УДК 530.12:51

ФИНСЛЕРОВ ПОДХОД К ТЕОРИИ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ: ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ЭНЕРГИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПАУЛИ–ЙОРДАНА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрено действительное скалярное поле на основе финслеровой функции Гамильтона. Показано, что использование специальной релятивистской финслеровой метрической функции приводит к положительности энергии поля. Предложено финслерово обобщение функции Паули–Йордана, сохраняющее обычный вид коммутаторов, и найдена связь между амплитудами $u^{\pm}(\mathbf{k})$ и $u^{\pm}(k)$.

1. Введение

В предыдущих работах [1–6] методы финслеровой геометрии были использованы для обобщения основных соотношений специальной теории относительности. Возможность развития финслерова обобщения теории квантованных полей предполагает, что предварительно найден ответ на вопрос: «Как вычислять энергию поля при финслеровом подходе?». Фундаментальность этого вопроса обусловлена уже тем, что коммутаторы квантованных полей устанавливаются на основе условия положительности энергии полей [7, 8].

Ниже мы рассмотрим финслерово действительное скалярное поле $u(x)$ и найдем для него решения в виде плоских волн. Соответствующий тензор энергии-импульса $T_m{}^n$ имеет ясную структуру. Основываясь на специальной финслеровой метрической функции (использованной в [1–6]), мы обнаружим, что энергия поля, определяемая компонентой $T_0{}^0$, строго положительна. Опираясь на этот факт, можно вывести финслеровы обобщения основных соотношений для квантованного скалярного поля.

2. Финслерово уравнение Клейна–Гордона для скалярного поля

Финслерова геометрия вводит метрические функции F на касательных расслоениях. Обозначим через x^n локальные координаты основного пространственно-временного многообразия, а через y^m — компоненты четырехмерных контравариантных касательных векторов y, опирающихся на точки x. Финслерова метрическая функция $F(x^n, y^m)$ порождает финслерову функцию Гамильтона $H(x^n, y_m)$ на кокасательном расслоении, образуемом парами (x^n, y_m), где y_m — компоненты четырехмерных ковариантных касательных векторов, опирающихся на точки x. Переход от F к H подробно описан в работах [9, 10].

Функция H обладает свойством однородности:

$$H(x, qy) = qH(x, y), \quad q > 0, \tag{1}$$

и определяет якобиан

$$J(x^n, y_m) = \left| \det \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2}{\partial y_i \partial y_j} \right) \right|^{-1/2}. \tag{2}$$

Пусть $u = u(x)$ — действительное скалярное поле. Обозначим $u_i(x) = \partial_i u(x)$, где $\partial_i = \partial/\partial x^i$, заменим в функции H исходные векторы y_i на $u_i(x)$ и возьмем лагранжеву плотность для поля $u(x)$ в виде

$$L = \frac{1}{2} \left[H^2 \left(x^n, u_i(x^n) \right) - m^2 u^2(x^n) \right] J \left(x^n, u_i(x^n) \right). \tag{3}$$

Соответствующая производная Эйлера–Лагранжа

$$E = \partial_i \frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial L}{\partial u} \tag{4}$$

связана с ассоциируемым тензором энергии-импульса

$$T_i{}^j = \left(u_i \frac{\partial L}{\partial u_j} - \delta_i{}^j L \right) / J. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда пространство-время не имеет кривизны, т. е. когда существует такая система координат x^j, что относительно нее функция Гамильтона не зависит от x:

$$H = H(u_i(x)), \quad J = J(u_i(x)). \tag{6}$$

В этом случае функция (4) имеет вид

$$E = \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_m} \partial_j u_m + m^2 u J \tag{7}$$

и выполняется закон сохранения

$$\partial_j T_i{}^j = 0, \quad \text{когда} \quad E = 0. \tag{8}$$

3. Решение вида одной плоской волны

Пусть k_j — некоторый фиксированный волновой вектор. Рассмотрим плоскую волну

$$u(x) = u^+(k)\,\mathrm{e}^{ikx} + u^-(k)\,\mathrm{e}^{-ikx} \tag{9}$$

при условии

$$(u^+(k))^* = u^-(k), \quad (u^-(k))^* = u^+(k) \tag{10}$$

(звездочка — знак комплексного сопряжения). Мы имеем

$$\partial_j u = k_j \tilde{u}, \quad \partial_j \tilde{u} = k_j u, \tag{11}$$

где

$$\tilde{u}(x) = i[u^+(k)\,\mathrm{e}^{ikx} - u^-(k)\,\mathrm{e}^{-ikx}]. \tag{12}$$

Вследствие условия (10) обе функции (9) и (12) действительны:

$$u^* = u, \quad \tilde{u}^* = \tilde{u}. \tag{13}$$

Используя условие однородности (1), находим равенства

$$H(u_i) = \tilde{u} H(k_i), \quad J(u_i) = J(k_i), \tag{14}$$

из которых вытекает, что $\partial_j J(u_i) = 0$ и

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = k^j \tilde{u}, \tag{15}$$

где

$$k^j = \frac{1}{2} \frac{\partial H^2(k)}{\partial k_j}. \tag{16}$$

Учитывая финслерово тождество

$$k_j k^j = H^2(k), \tag{17}$$

находим

$$E = -[H^2(k) - m^2] u, \tag{18}$$

$$T_i{}^j = r_i{}^j(k) \tilde{u}^2 + \frac{1}{2} \delta_i{}^j m^2 u^2, \tag{19}$$

где

$$r_i{}^j(k) = k_i k^j - \frac{1}{2} \delta_i{}^j H^2(k). \tag{20}$$

Дифференцирование тензора (19) и использование равенств (11) дает тождество

$$\partial_j T_i{}^j = k_i [H^2(k) - m^2] u \tilde{u}. \tag{21}$$

Итак, справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Если волновой вектор k_j удовлетворяет финслерову дисперсионному соотношению*

$$H^2(k) - m^2 = 0, \tag{22}$$

то плоская волна (9) *является решением обобщенного уравнения Клейна–Гордона $E = 0$, где E определяется формулами* (2)–(4) *и* (7).

4. Выбор специальной релятивистской финслеровой метрической функции

Для специально-релятивистского случая финслерова функция Гамильтона H была найдена в работе [2]. Эта функция может быть представлена формулами

$$H(k_j) = k_0 W(p), \quad p = |k|/k_0, \quad p < g^+, \tag{23}$$

$$W(p) = [Q^*(p)]^{1/2}\left(\frac{1-p/g^+}{1-p/g^-}\right)^{g/4A} = = (1-p/g^+)^{g^+/2A}(1-p/g^-)^{-g_-/2A}, \tag{24}$$

где $A = \left[1+\frac{1}{4}g^2\right]^{1/2}$, $g^+ = \frac{1}{2}g + A$, $g^- = \frac{1}{2}g - A$ и

$$Q^*(p) = 1 + gp - p^2. \tag{25}$$

Вычисление компонент дисперсионного сотношения (16) дает

$$k^0 = (k_0 + g|k|)H^2(k)/[(k_0)^2 Q^*(p)], \tag{26}$$

$$k^a = -(k_a/k_0)H^2/[k_0 Q^*(p)]. \tag{27}$$

Используя (25)–(27), находим, что компонента $r_0{}^0$ тензора (20) равна

$$r_0{}^0(k) = \frac{1}{2}H^2(k)/\left[Q^*(p)\widetilde{Q}^*(p)\right], \tag{28}$$

где

$$\widetilde{Q}^*(p) = 1 - gp + p^2. \tag{29}$$

Якобиан (2) равен

$$J(p) = W^4(p)/[Q^*(p)]^2. \tag{30}$$

Из (19) мы имеем $T_0{}^0 = r_0{}^0 u^2 + m^2 u^2$, а (28) показывает, что $r_0{}^0 > 0$. Следовательно,

$$T_0{}^0 > 0. \tag{31}$$

Итак, энергия скалярного поля строго положительна.

Переход к суперпозиции решений вида (9) можно осуществить просто по правилу инвариантного интегрирования

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x) = = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{e}^{ikx}\,\delta(H^2(k)-m^2)u(k)J(k)d^4k, \tag{32}$$

$$u^{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{e}^{\pm ikx}\,\delta(H^2(k)-m^2)u^{\pm}(k)J(k)d^4k, \tag{33}$$

где $u^+(k) = \theta(k_0)u(k)$, $u^-(k) = \theta(k_0)u(-k)$; $\theta(k_0) = 1$, если $k_0 > 0$, и $\theta(k_0) = 0$, если $k_0 < 0$. По тому же правилу введем финслерово обобщение функций Паули–Йордана:

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x), \tag{34}$$

$$D^{\pm}(x) = \left[(2\pi)^3 i\sqrt{J(x)}\right]^{-1} \times \times \int \left(\mathrm{e}^{\pm ikx}/\sqrt{J(k)}\right)\delta(H^2(k)-m^2)J(k)\,d^4k \tag{35}$$

(ср. формулы (15.1) и (15.2) из [7]).

Пусть теперь поле (32)–(33) квантуется, так что $u^{\pm}(k)$ предполагаются операторами. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Фундаментальные коммутаторы для финслерова квантованного скалярного поля имеют вид*

$$[u(x), u(\widetilde{x})]_- = \frac{1}{i}\sqrt{J(x-\widetilde{x})}\,D(x-\widetilde{x}), \tag{36}$$

$$\begin{gathered}[u^-(x), u^+(\widetilde{x})]_- = \frac{1}{i}\sqrt{J(x-\widetilde{x})}\,D^-(x-\widetilde{x}),\\ [u^+(x), u^-(\widetilde{x})]_- = \frac{1}{i}\sqrt{J(x-\widetilde{x})}\,D^+(x-\widetilde{x}),\end{gathered} \tag{37}$$

$$[u^-(\mathbf{k}), u^+(\widetilde{\mathbf{k}})]_- = 1/\sqrt{J(\mathbf{k})}\,\delta(\mathbf{k}-\widetilde{\mathbf{k}}), \tag{38}$$

где

$$u^{\pm}(\mathbf{k}) = u^{\pm}(k)/\sqrt{b(\mathbf{k})}, \tag{39}$$

$$b(\mathbf{k}) = 2k^0/J(\mathbf{k}) = 2(k_0 + g|\mathbf{k}|)/\sqrt{J(\mathbf{k})}. \tag{40}$$

Справедливость этой теоремы проверяется прямой подстановкой (32)–(33) в (36)–(38) и использованием (34) и (35). Финслерово соотношение (39)–(40) обобщает обычное равенство $u^{\pm}(\mathbf{k}) = u^{\pm}(k)/\sqrt{2k_0}$ (см. (3.22) в [7]). Поскольку в правых частях в (36)–(37) аргументом является разность $x - \widetilde{x}$, *трансляционная инвариантность коммутаторов не нарушается при финслеровом обобщении.*

Для четырехмерного импульса получается выражение стандартного вида:

$$P_j = \int k_j u^+(\mathbf{k})u^-(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}. \tag{41}$$

С помощью формул (39)–(40) оно может быть переписано в ковариантном виде:

$$P_j = \int k_j u^+(k)u^-(k)\delta(H^2(k)-m^2)\theta(k_0)J(k)d^4k. \tag{42}$$

Условие положительности энергии $P_0 > 0$ обеспечено и согласовано с коммутаторами.

5. Заключение

Переход от обычной лоренц-инвариантной теории квантованных полей к финслерову обобщению предполагает использование следующих «рецептов»: волновое уравнение выводится из лагранжевой плотности $H^2(u_i)J(u_i)$; в импульсном пространстве интеграл $\int d^4k$ заменяется на инвариантный интеграл $\int J(k)\,d^4k$; δ-функция берется в виде $\delta(H^2(k)-m^2)$; финслерова функция Гамильтона H выбирается в специально-релятивистском виде (23)–(25); обычная связь между операторами $u^{\pm}(\mathbf{k}) = u^{\pm}(k)/\sqrt{2k_0}$ заменяется на связь (39)–(40); функции Паули–Йордана обобщаются «по ковариантности», т. е. согласно (34)–(35); используются коммутаторы вида (36)–(38); представление для импульса обобщается «по ковариантности», т. е. берется в виде (41)–(42).

Необходимо проводить последовательное и аккуратное различие между компонентами k_j и k^j четырехмерного волнового вектора; в частности $k_0 \neq k^0$ и $k_a \neq -k^a$ [10, 11].

Дальнейшее развитие настоящей работы предполагает построение финслеровой теории комплексного скалярного поля, электромагнитного и спинорного полей, а также изучение свойств финслеровых функций Паули–Йордана.

Литература

1. *Асанов Г.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. № 1. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 1994. No. 1. P. 18).
2. *Асанов Г.С.* // Там же. 1994. № 2. С. 13 (Ibid. No. 2. P. 11).
3. *Асанов Г.С.* // Там же. 1995. № 4. С. 7 (Ibid. No. 4. P. 6).
4. *Асанов Г.С.* // Там же. 1996. № 1. С. 18 (Ibid. No. 1. P. 15).
5. *Асанов Г.С.* // Там же. 1996. № 2. С. 8 (Ibid. No. 2. P. 6).
6. *Асанов Г.С.* // Там же. 1996. № 3. С. 8 (Ibid. No. 3. P. 8).
7. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.
8. *Швебер С.* Введение в релятивистскую теорию поля. М., 1963.
9. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.
10. *Asanov G.S.* Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.
11. *Asanov G.S.* // Reports on Math. Phys. 1997. **39**. P. 69.

Поступила в редакцию
15.12.97

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.385.6

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СВЧ-ПОЛЯ НА РЕЖИМЫ МАЗЕРА НА АНОМАЛЬНОМ ЭФФЕКТЕ ДОПЛЕРА С ЛЕНТОЧНЫМ ПУЧКОМ

А. Ф. Александров, В. А. Кубарев, А. В. Михайлов

(кафедра физической электроники)

Исследовано влияние поперечной неоднородности СВЧ-поля на взаимодействие электронов с излучением в мазере на циклотронном резонансе с планарной замедляющей системой и ленточным пучком в условиях аномального эффекта Доплера. Изучены режимы усиления в зависимости от ведущего магнитного поля.

Мазер на циклотронном резонансе, работающий в условиях аномального эффекта Доплера (МЦР АД), представляет собой одну из перспективных разновидностей мазеров на свободных электронах, не требующих предварительной закрутки пучка и отличающихся простотой конструкции. В работе [1] показана возможность достижения высокого кпд МЦР АД-усилителя с попутной волной и генератора со встречной волной. Однако в этой работе не учитывалась поперечная неоднородность СВЧ-поля (использовалось квазиплоское приближение [2]). При экспериментальном исследовании МЦР АД с диэлектрической замедляющей системой коаксиальной конструкции [3] достигнутый кпд был невысок (около 1%). Подобное исследование МЦР АД-генератора [4] коаксиальной структуры с гофрированным стержнем и трубчатым пучком показало, что он может быть источником мощных СВЧ-колебаний. Для получения генерации использовался принцип самовозбуждения колебаний вблизи π-вида границы полосы прозрачности. Мощность генерации составляла 10–50 МВт при ускоряющем напряжении 500 кВ, токах 2–3 кА и длительности импульсов 200 нс и имела максимум при $B \approx 11$ кГс.

Таким образом, имеется значительный разрыв между экспериментально достигнутыми уровнями кпд МЦР АД и теоретическими оценками. Это указывает на излишнюю идеализацию использованных моделей, в частности на недостаточный учет конечности ларморовских радиусов электронов и неодно-