильтониане учитываются члены третьего порядка малости. В качестве примера приводятся расчеты для тройной звездной системы ξ U.Ma. Показано, что в этом случае эксцентриситет внешней орбиты может иметь слабые долгопериодические вариации и могут возникать явления, близкие к резонансам.

Литература

1. *Соловая Н.А.* // Вестн. Моск. ун–та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 47 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 4).
2. *Harrington R.* // Celest. Mech. 1969. **1**, No. 2. P. 200.
3. *Соловая Н.А.* Деп. ВИНИТИ № 2363–70 Деп. М., 1970.
4. *Heintz W.* // Astron. Nachr. 1967. **289**. P. 269.

Поступила в редакцию
09.12.96