Отметим, что формула (18) дает явное решение задачи **T** для трещин Г произвольной формы.

Краевые задачи в случае прямолинейного отрезка Г с классическим условием Дирихле либо Неймана изучались в работах [5, 6]. Численные подходы к классическим задачам о трещинах обсуждаются в работе [7].

Литература

1. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
3. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1994. **34**, №8–9. С. 1237.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
5. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
6. *Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А.* Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. Киев, 1984.
7. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев, 1981.

Поступила в редакцию
25.06.97

УДК 517.54

РАСЧЕТ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОЛЕЙ ХОЛЛА В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИНКАХ МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В. И. Иванов

(кафедра математики)

Задача о распределении электрического тока в замагниченной пластинке с двумя протяженными электродами на границе решается методом конформного отображения на параллелограмм. Рассмотрены случаи вырождения одного или обоих электродов в точку. Построены картины линий тока и эквипотенциалей электрического поля в прямоугольных и круглых пластинках.

1. Пусть плоская односвязная область G представляет однородную изотропную электропроводящую пластинку, помещенную в однородное магнитное поле H, перпендикулярное плоскости пластинки. Пусть участки L_1 и L_2 границы области G представляют электроды, на которых заданы значения потенциала электрического поля:

$$U\,|_{L_1}=0, \quad U\,|_{L_2}=U_0.$$

Участки границы C_1 и C_2 предполагаются электрически изолированными (рис. 1,*а*). Рассматривается задача о распределении электрического тока **J** и электрического поля $\mathbf{E}=\nabla U$ в области G.

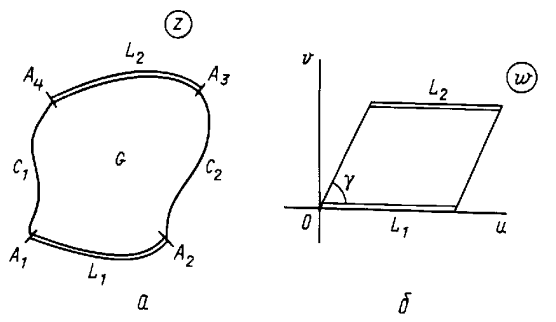

Рис. 1. Пластинка с двумя протяженными электродами L_1 и L_2 (*а*) и ее отображение (*б*)

Распределение электрического тока в замагниченной пластинке определяется законом [1,2]

$$\mathbf{J}=\rho^{-1}(\mathbf{E}+R[\mathbf{J}\times\mathbf{H}]), \qquad (1)$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление, R — константа Холла. Иначе зависимость между **E** и **J** можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{E}=\rho\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ \beta & 1\end{pmatrix}\mathbf{J},$$

где $\beta=RH/\rho$. Полагая $\beta=\operatorname{tg}\alpha$, представим зависимость между **E** и **J** в виде

$$\mathbf{E}=\rho\sec\alpha\,\hat{P}\mathbf{J}, \qquad (2)$$

где

$$\hat{P}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

— оператор поворота на угол α. Таким образом, в замагниченной пластинке векторы **E** и **J** в каждой точке составляют постоянный угол α, называемый углом Холла.

Векторные поля **E** и **J** суть гармонические, причем линии тока пересекают эквипотенциали электрического поля под постоянным углом $\gamma=\pi/2-\alpha$.

Условие $J_n = 0$ на изолированных участках границы C_1 и C_2 обращается в условие $E_l = \partial U/\partial l = 0$, где $\partial/\partial l$ — наклонная производная в направлении, составляющем угол γ с направлением касательной к границе области:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial s}\cos\gamma - \frac{\partial U}{\partial n}\sin\gamma.$$

Здесь $\partial/\partial s$ и $\partial/\partial n$ обозначают производные по длине дуги s и по нормали к границе n соответственно.

Таким образом, задача определения потенциала электрического поля формулируется как смешанная краевая задача для гармонической функции U с заданными значениями на участках границы L_1 и L_2 и с нулевой наклонной производной на участках C_1 и C_2:

$$\Delta U = 0 \quad \text{в области} \quad G,$$

$$U|_{L_1} = 0, \quad U|_{L_2} = U_0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{C_1} = \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{C_2} = 0.$$

2. Задачу (3) можно эффективно решить с помощью конформного отображения. Для этого следует отобразить область G на параллелограмм плоскости $w = u + iv$ с острым углом γ так, чтобы участок границы L_1 отобразился в нижнюю сторону параллелограмма, а участок L_2 — в его верхнюю сторону (рис. 1,*б*). При этом эквипотенциали электрического поля отобразятся в горизонтальные прямые $v = \text{const}$, а линии тока — в наклонные прямые

$$-u\sin\gamma + v\cos\gamma = \operatorname{Im}(w\,\mathrm{e}^{-i\gamma}) = \text{const}\,.$$

Пусть область G отображается на полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ с помощью функции $t = f(z)$ и при этом точки A_1, A_2, A_3, A_4 отображаются соответственно в точки вещественной оси a_1, a_2, a_3, a_4, причем $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Отображение полуплоскости на параллелограмм (рис. 1,*б*) осуществляется интегралом Кристоффеля–Шварца

$$w = C\int_0^t (t-a_1)^{k-1}(a_2-t)^{-k}(a_3-t)^{k-1}(a_4-t)^{-k}\,dt, \tag{4}$$

где $k = \gamma/\pi$, C — масштабный множитель ($C > 0$). Эквипотенциали и линии тока в области G строятся соответственно как линии уровня функций $v = \operatorname{Im} w$, $V = \operatorname{Im}(w\,\mathrm{e}^{-i\gamma})$.

3. В общем случае задача отображения заданной области на параллелограмм решается только численно. Для некоторых областей простой формы в случае вырождения одного или обоих электродов в точку задача может быть решена аналитически.

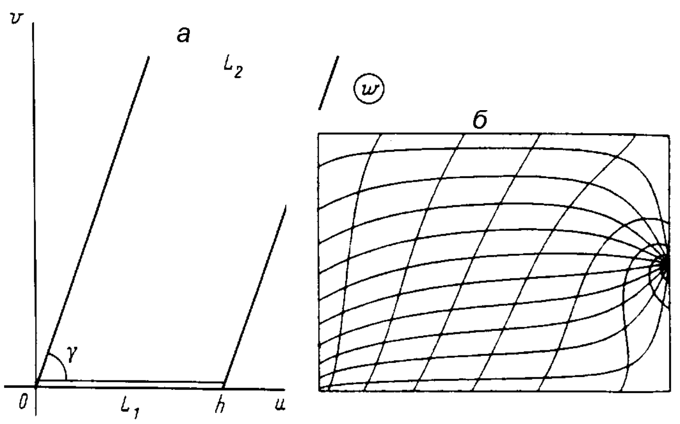

Рис. 2. Отображение пластинки с одним точечным и одним протяженным электродом (*а*) и линии тока и эквипотенциали в прямоугольной пластинке с одним точечным и одним протяженным электродами при $\alpha = 30°$ (*б*)

Пусть один электрод (L_2) представляет собой точку, а электрод L_1 является протяженным. В этом случае следует конформно отобразить область G на скошенную полубесконечную полосу с острым углом γ так, чтобы точка L_2 отобразилась в бесконечно удаленную точку, а протяженный электрод L_1 — в отрезок вещественной оси (рис. 2,*а*). Предварительно область G отображается на полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ так, чтобы протяженный электрод L_1 отобразился в отрезок (0, 1), а точка L_2 — в бесконечность. Нужное отображение полуплоскости на скошенную полуполосу (рис. 2,*а*) осуществляется функцией

$$w = C\int_0^t t^{k-1}(1-t)^{-k}\,dt, \tag{5}$$

где $k = \gamma/\pi$, $C = h/B(k, 1-k) = h/\pi\sin\gamma$.

Интеграл в формуле (5) выражается через гипергеометрическую функцию [3]:

$$\int_0^t t^{k-1}(1-t)^{-k}\,dt = (t^k/k)\,F(k, k; k+1; t).$$

Последняя вычисляется в круге $|t| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда, а вне круга — по формулам его аналитического продолжения.

Пример компьютерной визуализации сети эквипотенциалей и линий тока в прямоугольной пластинке приведен на рис. 2,*б*. Здесь предполагается, что один электрод (протяженный) представляет собой сторону прямоугольника, а другой электрод — точку, помещенную в середине противоположной стороны. Угол Холла предполагается равным 30°. Эквипотенциали и линии тока построены соответственно как изолинии функций $v = \operatorname{Im} w$, $V = \operatorname{Im}(w\,\mathrm{e}^{-i\gamma})$.

4. Если оба электрода представляют собой точки на границе пластинки, то задача о распределении полей Холла решается с помощью конформного отображения области G на бесконечную полосу. Следует отобразить область G на полосу так, чтобы электроды отобразились в бесконечно удаленные граничные точки полосы. При этом линии тока отображаются в бесконечные прямые, а эквипотенциали — в их изогональные траектории (отрезки наклонных прямых).

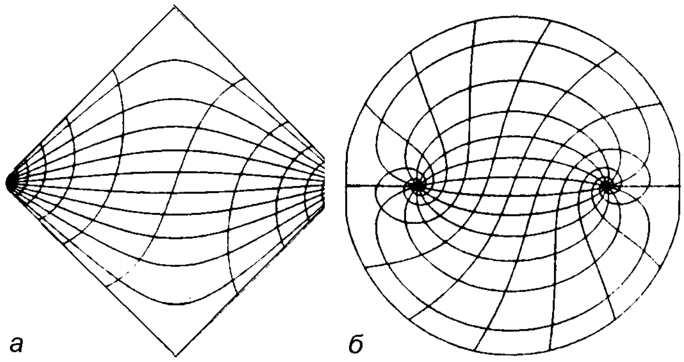

Рис. 3. Линии тока и эквипотенциали в замагниченных пластинках при $\alpha = 20°$: точечные электроды на границе пластинки (*а*) и внутри пластинки (*б*)

Пример визуализации полей Холла в квадратной пластинке с электродами, помещенными в противоположных вершинах квадрата, представлен на рис. 3,*а*. Угол Холла полагается равным 20°.

5. Задача о распределении полей Холла решается с помощью конформного отображения и в тех случаях, когда один или оба точечных электрода помещены внутри области G. В этих случаях следует отобразить область G на бесконечную плоскость с прямолинейным разрезом так, чтобы один электрод отобразился в начало координат, другой — в бесконечно удаленную точку, а граница области — в разрез вдоль отрезка вещественной оси. При этом линии тока отображаются в лучи, выходящие из начала координат, а эквипотенциали — в их изогональные траектории, т.е. логарифмические спирали. Пример такого отображения (при значении $\alpha = 20°$) приведен на рис. 3,*б*. Здесь изображена сеть эквипотенциалей и линий тока в круглой пластинке в случае, когда точечные электроды расположены в симметричных точках внутри пластинки.

Рисунки 2,*б* и 3 построены с помощью компьютерной программы CONFORM, прилагаемой к книге [4]. При построении рис. 2,*б* и 3,*а* использовались эллиптические функции комплексного аргумента, вычисляемые программой CONFORM.

Автор выражает благодарность А. Э. Юновичу и В. В. Остробородовой за ценные консультации.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1992.
2. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г.* Физика полупроводников. М., 1990.
3. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
4. *Ivanov V.I., Trubetskov M.K.* Handbook of Conformal Mapping with Computer-Aided Visualization. Boca Raton: CRC Press, 1995.

Поступила в редакцию
09.07.97