УДК 517.9

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНАХ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(кафедра математики)

Решена задача о равновесии круглой пластины под действием постоянной сосредоточенной силы, приложенной в ее центре. Пластина состоит из однородного изотропного основания и существенно неоднородного (в частности, многослойного) покрытия, причем толщина покрытия существенно меньше толщины основания. Величина приложенной сосредоточенной нагрузки такова, что прогиб пластины имеет тот же порядок, что и толщина покрытия. Для определения прогиба применяется асимптотическая методика. Результаты расчета могут быть использованы для приближенного определения упругих характеристик тонких покрытий.

Основание круглой пластины радиуса R имеет толщину h_0 и характеризуется цилиндрической жесткостью

$$D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}. \tag{1}$$

В (1) E_0 — модуль Юнга, ν_0 — коэффициент Пуассона материала основания [1]. Край пластины предполагается закрепленным или опертым. Покрытие имеет толщину h_c ($h_c \ll h_0$) и характеризуется коэффициентами Ламе λ и μ, которые мы считаем существенно зависящими от поперечной координаты ζ. Применение асимптотической процедуры [2] к уравнениям теории упругости позволяет получить осредненные по ζ соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций для материала покрытия [3]:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = (a+b)\varepsilon_{xx} + a\varepsilon_{yy} + (c+d)\varepsilon_{zz},\\ \sigma_{yy} = a\varepsilon_{xx} + (a+b)\varepsilon_{yy} + (c+d)\varepsilon_{zz},\\ \sigma_{zz} = (c+d)(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + e\varepsilon_{zz},\\ \sigma_{xy} = 2b\varepsilon_{xy}\end{gathered} \tag{2}$$

(координата z ортогональна к плоскости невозмущенной пластины). В (2) использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}a = \langle\lambda+\mu\rangle + (\widehat{\lambda+2\mu})\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle^2 - \left\langle\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right\rangle,\\ b = \langle\mu\rangle, \quad c = (\widehat{\lambda+2\mu})\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle,\\ d = \widehat{\mu}, \quad e = (\widehat{\lambda+2\mu})\end{gathered} \tag{3}$$

(в (3) символ $\langle\varphi\rangle$ означает осреднение функции $\varphi(\zeta)$ по ζ, символ $\widehat{\varphi}$ означает $\left\langle\varphi^{-1}\right\rangle^{-1}$). Таким образом, осредненные характеристики материала покрытия соответствуют однородной анизотропной среде с гексагональной симметрией [1].

Получим, следуя [1], уравнения равновесия пластины, упругие свойства которой определяются соотношениями (1)–(3), вводя в плоскости xOy координаты (r,φ) (очевидно, что зависимость от полярного угла φ отсутствует):

$$\begin{gathered}D_0\Delta_r^2 w = \frac{h_c}{r^3}\left(\frac{dw}{dr}\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{d^2w}{dr^2}\frac{d\chi}{dr}\right),\\ \Delta_r^2\chi + \frac{E_c}{r^3}\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

В (4) $w = w(r)$ ($w \sim h_c$) — прогиб, $\chi = \chi(r)$ — функция напряжения (см. [1]), $E_c = \frac{(2\alpha+b)b}{(\alpha+b)}$ $\left(\alpha = a - \frac{(c+d)^2}{e}\right)$ — эффективный упругий модуль осредненного материала покрытия, $\Delta_r \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$ — радиальный оператор Лапласа. Уравнения (4) следует дополнить граничным условием жестко закрепленного или свободно опертого края, а также условием равенства полной силы, действующей на пластину, нагрузке f_0, приложенной в центре (см. [1]).

Для решения системы нелинейных уравнений (4) с перечисленными дополнительными условиями можно воспользоваться методикой возмущений. Заменим формально в (4) h_c на εh_c (в окончательном результате следует положить $\varepsilon = 1$) и будем искать решение (4) в виде разложений по степеням ε:

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots, \qquad \chi = \chi_0 + \varepsilon\chi_1 + \ldots. \tag{5}$$

Подстановка разложений (5) в уравнения (4) приводит к рекуррентной системе уравнений, интегрирующихся в квадратурах:

$$\begin{gathered}D_0\Delta_r^2 w_0 = 0,\\ \Delta_r^2\chi_0 + \frac{E_c}{r^3}\frac{dw_0}{dr}\frac{d^2w_0}{dr^2} = 0,\\ D_0\Delta_r^2 w_1 = \frac{h_c}{r^3}\left(\frac{dw_0}{dr}\frac{d^2\chi_0}{dr^2} + \frac{d^2w_0}{dr^2}\frac{d\chi_0}{dr}\right),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\Delta_r^2\chi_1 + \frac{E_c}{r^3}\left(\frac{dw_0}{dr}\frac{d^2w_1}{dr^2} + \frac{dw_1}{dr}\frac{d^2w_0}{dr^2}\right) = 0,$$

$$D_0\Delta_r^2 w_2 = \frac{h_c}{r^3}\left(\frac{dw_0}{dr}\frac{d^2\chi_1}{dr^2} + \frac{dw_1}{dr}\frac{d^2\chi_0}{dr^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2w_0}{dr^2}\frac{d\chi_1}{dr} + \frac{d^2w_1}{dr^2}\frac{d\chi_0}{dr}\right),$$

. . . .

Разложения (5) подставляются также в дополнительные условия [1].

Из уравнений (6) и соответствующих дополнительных условий последовательно определяются функции $w_0, \chi_0, w_1, \chi_1, w_2, \ldots$ (функция w_0 построена в [1]).

На рис. 1, 2 приведены примеры расчета функций w_0 и χ_0 для случая жестко закрепленного края пластины, на рис. 3, 4 — для случая свободно опертого края пластины.

Если материал основания пластины анизотропен и обладает гексагональной симметрией, то соотношение (1) следует заменить на

$$D_0 = \frac{h_0^3}{3}\left(a + b + \frac{(c+d)^2}{e}\right).$$

Существенно более сложным является случай, когда материал основания анизотропен и обладает кубической симметрией [1]. Эта задача уже не будет обладать симметрией по φ. Ее решение можно строить в виде тригонометрического ряда Фурье по φ и последовательно определять коэффициенты ряда — функции r — из соотношений типа (6).

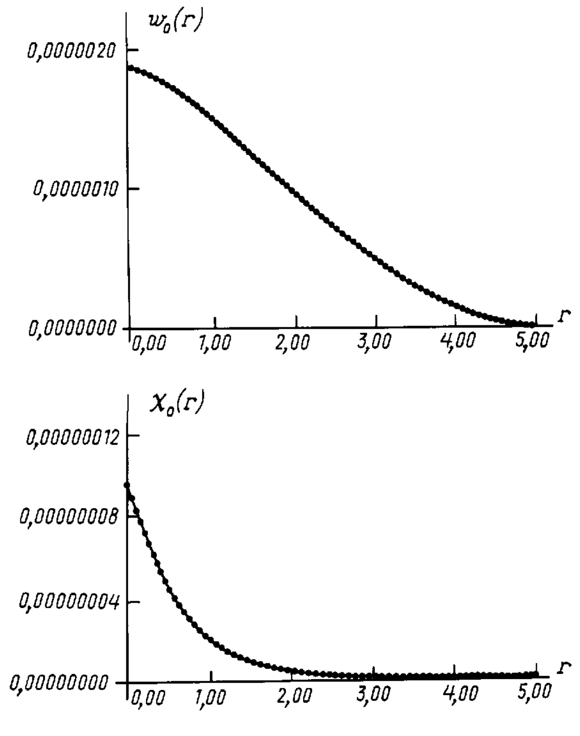

Рис. 1 и 2

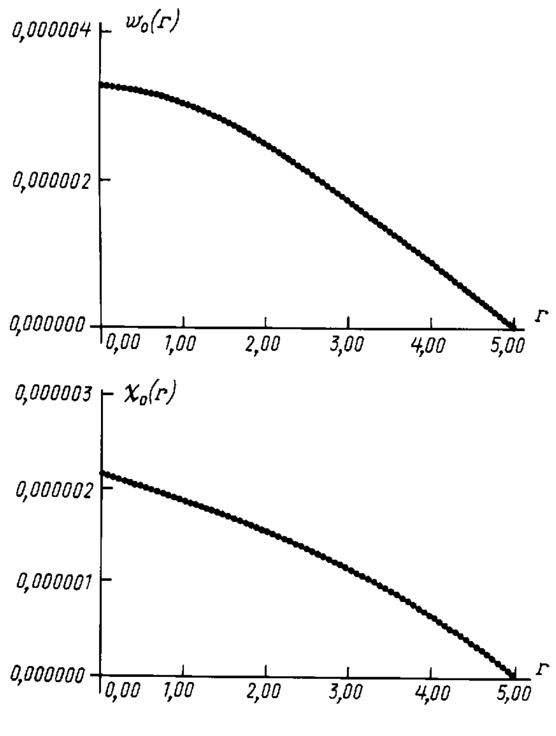

Рис. 3 и 4

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М., 1965.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
3. *Моргунов Б.И.* Математический анализ физико-механических процессов. М., 1995.

Поступила в редакцию 03.12.97