Краткие сообщения

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.984.5

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРЕТЬИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

В. П. Моденов

(кафедра математики)

Дифференциально-параметрическим методом вычисляются собственные значения задач Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя с граничными условиями третьего рода.

1. Решение задачи на собственные значения для круга радиуса $0 < r \leqslant a$ с граничным условием (в общем случае несамосопряженным) третьего рода приводит к необходимости рассмотрения задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя:

$$L[R] + \lambda^2 r R(r) = 0 \quad (0 < r < a) \tag{1}$$

с условием ограниченности решения в центре круга

$$|R(0)| < \infty \tag{2}$$

и условием

$$R'(a) + hR(a) = 0 \tag{3}$$

на границе этого круга, где

$$L[R] = (rR')' - (n^2/r^2)R,$$

h — заданное число (возможно комплексное, $\operatorname{Re} h > 0$), λ — искомые собственные значения, $R(r)$ — собственные функции.

Рассмотрим алгоритм вычисления собственных значений этой задачи, основанный на редукции ее к задаче Коши и не требующий нахождения собственных функций.

Вводя новую переменную, полагая

$$x = \lambda r$$

и обозначая

$$R(r) = R(x/\lambda) = y(x),$$

запишем уравнение Бесселя в форме [1,2]

$$(xy')'/x + (1 - n^2/x^2)y(x) = 0 \quad (0 < x < \lambda a). \tag{1'}$$

Граничные условия примут следующий вид:

$$|y(0)| < \infty, \tag{2'}$$

$$\lambda y'(\lambda a) + hy(\lambda a) = 0. \tag{3'}$$

Полученная задача задает неявно собственные значения λ как функции параметра h. Применим для их нахождения дифференциально-параметрический метод [3].

Введем функцию

$$S(z) = y'(z)/y(z)$$

и запишем уравнение (3′) в виде

$$S(\lambda a) = -h/\lambda. \tag{4}$$

Так как $y(z)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (1′), то функция $S(z)$ имеет дифференциально-полиномиальное свойство (ДП-свойство), т. е. ее производная выражается в виде полинома от самой функции:

$$S'(z) = (n^2/z^2 - 1) - S(z)/z - S^2(z). \tag{5}$$

Применяя к уравнению (4) теорему о производной неявно заданной функции и воспользовавшись ДП-свойством (5), приходим к задаче Коши:

$$d\lambda/dh = \lambda a / \left[(\lambda a)^2 + (ha)^2 - n^2\right], \tag{6}$$

или, обозначая $\lambda_a = \lambda a$, $\alpha = ha$, к задаче

$$d\lambda_a/d\alpha = \lambda_a / \left(\lambda_a^2 + \alpha^2 - n^2\right), \quad \lambda_a\Big|_{\alpha=0} = \nu a,$$

где ν — собственные значения соответствующей самосопряженной (при $h = 0$) задачи (1)–(3) с граничным условием второго рода, т. е. ν — нули производной функции Бесселя, которые считаем известными [4].

Таким образом, при условии

$$(\lambda a)^2 + (ha)^2 \neq n^2$$

спектр собственных значений краевой задачи (1)–(3) является невырожденным и находится при решении задачи Коши (6)–(7).

При условии $|h| \ll 1$, $|\lambda a| \gg n$ по формуле Тейлора получим асимптотику собственных значений:

$$\lambda \simeq \nu + h/(\nu a).$$

2. Решение задачи на собственные значения для кольца $0 < b \leqslant r \leqslant a$ с граничными условиями третьего рода приводят к аналогичной задаче Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя:

$$L[R] + \lambda^2 rR(r) = 0 \quad (0 < b < r < a)$$

с условием на внутренней границе кольца

$$R'(b) - h_1 R(b) = 0 \quad (\mathrm{Re}\, h_1 > 0)$$

и условием на внешней границе этого кольца

$$R'(a) + h_2 R(a) = 0 \quad (\mathrm{Re}\, h_2 > 0).$$

Пусть решение соответствующей (при $h_1 = h_2 = 0$) самосопряженной задачи на собственные значения с граничными условиями второго рода известно и равно $\varkappa$.

Тогда аналогично предыдущему с помощью ДП-метода задачу на собственные значения для уравнения Бесселя

$$L[R] + \mu^2 rR(r) = 0 \quad (0 < b < r < a)$$

с условием второго рода на внутренней границе кольца ($h_1 = 0$)

$$R'(b) = 0$$

и условием третьего рода на внешней границе этого кольца

$$R'(a) + h_2 R(a) = 0$$

редуцируем к задаче Коши ($\lambda_a = \mu a$, $\alpha = h_2 a$):

$$d\lambda_a/d\alpha = \lambda_a / \left(\lambda_a^2 + \alpha^2 - n^2\right), \quad \lambda_a\Big|_{\alpha=0} = \varkappa a.$$

Найдя ее решение $\lambda_a = \mu a$, получим для вычисления собственных значений λ исходной задачи следующую задачу Коши ($\lambda_b = \lambda b$, $\beta = -h_1 b$):

$$d\lambda_b/d\beta = \lambda_b / \left(\lambda_b^2 + \beta^2 - n^2\right), \quad \lambda_b\Big|_{\beta=0} = \lambda_a = \mu a.$$

В заключение отметим, что метод вычисления собственных значений путем редукции к задачам Коши позволяет находить собственные значения без использования собственных функций, вычисление которых часто сопряжено со значительными трудностями (особенно при комплексных значениях h, h_1, h_2 и при не целых или комплексных n).

Необходимость решения задач, аналогичных рассмотренным, возникает также при вычислении собственных значений третьих краевых задач для сферы, кругового сектора и др. [2]. К ним приводит, например, исследование волноводно-резонансных коаксиальных [5], сферических и других систем с импедансными граничными условиями типа условий Леонтовича.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М., 1956.
3. *Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 6. С. 55.
4. *Моденов В.П., Филонов А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. матем. и киберн. 1986. № 2. С. 63.
5. *Моденов В. П.* // Радиотехн. и электроника. 1996. **41**, № 6. С. 695.

Поступила в редакцию
26.11.97