

и $(\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{n,N})$ соответственно, где f_i — комплексный коэффициент Фурье при частоте $\omega = 2(i - 1)\pi/T$ в разложении входного сигнала, а $\xi_{i,j}$ — коэффициент Фурье при частоте $\omega = 2(i - 1)\pi/T$ в разложении выходного сигнала на j -м отводе улитки, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N$.

Оператор прибора в модели $[\mathbf{A}, \Sigma]$ в стационарном случае описывается матрицей \mathbf{A} , имеющей nN строк и n столбцов, с комплексными коэффициентами такими, что

$$\xi_{k,j} = \sum_{\eta=1}^n \mathbf{A}_{k,j,\eta} f_{\eta}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Нетрудно видеть, что отличными от нуля являются только те коэффициенты $A_{i,j,k}$ матрицы \mathbf{A} , где $i = k$, или, другими словами, при подаче на вход прибора гармонического сигнала какой-нибудь частоты на всех выходах будут наблюдаться сигналы той же самой частоты.

Наборы коэффициентов $A_{i,j,i}, j = 1, 2, \dots, N$, представляют собой амплитудные характеристики улитки при подаче на ее вход единичного гармонического сигнала на частоте $\omega = 2(i - 1)\pi/T$, подобные характеристике, показанной на рис. 2.

Выбрав, как и в предыдущем случае, ковариационный оператор шума $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}, \sigma = 10^{-3}$ В, легко

убедиться, что оператор $\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A}$ описывается диагональной матрицей, элементы которой равны

$$(\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A})_{i,i} = \sigma^2 \sum_{k=1}^N |A_{i,k,i}|^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Численные расчеты проведены для класса входных сигналов, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям предыдущей задачи: частотный диапазон сигнала ограничен 5 кГц, а период повторения сигнала $T = 0,05$ с.

График эффективного ранга модели $[\mathbf{A}, \Sigma]$ для стационарного случая приведен на рис. 4 (б).

Литература

1. Бондаренко С.П., Пытьев Ю.П. // ЖВМ и МФ. 1995. 35, № 1. С. 6.
2. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
3. Молчанов А.П., Бабкина Л.Н. Электрические модели механизмов улитки органов слуха. Л., 1978.
4. Сорокин В.Н. Синтез речи. М., 1992.

Поступила в редакцию
06.06.97

УДК 517.956.224+517.968.23

ПОТЕНЦИАЛЫ ДИССИПАТИВНОГО ВОЛНОВОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

П. А. Крутицкий

(кафедра математики)

Рассматривается сингулярное решение двумерного диссипативного уравнения Гельмгольца в полосе, удовлетворяющее нулевым граничным условиям на стенках. Это решение, построенное методом отражений, представляется в виде ряда, один член которого — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца на плоскости, а остальные члены — гладкие решения уравнения Гельмгольца в полосе. Показано, что ряд, состоящий из гладких решений, представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию. На основе построенного сингулярного решения в полосе сконструированы потенциалы простого и двойного слоя и угловой потенциал. Доказано, что свойства потенциалов полосы определяются поведением хорошо изученных потенциалов, построенных на фундаментальном решении для уравнения Гельмгольца.

1. Потенциалы диссипативного уравнения Гельмгольца в полосе

На плоскости $x = (x_1, x_2) \in R^2$ рассмотрим полосу $\Omega = \{x : -\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < l\}$. В полосе выделим произвольное множество точек \mathcal{D} такое, что расстояние от \mathcal{D} до ближайшей из прямых $x_2 = 0, x_2 = l$ равно $d > 0$. Пусть, далее, $x \in \bar{\Omega}, y = (y_1, y_2) \in \bar{\mathcal{D}}, k = k_1 + ik_2, k_2 > 0$. Введем функцию

$$u(j, x, y) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H_0^{(1)}(kr_-(x, y, n)) + (-1)^j H_0^{(1)}(kr_+(x, y, n)) \right], \quad j = 1, 2,$$

где $r_{\pm}(x, y, n) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 \pm y_2 - 2nl)^2}$, а $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [1]. Функция $u(j, x, y)$ представляет собой сингулярное решение уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в полосе Ω , формально построен-

ное методом отражений и удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле ($j = 1$) либо Неймана ($j = 2$) на стенках полосы. Выясним сходимость ряда и изучим свойства функции $u(j, x, y)$. Положим

$$u_0(j, x, y) = u(j, x, y) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_-(x, y, 0)).$$

Заметим, что $d \leq x_2 + y_2 \leq 2l - d$, $-l + d \leq x_2 - y_2 \leq l - d$,

$$2l(|n| - 1) + d \leq |x_2 \pm y_2 - 2nl|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда, воспользовавшись известным неравенством $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 2^{-1}(|a| + |b|)$, получим

$$\begin{aligned} r_{\pm}(x, y, n) &\geq 2^{-1}(|x_1 - y_1| + |x_2 \pm y_2 - 2nl|) \geq \\ &\geq 2^{-1}|x_1 - y_1| + l(|n| - 1) + 2^{-1}d \geq 2^{-1}d, \quad (1) \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_+(x, y, 0) &\geq 2^{-1}(|x_1 - y_1| + d) \geq 2^{-1}d, \\ r_-(x, y, 0) &\geq |x_1 - y_1|. \quad (2) \end{aligned}$$

Пользуясь этими оценками, а также асимптотическим представлением для функций Ханкеля [1]:

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ |z| &\rightarrow \infty, \quad \nu \geq 0, \end{aligned}$$

приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} |H_{\nu}^{(1)}(kr_{\pm}(x, y, n))| &\leq \frac{C(k_2, d, \nu)}{\sqrt{|x_1 - y_1| + d}} \times \\ &\times \exp(-k_2 2^{-1}|x_1 - y_1|) \exp(-k_2 l(|n| - 1)) \leq \quad (3) \\ &\leq C(k_2, d, \nu) d^{-1/2} \exp(-k_2 l(|n| - 1)), \quad |n| = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |H_{\nu}^{(1)}(kr_+(x, y, 0))| &\leq \\ &\leq \frac{C(k_2, d, \nu)}{\sqrt{|x_1 - y_1| + d}} \exp(-k_2 2^{-1}|x_1 - y_1|) \leq \quad (4) \\ &\leq C(k_2, d, \nu) d^{-1/2}, \end{aligned}$$

которые справедливы при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\mathcal{D}}$, $\nu \geq 0$.

Из неравенств (1), (2) с учетом свойств функции Ханкеля вытекает, что все члены ряда в $u_0(j, x, y)$ — непрерывные функции в области $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}}$. Более того, известно, что производная функции Ханкеля с целым неотрицательным индексом представляется линейной комбинацией двух других функций Ханкеля с целыми неотрицательными индексами. Тем самым каждый член ряда в $u_0(j, x, y)$ принадлежит классу гладкости $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}})$.

Из оценок (3), (4) вытекает, что ряд в $u_0(j, x, y)$ мажорируется сходящимся числовым рядом из экспонент, а значит, сходится абсолютно и равномерно в области $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}}$ по мажорантному признаку. При формальном почленном дифференцировании ряда $u_0(j, x, y)$ будут возникать ряды из функций Ханкеля с целым неотрицательным индексом ν от того же аргумента $kr_{\pm}(x, y, n)$. Все они также будут сходиться абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}}$ в силу оценок (3), (4) по мажорантному признаку. Следовательно, $u_0(j, x, y)$ принадлежит $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}})$ и производные $\nabla_x^p \nabla_y^q u_0(j, x, y)$, $p, q = 0, 1, 2, \dots$, можно вычислять почленным дифференцированием под знаком ряда. Применяя к функции $u_0(j, x, y)$ и ее производным оценки (3), (4), легко получить следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\nabla_x^p \nabla_y^q u_0(j, x, y)| &\leq \\ &\leq \frac{C_0(k_2, d, p, q)}{\sqrt{|x_1 - y_1| + d}} \exp(-2^{-1}k_2|x_1 - y_1|), \quad (5) \end{aligned}$$

где $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\mathcal{D}}$, $p, q = 0, 1, 2, \dots$.

Из приведенных рассуждений вытекает

Л е м м а 1.

1) Функция $u_0(j, x, y)$ принадлежит $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}})$, удовлетворяет оценкам (5) и уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2. \quad (6)$$

2) Функция $u(j, x, y)$ при $x \neq y$ удовлетворяет уравнению (6). Кроме того, $u(j, x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{x_2=0} = u|_{x_2=l} = 0, \quad j = 1, \quad (7)$$

$$u_{x_2}|_{x_2=0} = u_{x_2}|_{x_2=l} = 0, \quad j = 2. \quad (8)$$

В том, что $u_0(j, x, y)$ удовлетворяет (6), а также в справедливости п. (2) леммы можно убедиться непосредственной проверкой. При этом следует учесть, что если $x_2 \rightarrow 0 + 0$ либо $x_2 \rightarrow l - 0$, а $y \in \bar{\mathcal{D}}$, то функция $H_0^{(1)}(k|x - y|)$ непрерывно-дифференцируема. Кроме того, все ряды можно суммировать в произвольном порядке в силу их абсолютной и равномерной сходимости. Непосредственно из леммы 1 следует

Л е м м а 2. Пусть $\bar{\mathcal{D}}$ — ограниченное множество, причем для точек $y \in \bar{\mathcal{D}}$ справедлива оценка $|y_1| < A$. Тогда для точек $x \in \bar{\Omega}$ таких, что $|x_1| > A + A_1$, $A_1 > 0$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\nabla_x^p \nabla_y^q u|, \quad |\nabla_x^p \nabla_y^q u_0| &\leq \\ &\leq \frac{C_1(k_2, d, p, q)}{\sqrt{|x_1|}} \exp(-k_2|x_1|/2), \quad (9) \end{aligned}$$

которые выполняются для $p, q = 0, 1, 2, \dots$ равномерно по $y \in \bar{\mathcal{D}}$.

Пусть \mathcal{D} — ограниченное множество и пусть $\Gamma = \{x : x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a, b]\}$ — простая

гладкая замкнутая или разомкнутая кривая такая, что $\Gamma \subset \mathcal{D}$. Предположим, что на Γ выбрано непрерывное поле нормалей \mathbf{n}_x . Полагая $\mu(\sigma) \in L_1(\Gamma)$, построим потенциалы простого и двойного слоя [2]:

$$w_1[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) u(j, x, y(\sigma)) d\sigma = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad (10)$$

$$w_2[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(j, x, y(\sigma)) d\sigma = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad (11)$$

а также рассмотрим угловой потенциал [3]

$$v[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) V(j, x, \sigma) d\sigma = v_1[\mu](x) + v_0[\mu](x), \quad (12)$$

$$v_p[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) V_p(j, x, \sigma) d\sigma, \quad p = 0, 1,$$

где

$$V(j, x, s) = \int_a^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad s \in [a, b], \quad (13)$$

$$V_1(j, x, s) = \frac{i}{4} \int_a^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma,$$

$$V_0(j, x, s) = \int_a^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad s \in [a, b].$$

Полагая $\rho(s) = \int_a^s \mu(\sigma) d\sigma$, $s \in [a, b]$, запишем угловой потенциал в виде потенциала двойного слоя:

$$v[\mu](x) = - \int_{\Gamma} [\rho(\sigma) - \rho(b)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(j, x, y(\sigma)) d\sigma = v_1[\mu](x) + v_0[\mu](x),$$

$$v_1[\mu](x) = - \frac{i}{4} \int_{\Gamma} [\rho(\sigma) - \rho(b)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma,$$

$$v_0[\mu](x) = - \int_{\Gamma} [\rho(\sigma) - \rho(b)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma.$$

Из приведенных представлений и лемм 1, 2 вытекает

Т е о р е м а 1. Пусть $\overline{\mathcal{D}}$ — ограниченное множество, Γ — простая гладкая замкнутая либо разомкнутая кривая, $\Gamma \subset \mathcal{D}$, $\mu(\sigma) \in L_1(\Gamma)$, тогда потенциалы (10), (11), (12) удовлетворяют в классическом смысле уравнению (6) в $\overline{\Omega} \setminus \Gamma$, граничным условиям (7), (8) и условиям (9) при $|x_1| \rightarrow \infty$. Кроме того, вторые слагаемые в потенциалах принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega})$ по x , удовлетворяют уравнению (6) и условиям (9) при $|x_1| \rightarrow \infty$.

Поскольку вторые слагаемые в потенциалах (10)–(12) принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega})$, то поведение этих потенциалов определяется первыми слагаемыми, которые хорошо изучены. Действительно, первые слагаемые в (10)–(12) представляют собой потенциал простого слоя [2, 3], потенциал двойного слоя [2] и угловой потенциал [3] для уравнения Гельмгольца на плоскости.

2. Задача о трещинах в волноводе

В полосе Ω рассмотрим разомкнутый контур Γ , представляющий собой совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов [4]. Предположим, что расстояние между точками Γ и точками стенок полосы ($x_2 = 0$, $x_2 = l$) не меньше $d > 0$, т. е. Γ принадлежит некоторому множеству \mathcal{D} . Пусть контур Γ параметризован и в качестве параметра выступает длина дуги s : $\Gamma_n = \{x : x = x(s), s \in [a_n, b_n]\}$, $n = 1, \dots, N$. Параметризацию выберем так, чтобы для различных n отрезки $[a_n, b_n]$ на оси Os не имели общих точек, в том числе концов.

Предположим, что полоса разрезана вдоль Γ . Левый берег разреза обозначим Γ^+ , а правый — Γ^- .

Будем говорить, что функция $g(x)$ принадлежит классу \mathbf{K} , если:

- 1) $g(x) \in C^2(\Omega \setminus \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega \setminus \Gamma})$, и $g(x)$ непрерывна на концах Γ ;
- 2) $\nabla g \in C^0(\overline{\Omega \setminus \Gamma} \setminus X)$, где X — множество концов контура Γ , т. е. $X = \bigcup_{n=1}^N \{x(a_n), x(b_n)\}$;
- 3) на концах контура Γ , т. е. при $x \rightarrow x^0 \in X$, выполнена оценка

$$|\nabla g| < A|x - x^0|^\epsilon,$$

где константа $A > 0$ и $\epsilon > -1$.

Через $C^0(\overline{\Omega \setminus \Gamma})$ обозначен класс функций, которые непрерывно продолжимы на разрезы Γ слева и справа, но их значения на Γ могут быть различны, т. е. эти функции могут иметь на Γ разрыв первого рода (скачок).

Рассмотрим краевую задачу о трещинах в диссипативном волноводе.

З а д а ч а Т. Найти функцию $g(x)$ из класса \mathbf{K} , удовлетворяющую: 1) уравнению (6) в области $\Omega \setminus \Gamma$, 2) одному из граничных условий (7) или (8) на боковых стенках полосы Ω , 3) граничным условиям на Γ

$$g|_{x(s) \in \Gamma^+} - g|_{x(s) \in \Gamma^-} = f_1(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma), \quad (14a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x(s) \in \Gamma^+} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x(s) \in \Gamma^-} = f_2(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad (14b)$$

где $f_1(a_n) = f_1(b_n) = 0$, для $n = 1, \dots, N$, коэффициент Гельдера $\lambda \in (0, 1]$, и \mathbf{n} — нормаль на Γ , направление которой после поворота на угол $\pi/2$ против часовой стрелки совпадает с направлением возрастания параметра s . Кроме того, в полосе Ω функции $g(x)$, $g_{x_1}(x)$ должны равномерно по x_2 стремиться к нулю при $|x_1| \rightarrow \infty$.

Все условия задачи **Т** понимаются в классическом смысле. Условия на концах Γ в определении класса \mathbf{K} обеспечивают отсутствие точечных источников на этих концах. В свою очередь условия на бесконечности в постановке задачи **Т** гарантируют отсутствие точечных источников на бесконечности. Разрезы Γ моделируют трещины в волноводе.

Отметим, что коэффициент Гельдера λ для контура Γ и для функций из граничного условия один и тот же. Если эти коэффициенты различны, то в качестве λ всегда можно выбрать наименьший.

С помощью метода энергетических тождеств для уравнения (6) нетрудно показать, что задача **Т** имеет не более одного решения. Действительно, пусть $g_0(x)$ — решение однородной задачи **Т**. Покажем, что $g_0(x) \equiv 0$. Рассмотрим прямоугольник $M_B = \{x: x \in \Omega, |x_1| < B, x_2 \in (0, l)\}$, содержащий Γ , и внешнюю нормаль к ∂M_B обозначим через \mathbf{n} . Запишем формулу Грина для уравнения (6) в $M_B \setminus \Gamma$:

$$\begin{aligned} & \|\nabla g_0\|_{L_2(M_B \setminus \Gamma)}^2 - k^2 \|g_0\|_{L_2(M_B \setminus \Gamma)}^2 = \\ & = \int_{\partial M_B} \bar{g}_0 \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} dl + \int_{\Gamma} \left[\bar{g}_0^+ \left(\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - \bar{g}_0^- \left(\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} \right)^- \right] ds, \end{aligned} \quad (15)$$

где индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения функций на Γ^+ и Γ^- соответственно. Через $\bar{g}_0(x)$ обозначена функция, комплексно сопряженная с $g_0(x)$. Очевидно, что $\bar{g}_0(x)$, как и $g_0(x)$, удовлетворяет нулевым граничным условиям задачи **Т** и принадлежит классу \mathbf{K} . При выводе тождества (15) учтена непрерывная продолжимость функций $g_0(x)$, $\bar{g}_0(x)$, $\nabla g_0(x)$, $\nabla \bar{g}_0(x)$ на разрезы Γ слева и справа, а также учтены оценки для $\nabla g_0(x)$ и $\nabla \bar{g}_0(x)$ на концах Γ , гарантированные классом гладкости \mathbf{K} . Полагая в (15) $B \rightarrow \infty$, учитывая условия на бесконечности из задачи **Т** и нулевые условия на боковых стенках полосы Ω , получим, что первый интеграл в правой

части формулы стремится к нулю и формуле можно придать вид

$$\begin{aligned} & \|\nabla g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 - k^2 \|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ [\bar{g}_0^+(x) - \bar{g}_0^-(x)] \left(\frac{\partial g_0(x)}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ + \right. \\ & \left. + \bar{g}_0^-(x) \left[\left(\frac{\partial g_0(x)}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - \left(\frac{\partial g_0(x)}{\partial \mathbf{n}} \right)^- \right] \right\} ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из нулевых граничных условий (14), которые справедливы для g_0 и \bar{g}_0 , вытекает, что интеграл в правой части (16) равен нулю, т. е.

$$\|\nabla g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 - k^2 \|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = 0. \quad (17)$$

Напомним, что $k = k_1 + i k_2$ и $k_2 > 0$. Если $k_1 = 0$, то из (17) следует $\|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = 0$. Если $k_1 \neq 0$, то беря в (17) мнимую часть, найдем, как и выше, что $\|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = 0$. Таким образом, $g_0(x) \equiv 0$, а значит, однородная задача **Т** имеет только тривиальное решение. В силу линейности неоднородная задача **Т** имеет не более одного решения.

Непосредственной проверкой с использованием теоремы 1 и результатов из [3] несложно убедиться в том, что решение задачи **Т** дается формулой

$$g(x) = v[f'_1](x) + w_1[f_2](x), \quad (18)$$

где $v[f'_1](x)$ — угловой потенциал (12) с плотностью $f'_1(s)$, $w_1[f_2](x)$ — потенциал простого слоя (10) с плотностью $f_2(s)$, причем в (10), (12) под интегралом по Γ понимается сумма интегралов по $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$. На каждой кривой Γ_n ядро углового потенциала определяется формулой (13), в которой $a = a_n$, $b = b_n$.

Из результатов [3] и теоремы 1 вытекает, что функция (18) принадлежит классу \mathbf{K} . В частности, неравенство из п. (3) в определении класса \mathbf{K} справедливо при любом $\epsilon \in (-1, 0)$.

При построении решения задачи **Т** мы учли то, что нормальная производная углового потенциала $v[f'_1](x)$ непрерывна на Γ , а также то, что потенциал простого слоя $w_1[f_2](x)$ и его касательная производная непрерывны на Γ . Эти свойства потенциалов непосредственно вытекают из результатов работы [3] и теоремы 1. Отметим, что потенциалы (10), (12) удовлетворяют условию (7), когда $j = 1$, и условию (8), когда $j = 2$. Очевидно, функция (18), дающая решение задачи **Т**, удовлетворяет условиям (7), (8) в тех же случаях.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Т е о р е м а 2. Решение задачи **Т** существует, единственно и дается формулой (18).

Отметим, что формула (18) дает явное решение задачи T для трещин Γ произвольной формы.

Краевые задачи в случае прямолинейного отрезка Γ с классическим условием Дирихле либо Неймана изучались в работах [5, 6]. Численные подходы к классическим задачам о трещинах обсуждаются в работе [7].

Литература

1. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

3. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1994. 34, № 8–9. С. 1237.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
5. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
6. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. Киев, 1984.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев, 1981.

Поступила в редакцию
25.06.97

УДК 517.54

РАСЧЕТ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОЛЕЙ ХОЛЛА В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИНКАХ МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В. И. Иванов

(кафедра математики)

Задача о распределении электрического тока в замагниченной пластинке с двумя протяженными электродами на границе решается методом конформного отображения на параллелограмм. Рассмотрены случаи вырождения одного или обоих электродов в точку. Построены картины линий тока и эквипотенциалей электрического поля в прямоугольных и круглых пластинках.

1. Пусть плоская односвязная область G представляет однородную изотропную электропроводящую пластинку, помещенную в однородное магнитное поле H , перпендикулярное плоскости пластинки. Пусть участки L_1 и L_2 границы области G представляют электроды, на которых заданы значения потенциала электрического поля:

$$U|_{L_1} = 0, \quad U|_{L_2} = U_0.$$

Участки границы C_1 и C_2 предполагаются электрически изолированными (рис. 1,а). Рассматривается задача о распределении электрического тока \mathbf{J} и электрического поля $\mathbf{E} = \nabla U$ в области G .

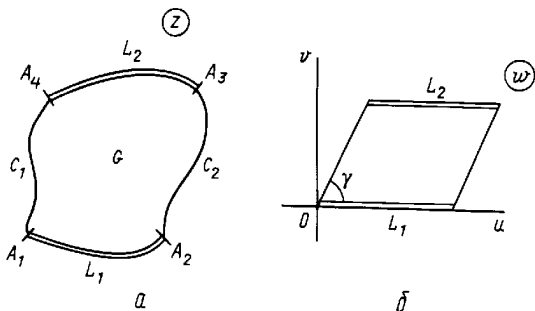


Рис. 1. Пластинка с двумя протяженными электродами L_1 и L_2 (а) и ее отображение (б)

Распределение электрического тока в замагниченной пластинке определяется законом [1,2]

$$\mathbf{J} = \rho^{-1}(\mathbf{E} + R[\mathbf{J} \times \mathbf{H}]), \tag{1}$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление, R — константа Холла. Иначе зависимость между \mathbf{E} и \mathbf{J} можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{E} = \rho \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J},$$

где $\beta = RH/\rho$. Полагая $\beta = \operatorname{tg} \alpha$, представим зависимость между \mathbf{E} и \mathbf{J} в виде

$$\mathbf{E} = \rho \operatorname{sec} \alpha \hat{P} \mathbf{J}, \tag{2}$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

— оператор поворота на угол α . Таким образом, в замагниченной пластинке векторы \mathbf{E} и \mathbf{J} в каждой точке составляют постоянный угол α , называемый углом Холла.

Векторные поля \mathbf{E} и \mathbf{J} суть гармонические, причем линии тока пересекают эквипотенциалы электрического поля под постоянным углом $\gamma = \pi/2 - \alpha$.