УДК 530.1

РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА БЕЗ НЕЦЕЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ И СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Построенная ранее схема перенормировки для производящего функционала функций Грина обобщена на векторные и спинорные поля. Схема в основных чертах сохраняет математический аппарат размерной регуляризации, но в ней используются только целые положительные размерности для векторных и спинорных полей.

В статье [1] автором была предложена схема построения производящего функционала $Z(j)$ для перенормированных функций Грина. При использовании евклидовой метрики в пространстве импульсов эта схема выглядела следующим образом. Динамика системы описывалась евклидовым действием

$$S_E(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} I_E^n(\varphi) + W_E(\varphi),$$

где множество полей $\varphi = \{\varphi_u^n\}, \quad n = 1, \ldots, N$, разбито на N типов. Индекс u различает поля внутри одного типа. Квадратичные по полям слагаемые $I_E^n(\varphi)$ определяют пропагаторы $D_{uv}^n(p)_E$, а $W_E(\varphi)$ — пертурбативную часть действия.

В этом случае производящий функционал выглядит так:

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} \exp\{\Delta^N/2\} \ldots \exp\{\Delta^1/2\} \exp\{-W_E(\varphi)\} \times \\ \times \exp\left\{ \sum_{n=1}^{N} \int dp_E \sum_u j_u^n(p) \varphi_u^n(p) \right\}\Bigg|_{\varphi=0}, \quad (1)$$

где $\mathcal{N}$ — нормировочный множитель, а

$$\Delta^n = \int d\mu(p) \sum_{u,v} \frac{\delta}{\delta \varphi_u^n(p)} D_{uv}^n(p)_E \frac{\delta}{\delta \varphi_v^n(-p)}. \quad (2)$$

Фигурирующее в формуле (2) «перенормированное интегрирование» $\int d\mu(p)$ задается следующим образом

$$\int d\mu(p)\, F(p^2, pk_i) = \\ = \mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)(-1)^{\zeta-2}(\mu^2)^{-\epsilon}\pi^{2-\zeta+\epsilon}\Gamma^{-1}(\epsilon) \times \\ \times \lim_{\beta\to 0} \int d^{2\zeta}p\, (p^2+\mu^2)^{-\beta} \times \\ \times \int_0^\infty d\omega^2\, (\omega^2)^{\epsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)^{\zeta-2} F(p^2+\omega^2, pk_i). \quad (3)$$

Здесь $\mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)$ — операция разложения в ряд Лорана по ϵ с удержанием члена порядка ϵ^0.

В статье [1] разобран случай скалярных полей, сейчас мы обратимся к рассмотрению векторных и спинорных полей. В том случае, когда импульс интегрирования распространяется по незамкнутой линии, перенормировка не требуется. Поэтому дальше будем считать, что импульс интегрирования p — это петлевой импульс.

На первом этапе учтем только векторные поля. В этом случае при вычислении производящего функционала $Z(j)$ будут возникать интегралы, в которых скалярная подынтегральная функция F зависит от импульсов как явно, так и неявно, через векторные функции φ и j (от петлевого импульса зависимость только явная). Аналогично скалярному случаю величину F будем рассматривать как явную функцию векторных аргументов — импульсов (учитываем только явную зависимость), а также векторов φ и j. Считаем, что они имеют ту же размерность, что и импульсы. В качестве скалярных аргументов функции F примем всевозможные скалярные произведения векторов: p (импульс интегрирования), k_i (внешние импульсы), φ и j. Чтобы можно было считать все эти скалярные произведения независимыми, придется размерность 2ζ векторного пространства выбрать достаточно большой. Независимость необходима потому, что для определения перенормированного интегрирования мы, как и в случае скалярных полей, хотим воспользоваться формулой (3), в которой в правой части только аргумент p^2 заменяется на $p^2+\omega^2$, к остальным аргументам (теперь их будет больше, чем использовано в (3)) никаких добавок не делается.

Результат перенормированного интегрирования не должен зависеть от размерности 2ζ при достаточно больших ζ. Поэтому все скалярные функции скалярных аргументов должны иметь один и тот же вид при любой размерности. Это в свою очередь требует ковариантности по отношению к размерности сверток по векторным (тензорным) индексам. Этого можно добиться, если для всех векторных и тензорных величин использовать только контравариантные компоненты, а свертки контравариантных тензоров производить с помощью ковариантного метрического тензора. Для последнего следует отказаться от покомпонентного представления и рассматривать его как линейный функционал, который каждому контравариантному тензору ранга r $(r \geqslant 2)$ сопоставляет контравариантный тензор ранга $r-2$, причем вид этого сопоставления не зависит от ζ. В частности, контравариантному метрическому тензору $g^{\nu\lambda}$ сопоставляется число 4 (физическая размерность), а не 2ζ. Последнее число получилось бы, если бы мы определили свертку как суммирование по индексам.

Используя приведенные выше правила, по формуле (1) мы можем вычислить производящий функционал $Z(j)$. Аргументами этого функционала будут токи $j(k_i)$, каждый из которых является векторной функцией 2ζ-мерного внешнего импульса k_i. Но это не означает, что $Z(j)$ — производящий функционал функций Грина в 2ζ-мерном пространстве. Дело в том, что перенормированное интегрирование, определяемое формулой (3), — это фактически интегрирование по 4-мерному пространству, только определенное опосредствованным образом. Если использовать терминологию размерной регуляризации, то при каждом перенормированном интегрировании вначале выполняется интегрирование по 2ζ-мерному пространству, а затем производится аналитическое продолжение к 4-мерному. Все это нужно только для того, чтобы однозначным образом ввести параметр ω^2 в подынтегральное выражение.

Поскольку $Z(j)$ является скалярной функцией скалярных аргументов (скалярных произведений импульсов и векторных токов), то ничто не мешает нам спуститься по всем переменным к физической размерности. Для этого достаточно считать, что эти аргументы являются скалярными произведениями 4-мерных векторов. Нужно только иметь в виду, что число независимых скалярных произведений векторов при этом сократится. Поэтому если функционал $Z(j)$ рассматривать как функцию скалярных аргументов, то после спуска к физической размерности область допустимых значений аргументов сузится.

Перейдем теперь к случаю, когда в физической модели фигурируют спинорные поля. Опять-таки для однозначного введения в подынтегральное выражение параметра ω^2 нужно исходить из высокой размерности импульсного пространства. Вместе с тем если вести рассмотрение только до конечного порядка теории возмущений, то достаточно с самого начала ограничиться конечной размерностью 2ζ.

В пространстве такой конечной размерности не представляет никакого труда ввести спиноры и гамма-матрицы Дирака, обладающие обычными свойствами, в частности свойствами антикоммутации:

$$\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu = 2g^{\nu\lambda}, \qquad \nu, \lambda = 1, \ldots, 2\zeta,$$

где $g^{\nu\lambda}$ — контравариантный метрический тензор в пространстве размерности 2ζ. В таком пространстве матрицы Дирака имеют размерность $2^\zeta \times 2^\zeta$. Значит, существует именно столько линейно независимых матриц такой размерности. В качестве таких матриц удобно выбрать следующие полностью антисимметричные структуры:

$$\Gamma^{[\nu_1\ldots\nu_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \delta^{[\nu_1\ldots\nu_n]}_{[\lambda_1\ldots\lambda_n]}\gamma^{\lambda_1}\ldots\gamma^{\lambda_n}, \qquad (4)$$

которые в работе [2] названы А-произведениями. Здесь $\delta^{[\nu_1\ldots\nu_n]}_{[\lambda_1\ldots\lambda_n]}$ — обобщенный символ Кронекера — детерминант матрицы $n \times n$ с элементами $\delta^{\nu_i}_{\lambda_j}$, обычными символами Кронекера. Кроме того, положим по определению, что при $n = 0$ матрица $\Gamma^{[0]} = 1$, а при $n = 1$ матрица $\Gamma^{[\nu]} = \gamma^\nu$. Ясно, что при $n > 2\zeta$ матрицы Γ тождественно равны нулю.

Для произведений γ-матриц справедлив аналог теоремы Вика для ферми-полей. При этом роль нормальных произведений играют структуры $\Gamma^{[\nu_1\ldots\nu_n]}$, а роль сверток — компоненты метрического тензора $g^{\nu\lambda}$. То есть обычное произведение γ-матриц равняется сумме всех соответствующих А-произведений со всевозможными спариваниями (с учетом знаков), включая А-произведение без спариваний. Если в произведении γ-матриц в качестве сомножителей входят А-произведения, то из числа слагаемых надо исключить члены, в которых спариваются γ-матрицы, принадлежащие одному А-произведению.

В моделях со спинорными полями производящий функционал $Z(\bar{\jmath}, j)$ функций Грина также можно представить в виде скалярной функции скалярных аргументов, но число тензорных структур, из которых могут быть построены эти аргументы, увеличивается за счет величин, содержащих спинорные токи $\bar{\jmath}$ и j. На промежуточных этапах построения $Z(\bar{\jmath}, j)$ будут возникать конструкции со спинорными полями ϕ и $\bar{\phi}$.

Для того чтобы вся последующая процедура перенормировки была однозначной, нужно обеспечить однозначность рецепта построения таких величин. Проще всего этого добиться, создав исчерпывающий список базовых конструкций такого рода, из которых остальные могут быть получены путем алгебраических действий. В качестве таких базовых конструкций удобно выбрать величины, которые здесь будут именоваться тензорными токами:

$$J^{[\nu_1\ldots\nu_n]}(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi} * \Gamma^{[\nu_1\ldots\nu_n]} * \psi, \qquad (5)$$

где матрицы Γ определяются формулой (4), а спиноры ψ — это либо j, либо ϕ, аналогично и для $\bar{\psi}$. При этом возможны различные сочетания спинорных токов и полей. Символ $*$ в (5) означает свертку по спинорным индексам.

Вообще говоря, тензоры типа (5) связаны между собой тождествами Фирца и не являются вполне независимыми. Это, в принципе, могло бы нарушить однозначность разложения по базовым тензорным токам величин, встречающихся при построении функционала $Z(\bar{\jmath}, j)$. Однако в рамках теории возмущений это несущественно. Дело в том, что в любом конечном порядке теории возмущений будут возникать токи $J^{[\nu_1 \ldots \nu_n]}$ с ограниченным значением n. Такие токи независимы, если $\bar{\phi}$ и ϕ — это спиноры в пространстве достаточно высокой размерности 2ζ.

Функционал $Z(\bar{\jmath}, j)$ будем строить с помощью формулы (1). Для этого нужно знать, как действует оператор (2) в случае спинорных полей. Этот оператор состоит из нескольких операций, разберем их. Во-первых, это варьирование по полям. Его следует совершать по обычным правилам, считая, что в данном случае φ_v и φ_u — это ϕ и $\bar{\phi}$. Во-вторых, это свертка по спинорным индексам. Здесь есть одна тонкость, аналогичная той, которая имеется в случае свертки векторных индексов. Для того чтобы результат перенормировки не зависел от размерности 2ζ, которая используется на промежуточных этапах, операция свертки должна быть определена ковариантным образом по отношению к размерности. Поэтому от определения свертки как суммирования по спинорным индексам следует отказаться, а определить ее как линейную операцию, которая спинору и спинорной матрице сопоставляет другой спинор, а спинору и сопряженному спинору — число, причем это число не должно зависеть от размерности 2ζ.

Реально с этим числом приходится иметь дело, когда действие оператора (2) приводит к образованию замкнутой спинорной петли. След нужно определить как линейную операцию, которая единичной матрице вне зависимости от размерности пространства сопоставляла бы число 4 — размерность физического пространства.

Наконец, третья операция, которая должна быть задана в операторе (2), — это интегрирование. Его мы опять определим с помощью формулы (3), только сделаем уточнение по поводу введения параметра ω^2. Так же как в случае скалярных полей, этот параметр будем прибавлять только к квадрату импульса интегрирования p. При наличии в модели спинорных и (или) векторных полей подынтегральная скалярная функция F будет зависеть от p не только через p^2 и pk_i, но и через свертки вектора p с тензорными токами вида (5) и (или) векторными полями и токами. При этом надо позаботиться о том, чтобы зависимость от p^2 была выделена однозначным образом. Применительно к спинорным полям это означает, что спиноры ψ и $\bar{\psi}$ должны входить в F только через антисимметричные тензорные токи вида (5). Этого всегда можно добиться, разлагая все произведения гамма-матриц на А-произведения.

На окончательном этапе вычисления функционала $Z(\bar{\jmath}, j)$ нужно спуститься в физическую размерность. Для этого, как и прежде, функционал $Z(\bar{\jmath}, j)$ надо рассматривать как функцию скалярных аргументов — сверток различных тензоров, и, сохраняя вид функциональной зависимости, считать, что эти тензоры принадлежат физическому пространству. В частности, это значит, что в тензорных токах вида (5), через которые окончательно будет выражен функционал $Z(\bar{\jmath}, j)$, следует, во-первых, считать, что спиноры $\bar{\jmath}$ и j имеют физическую размерность; во-вторых, все токи с $n > 4$ положить равными нулю; в-третьих, сделать то же самое для всех тензорных токов, у которых хотя бы для одного индекса $\nu_i > 4$. Здесь мы опять сталкиваемся с тем, что при спуске в физическую размерность область допустимых значений скалярных аргументов $Z(\bar{\jmath}, j)$ сужается.

В моделях со спинорными полями при использовании перенормировки по линиям удобно фигурирующие в модели поля разбить на типы так, чтобы все спинорные поля попали в те типы (или один тип), для которых операторы Δ^n действуют в первую очередь. Для большинства моделей число расходящихся диаграмм, в которых имеются только спинорные линии, конечно. После вычисления таких диаграмм по спинорным полям (токам) можно будет спуститься в физическую размерность. Это приведет к тому, что во всех последующих выкладках будут фигурировать только физические γ-матрицы.

Математический аппарат приведенной схемы перенормировок фактически идентичен хорошо разработанному аппарату размерной регуляризации [3] (см. также [4]). Однако поскольку интегрирование по пространству нецелой части размерности выделено в интегрирование по отдельному параметру (ω), то можно обойтись без введения векторов и спиноров нецелой размерности. В размерной регуляризации этот пункт выглядел всегда очень искусственно и порождал целый ряд трудностей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. *Славнов Д.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1).
2. *Селихов А.В., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1986. **67**. С. 186.
3. *'tHooft G., Veltman M.* // Nucl. Phys. 1972. **B44**. P. 189.
4. *Коллинз Дж.* Перенормировка. М., 1988.

Поступила в редакцию
02.07.97