КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 523.11

КАЗИМИРОВСКАЯ ЭНЕРГИЯ НА МУЛЬТИСТРУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. В. Грац

(кафедра теоретической физики)

Известно, что на мультиструнном пространстве плотность энергии вакуумных флуктуаций обладает неинтегрируемыми особенностями, поэтому приходящаяся на единицу длины струн полная вакуумная энергия расходится. Показано, что при рассмотрении эффекта Казимира это приводит к необходимости дополнительной регуляризации, которая соответствует перенормировке затравочных дефицитов углов струн.

Вопросы, связанные с вычислением полной энергии вакуумных флуктуаций на пространствах с нетривиальной топологией, представляют интерес с различных точек зрения.

Ниже нас будет интересовать ультрастатическое пространство, которое представляет собой прямое произведение двумерного пространства Минковского на двумерное локально-плоское пространство с набором конических особенностей. Известно [1], что соответствующая метрика является решением уравнения Эйнштейна, в правой части которого стоит тензор энергии-импульса системы параллельных космических струн. Будем называть это пространство мультиструнным.

Определим полную энергию вакуумных колебаний как предельное значение энергии поля при стремлении к бесконечности обратной температуры β:

$$E_{\text{vac}} = \lim_{\beta\to\infty} E_\beta. \tag{1}$$

При вычислении E_β воспользуемся соотношением

$$E_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta} W_\beta, \tag{2}$$

где

$$\mathrm{e}^{-W_\beta} = \int D[\phi]\mathrm{e}^{-S_E[\phi]}. \tag{3}$$

В (3) $S_E[\phi]$ — евклидово действие и интегрирование ведется по всем полевым конфигурациям, определенным на евклидовом секторе рассматриваемого пространства-времени и периодическим (с периодом β) по мнимому времени.

В случае действительного скалярного поля

$$S_E[\phi] = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau \int \sqrt{g} d^{D-1}x\phi(x)L_D\phi(x), \tag{4}$$

где $L_D = -\Delta_D + \xi R + m^2$, Δ_D — оператор Лапласа–Бельтрами, D — размерность пространства.

Как известно, в терминах обобщенной ζ-функции эффективное действие записывается в виде

$$W_\beta[\phi] = \frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{L_D}{\lambda^2}\right) = -\frac{1}{2}\zeta'_\beta\left(0\middle|\frac{L_D}{\lambda^2}\right). \tag{5}$$

В этом выражении λ — произвольный параметр с размерностью массы, вводимый из соображений размерности.

В случае ультрастатического пространства, евклидов сектор которого $[0,\beta]\times M_{D-1}$, прямое вычисление дает [2]

$$\begin{aligned}\zeta_\beta(s|L_D) = {}& \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}\zeta_\infty\left(s-\frac{1}{2}\middle|L_{D-1}\right) + \\ &+\frac{2\beta}{\sqrt{4\pi}\Gamma(s)}\sum_i\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2E_i}{n\beta}\right)^{\frac{1}{2}-s}K_{\frac{1}{2}-s}(n\beta E_i),\end{aligned} \tag{6}$$

где E_i^2 — собственные числа оператора L_{D-1}, а $K_{(1/2)-s}$ — функция Макдональда.

Евклидов сектор интересующего нас мультиструнного пространства является частным случаем пространства со структурой $[0,\beta]\times R\times M_2$, когда M_2 — локально плоская поверхность с коническими особенностями.

Используя (6), можно показать, что для пространства $[0,\beta]\times R\times M_2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\beta}\zeta_\beta(0|L_4) = -\frac{\zeta_\infty(-1|L_2)}{4\pi}\int dz, \\ &\lim_{\beta\to\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\zeta'_\beta(0|L_4) = -\frac{\zeta'_\infty(-1|L_2)+\zeta_\infty(-1|L_2)}{4\pi}\int dz.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь z — координата на R (в случае мультиструнного пространства — координата вдоль струн).

Из (2), (5) и (7) следует формальное соотношение

$$E_{\text{vac}} = \frac{1}{4\pi}[\zeta'_\infty(-1|L_2) + (1+\ln\lambda^2)\zeta_\infty(-1|L_2)]\int dz. \tag{8}$$

Если M_2 является мультиконической поверхностью, локальная ζ-функция $\zeta(-1,*,*|L_2)$ обладает неинтегрируемыми особенностями в вершинах конусов, и интеграл

$$\mathrm{Tr}\,\zeta_\infty(-1,*,*|L_2),$$

а вместе с ним и вакуумная энергия (8) расходятся. Это говорит о необходимости дополнительной регуляризации. Идея заключается в том, что сама по себе казимировская энергия является величиной нефизической. Когда говорят об энергии Казимира, то под ней подразумевают ту часть перенормированной полной энергии, появление которой обязано внешнему гравитационному полю. Пространство с коническими особенностями заведомо не является риччи-плоским. В случае мультиструнного $4D$-пространства затравочная энергия классической материи имеет ту же структуру, что и (8):

$$E_m = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \int dz. \tag{9}$$

Объединяя это выражение с энергией вакуумных флуктуаций, получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_{\mathrm{tot}}}{\int dz} &= \sum_{i=1}^{N} \mu_i + \\ &+ \frac{1}{8\pi}\left[\zeta'_\infty(-1|L_2) + (1+\ln\lambda^2)\zeta_\infty(-1|L_2)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, используя метод обобщенной ζ-функции, мы показали, что имеющиеся в (8) расходимости могут быть включены в перенормированный суммарный дефицит угла на M_2, при этом собственно казимировская энергия будет даваться конечной частью выражения (8). В случае одной струны соответствующий результат был получен другим методом в работе [3].

Обобщенная ζ-функция оператора Лапласа на мультиконической двумерной поверхности не изучена. Однако следует ожидать, что конечная часть $\zeta(-1|L_2)$ будет зависеть от относительного расположения особенностей, что означает наличие казимировского взаимодействия между вершинами конусов. На справедливость этого предположения указывают результаты, полученные нами ранее методами теории возмущений [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-18003).

Литература

1. *Letelier P.S.* // Class. Quantum. Grav. 1987. **4**. P. L75.
2. *Kirsten K., Elizalde E.* E-pr. hep-th/9707083.
3. *Fursaev D.V.* Препринт ОИЯИ. 1993, № E2-93-291.
4. *Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Лаврентьев А.Б.* // Ядерная физика. 1995. **58**. С. 516.

Поступила в редакцию
19.09.97