а вместе с ним и вакуумная энергия (8) расходятся. Это говорит о необходимости дополнительной регуляризации. Идея заключается в том, что сама по себе казимировская энергия является величиной нефизической. Когда говорят об энергии Казимира, то под ней подразумевают ту часть перенормированной полной энергии, появление которой обязано внешнему гравитационному полю. Пространство с коническими особенностями заведомо не является риччи-плоским. В случае мультиструнного $4D$-пространства затравочная энергия классической материи имеет ту же структуру, что и (8):

$$E_m = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \int dz. \tag{9}$$

Объединяя это выражение с энергией вакуумных флуктуаций, получаем

$$\frac{E_{\rm tot}}{\int dz} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i + \frac{1}{8\pi}\left[\zeta_\infty^{'}(-1|L_2) + (1+\ln\lambda^2)\zeta_\infty(-1|L_2)\right]. \tag{10}$$

Таким образом, используя метод обобщенной ζ-функции, мы показали, что имеющиеся в (8) расходимости могут быть включены в перенормированный суммарный дефицит угла на M_2, при этом собственно казимировская энергия будет даваться конечной частью выражения (8). В случае одной струны соответствующий результат был получен другим методом в работе [3].

Обобщенная ζ-функция оператора Лапласа на мультиконической двумерной поверхности не изучена. Однако следует ожидать, что конечная часть $\zeta(-1|L_2)$ будет зависеть от относительного расположения особенностей, что означает наличие казимировского взаимодействия между вершинами конусов. На справедливость этого предположения указывают результаты, полученные нами ранее методами теории возмущений [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-18003).

Литература

1. *Letelier P.S.* // Class. Quantum. Grav. 1987. **4**. P. L75.
2. *Kirsten K., Elizalde E.* E-pr. hep-th/9707083.
3. *Fursaev D.V.* Препринт ОИЯИ. 1993, № E2-93-291.
4. *Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Лаврентьев А.Б.* // Ядерная физика. 1995. **58**. С. 516.

Поступила в редакцию
19.09.97

УДК 530.145

О ВЕЛИЧИНЕ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ НА МАСШТАБЕ ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

П. И. Пронин, К. В. Степаньянц

(кафедра теоретической физики)

Используя аналогию между неравенством Богомольного в теории поля и гамильтонианом гармонического осциллятора в квантовой механике, мы предлагаем возможное объяснение численного значения константы связи на масштабе Великого объединения, которое оказывается равным 1/8π.

Точное измерение констант фундаментальных взаимодействий [1] показывает, что в рамках Стандартной модели бегущие константы связи не сходятся в одну точку, в то время как для минимальной суперсимметричной Стандартной модели (МССМ) [2] сходимость действительно присутствует (в пределах ошибки современных экспериментальных данных) (см., напр., [3]). Как правило, последний факт использовался в качестве косвенного доказательства существования суперсимметрии. Однако на него можно посмотреть и с несколько иной стороны, а именно как на косвенное измерение величины константы связи на масштабе Великого объединения (α_{GUT}). Численно данная величина оказывается равной приблизительно $1/25$.

В настоящее время не существует какого бы то ни было теоретического объяснения причины того, что константа связи принимает определенное значение. По-видимому, объединенная теория всех фундаментальных взаимодействий должна предсказывать данную величину, причем, возможно, она является некоторой простой комбинацией математических констант. Заметим, что численное значение α_{GUT}^{-1}, предсказываемое косвенно в МССМ, чрезвычайно близко к $8\pi \approx 25,13$. Конечно, данная величина зависит от схемы перенормировки уже в двухпетлевом приближении. Однако известно, что в случае, скажем, квантовой электродинамики существует некоторая физическая схема перенормировки, вычисления в которой дают измеряемые величины. Поэтому далее мы будем предполагать возможность экспериментального измерения α_{GUT} и существование выделенной (физической) схемы перенормировки по аналогии с известным случаем.

В данной работе мы также попытаемся объяснить, почему константа связи принимает некоторое выделенное значение. Для этого мы будем использовать аналогию между гамильтонианом гармонического осциллятора в механике и уравнением Богомольного.

Действительно, гармонический осциллятор представляет собой простейший пример самодуальной модели [4], поскольку его гамильтониан

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

инвариантен относительно преобразований

$$p \to -m\omega x; \qquad x \to p/m\omega. \tag{2}$$

С другой стороны, первые гипотезы о дуальности [5] были основаны на симметрии неравенства Богомольного [4, 6]

$$M \geqslant v(Q_e^2 + Q_m^2)^{1/2}, \tag{3}$$

где Q_e и Q_m — электрический и магнитный заряды, а M — масса состояния.

Заметим, что выражение $Q_e^2 + Q_m^2$ очень напоминает (1). Кроме того, при использовании стандартных полей магнитные монополи ведут себя как классические частицы. Однако в области сильной связи лагранжиан должен быть записан в терминах дуальных полей [7, 8], взаимодействующих с полем магнитного монополя, который, следовательно, является здесь квантовым. Данная ситуация имеет определенное сходство с координатным и импульсным представлениями в квантовой механике.

Кроме того, условие квантования Дирака $eQ_m = 2\pi N$ по форме несколько напоминает условие квантования Бора–Зоммерфельда

$$\int p\, dx = 2\pi N. \tag{4}$$

Теперь мы сделаем еще один шаг в развитии аналогии. Будем рассматривать электрический и магнитный заряды как канонически сопряженные операторы:

$$\hat{Q}_e \to e, \qquad \hat{Q}_m \to \frac{1}{i}\frac{d}{de}. \tag{5}$$

Отчасти на подобные соображения наводит то, что коммутатор электрического и магнитного потоков через замкнутые контуры α и β в *квантовой* теории поля есть [9]

$$[\hat{B}(\alpha), \hat{E}(\beta)] = iGL(\alpha, \beta), \tag{6}$$

где $GL(\alpha,\beta)$ — целое число, определяющее количество намоток одного контура на другой.

Таким образом, при стягивании контуров в точку (т.е. когда рассматривается поток через замкнутую поверхность) коммутатор оказывается плохо определенным и утверждение об одновременной измеримости электрического и магнитного зарядов может быть поставлено под сомнение.

Теперь по аналогии с квантовой механикой напишем уравнение типа Шрёдингера:

$$\left(-\frac{d^2}{de^2} + e^2\right)\psi(e) = \lambda\psi(e). \tag{7}$$

Опять же по аналогии $\lambda/4\pi$ имеет смысл интерпретировать как величину константы связи, а ψ как амплитуду вероятности ее распределения.

Низшее собственное значение оператора в правой части (7) равно 1, причем соответствующая собственная функция

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp(-e^2/2). \tag{8}$$

Фактически уравнение (7) есть гипотеза о распределении константы связи с некоторой вероятностью, причем монопольный вклад в эффективное действие выше порога рождения магнитных монополей сводится к замене константы связи на приведенный ранее оператор. Действительно, производная по константе связи возникает из магнитного заряда, который в моделях Великого объединения имеет массу $\approx M_{GUT}$ [10]. В низкоэнергетической теории подобных слагаемых нет. Поэтому имеет смысл предположить, что ниже порога рождения монополей следует опустить оператор квадрата магнитного заряда и вычислять среднее значение:

$$\alpha_{GUT} = \frac{\langle e^2\rangle}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int de\; e^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-e^2) = \frac{1}{8\pi}. \tag{9}$$

Необходимо заметить, что данная величина не зависит ни от выбора системы единиц (в чем достаточно легко убедиться), ни от выбора нормировки волновой функции, поскольку в силу уравнения (7)

$$\langle -\frac{d^2}{de^2} + e^2\rangle = 2\langle e^2\rangle = 1, \tag{10}$$

и, следовательно, α_{GUT} определяется только собственным значением оператора в правой части (7).

(Интерпретация $\lambda/4\pi$ как величины константы связи однозначно дает предписание для вычисления средних значений:

$$\langle\hat{f}\rangle = \frac{\int de\bar{\psi}\hat{f}\psi}{\int de\bar{\psi}\psi}, \tag{11}$$

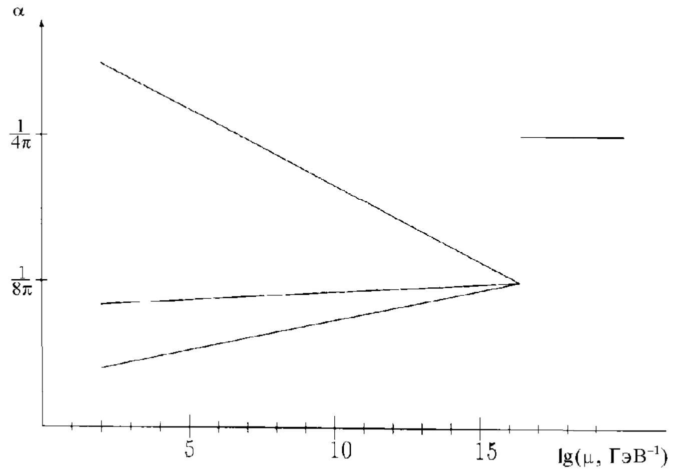
так что нормировочная постоянная сокращается в числителе и знаменателе.)

Численно величина α_{GUT}^{-1} оказывается приблизительно равной 25,13, что хорошо согласуется с косвенными предсказаниями МССМ [11] в свете последних экспериментальных данных [1].

Выше масштаба Великого объединения

$$\alpha_{GUT} = \frac{\lambda}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}. \tag{12}$$

Наличие скачка константы взаимодействия при переходе через порог рождения некоторых частиц не является чем-то новым в теории поля. В частности, в Стандартной модели при нарушении симметрии $SU(2)\times U(1) \to U(1)$ ни одна из бегущих констант непрерывной не является. Однако в нашем случае мы сталкиваемся с несколько иным явлением, поскольку скачок теперь не связан с изменением нормировки. Его причина заключается в исчезновении вклада в константу связи магнитных монополей при прохождении через порог. В чем-то это напоминает явление разделения констант связи при прохождении порога рождения калибровочного бозона. Разрыв функции, а не производной связан с тем, что магнитный вклад оказывается присутствующим во всем эффективном действии, а не только в петлевых поправках. Замена в эффективном действии $e \to \sqrt{\langle e^2 \rangle}$ приводит к поведению бегущих констант, схематически показанному на рисунке.



Поведение бегущих констант связи

В заключение отметим, что хотя основные наши положения не являются строго обоснованными и ждут дальнейшего развития, мы считаем, что данная гипотеза имеет право на существование, тем более что других в настоящее время просто не существует. Возможно также, что некоторые выдвинутые здесь идеи будут полезны для будущих исследований в данном направлении. Однако уже в настоящее время можно говорить о том, что знание точного численного значения α_{GUT} (при условии знания соответствующей схемы перенормировки) представляет интерес для феноменологических исследований по предсказанию параметров Стандартной модели.

Литература

1. Review of Particle Properties // Phys. Rev. 1994. **D50**. P. 1173.
2. *Nilles H.* // Phys. Rep. 1984. **110**. P. 1.
3. *Dienes K.* // E-pr. hep-th/ 9602045.
4. *Harvey J.* // E-pr. hep-th/ 9603086.
5. *Montonen C., Olive D.* // Phys. Lett. 1977. **72B**. P. 177.
6. *Богомольный Е.* // Ядерная физика. 1976. **24**. С. 861.
7. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. 1994. **B426**. P. 19.
8. *Bilal A.* // E-pr. hep-th/ 9601007.
9. *Ashtekar A., Corichi A.* // E-pr. hep-th/9701136.
10. *Dokos C., Tomaras T.* // Phys. Rev. 1980. **D21**. P. 2940.
11. *Dimopoulos S., Raby S., Wilczek F.* // Phys. Rev. 1979. **D24**. P. 1681; *Dimopoulos S., Georgy H.* // Nucl. Phys. 1981. **B193**. P. 150.

Поступила в редакцию
18.06.97