

УДК 530.145

## КВАНТОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ ОЦЕНИВАНИИ АМПЛИТУДЫ, ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ЧАСТОТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Н. В. Козлов

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Найдены квантовые ограничения на точность одновременного измерения амплитуды и времени прихода широкополосной силы, а также амплитуды, времени прихода и частоты узкополосной силы. Введено понятие стандартного квантового предела для времени прихода и частоты силы. Показана зависимость точности измерения от параметров измерителя.

При измерении классической силы, действующей на пробное тело, путем непрерывного слежения за его координатой возникают ограничения на точность измерения, которые являются прямым следствием соотношения неопределенностей Гейзенберга [1]. В ряде теоретических работ были предложены методы измерения силы, свободные от этих ограничений (см., напр., [2–5]), однако их техническая реализация сложна, и в настоящее время они реально не используются. Чтобы оценить возможную чувствительность измерительной системы к силе при координатном измерении, обычно полагают, что неизвестен и требует измерения один параметр силы, например амплитуда, либо рассматривают задачу проверки гипотезы о том, что действовала заданная сила. В реальном эксперименте, как правило, неизвестно большее количество параметров.

В настоящей работе рассматривается задача определения точности совместного измерения амплитуды и времени прихода широкополосной силы при координатном измерении, а также амплитуды, времени прихода и частоты узкополосной силы.

Блок-схема рассматриваемой системы обнаружения изображена на рис. 1.  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\tau}$  и  $\tilde{\omega}_0$  — оценки амплитуды, времени прихода и частоты силы. Для сигнала, поступающего на обработку в такой схеме, справедливо уравнение

$$W(t) = m\ddot{X}(t) = F(t) + F_{fl}(t) + m\ddot{X}_{fl}(t),$$

где  $F(t)$  — измеряемая сила,  $F_{fl}(t)$  — случайная сила, действующая со стороны измерителя координаты (ИК),  $X_{fl}(t)$  — случайный сигнал, добавляемый к выходному сигналу ИК,  $m$  — масса пробного тела. Из уравнения следует, что к полезному сигналу, обусловленному действием измеряемой силы, подмешан

случайный шум

$$I(t) = F_{fl}(t) + m\ddot{X}_{fl}(t).$$

Далее рассмотрим частный случай, когда шумы прибора некоррелированы. Тогда спектральная плотность случайного шума имеет вид

$$N(\omega) = S_F + m^2 S_X \omega^4, \quad (1)$$

где  $S_F$  и  $S_X$  — спектральные плотности шумов.

Как показано в работе [1], квантовые свойства схемы измерения, состоящей из пробного тела и ИК, можно учесть, если свести ее к эквивалентной классической и ввести ограничения на спектральные плотности  $S_F$  и  $S_X$ . Из соотношения неопределенностей Гейзенберга в случае, если корреляция шумов отсутствует, следует

$$S_F S_X \geq \hbar^2/4.$$

Поэтому когда шумы минимальны (чему соответствует знак равенства в этом соотношении), величины  $S_X$  и  $S_F$  не являются независимыми и шумы прибора будут описываться одним параметром  $\omega_d = [S_F/(m^2 S_X)]^{1/4}$ . Параметр  $\omega_d$  характеризует величину связи измерителя с пробным телом: чем она сильнее, тем больше  $S_F$  и меньше  $S_X$ , следовательно, больше  $\omega_d$ .

Таким образом, задача определения точности измерения силы известной формы при координатном измерении сводится к задаче нахождения минимальной дисперсии погрешности оценивания соответствующих параметров сигнала в шуме (1). Для решения этой задачи воспользуемся неравенством Крамера–Рао [2].

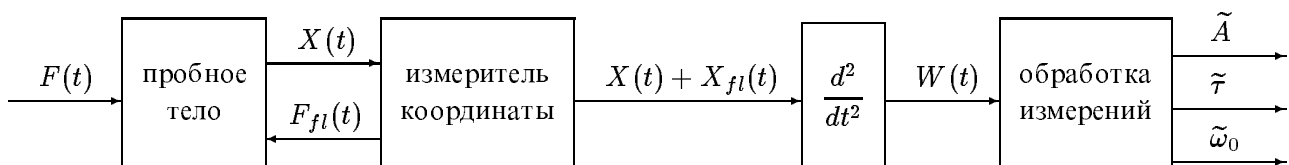


Рис. 1. Блок-схема системы измерения силы

Чувствительность системы определяется функцией неопределенности

$$H(\theta_1; \theta_2) = \text{cov}[\ln L(W(t), \theta_1); \ln L(W(t), \theta_2)],$$

где  $\theta_i = (A, \tau)$  — вектор параметров (в нашем случае  $A$  и  $\tau$  — амплитуда и время прихода силы), а  $L(W(t))$  — функционал отношения правдоподобия:

$$\begin{aligned} \ln[L(W(t))] &= \int_{-\infty}^{\infty} V(t)[W(t) - As(t)/2]dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V(t)[I(t) + As(t)/2]dt, \end{aligned}$$

где  $V(t)$  — оптимальная фильтрующая функция,  $s(t)$  описывает форму силы. Так как случайный шум описывается только первым слагаемым и  $\langle I(t) \rangle = 0$ , то

$$H(\theta_0; \theta_1) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t_0)V(t_1)\langle I(t_0)I(t_1) \rangle dt_0 dt_1. \quad (2)$$

Функция  $V(t)$  является решением уравнения

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(t_0)I(t_1) \rangle V(t_1) dt_1. \quad (3)$$

Используя стационарность шума, перейдем далее к спектральному представлению. Тогда уравнение (3) примет вид

$$v(\omega)N(\omega) = AS(\omega) e^{i\omega\tau}, \quad (4)$$

где  $S(\omega)$  — фурье-спектр формы сигнала,  $N(\omega)$  — спектральная плотность шумов,  $v(\omega)$  — фурье-спектр функции  $V(t)$ . Выражая  $V(t)$  через  $v(\omega)$ , которое находится из уравнения (4), подставляя его в (2), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} H(\theta_1; \theta_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} v(\omega)v(-\omega)N(-\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} A_1 A_2 \exp\{-i\omega(\tau_1 - \tau_2)\} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)}. \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию неопределенности, находим элементы матрицы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)}, \\ a_{22} &= \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \theta} = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)}. \end{aligned}$$

Поскольку интеграл в четных пределах от нечетной функции равен нулю,

$$\begin{aligned} a_{12} &= -a_{21} = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \tau_2} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \theta} = \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (i\omega) \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} = 0. \end{aligned}$$

Находя диагональные элементы обратной матрицы, получаем минимальные дисперсии погрешностей оценивания:

$$\begin{aligned} \Delta^2 A &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} \right]^{-1}, \\ \Delta^2 \tau &= \left[ A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Известно, что чувствительность схемы зависит от вида силы: узкополосная она или широкополосная. В случае широкополосной силы чувствительность также зависит от того, равно ли среднее значение силы нулю. При этом чувствительность слабо зависит от конкретного вида силы. Поэтому ограничения на чувствительность схемы к широкополосной силе можно рассмотреть, используя пробные силы  $F_1 = A e^{-\alpha|t-\tau|} \text{sgn}(t-\tau)$  и  $F_2 = A e^{-\alpha|t-\tau|}$ .

Подставляя спектральные плотности этих функций в выражения для минимальных дисперсий погрешностей оценивания, получим следующие выражения для значений погрешностей:

$$\begin{aligned} \Delta^2 A &= \frac{m\hbar}{\tau_0^3} f(\omega_d \tau_0), \\ \Delta^2 \tau &= \frac{m\hbar}{A^2 \tau_0} g(\omega_d \tau_0) \end{aligned}$$

для функции  $F_1$  с нулевым средним значением и

$$\begin{aligned} \Delta^2 A &= \frac{m\hbar}{\tau_0^3} p(\omega_d \tau_0), \\ \Delta^2 \tau &= \frac{m\hbar}{A^2 \tau_0} q(\omega_d \tau_0) \end{aligned}$$

для функции  $F_2$  с ненулевым средним значением. Величина  $\sqrt{m\hbar}/\tau_0^3$  называется стандартным квантовым пределом для амплитуды силы [3]. Назовем по аналогии величину  $\sqrt{m\hbar}/(A^2 \tau_0)$  стандартным квантовым пределом для времени прихода силы. Функции  $f(\omega_d \tau_0)$ ,  $g(\omega_d \tau_0)$ ,  $p(\omega_d \tau_0)$  и  $q(\omega_d \tau_0)$  — функции безразмерной переменной  $\omega_d \tau_0$ , где  $\tau_0 \equiv 1/\alpha$  — время действия силы, а  $\omega_d$  — параметр, описанный выше и характеризующий процесс измерения. Графики этих функций приведены на рис. 2, а точный вид — в приложении.

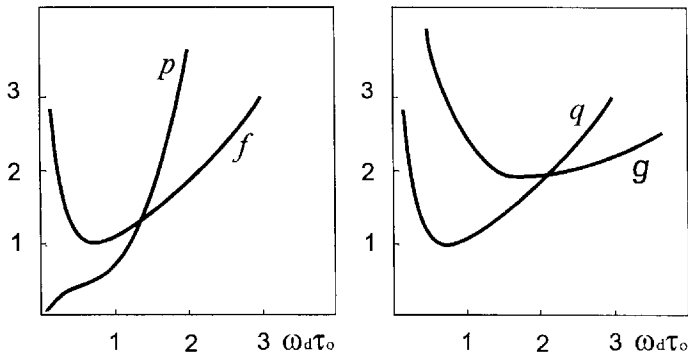


Рис. 2. Зависимость величины ошибки измерения амплитуды и времени прихода силы от параметра измерителя

Свойствам функций  $f(\omega_d \tau_0)$ ,  $g(\omega_d \tau_0)$ ,  $p(\omega_d \tau_0)$  и  $q(\omega_d \tau_0)$  соответствуют свойства точности результатов измерения. Функции  $f(\omega_d \tau_0)$  и  $g(\omega_d \tau_0)$  имеют минимумы в точках  $\omega_d \tau_0 \approx 0,6$  и  $\omega_d \tau_0 \approx 2$  соответственно. Это указывает на то, что существует оптимальное значение параметра прибора  $\omega_d$ , при котором точность измерения амплитуды и времени прихода силы с нулевым средним значением максимальна и равна стандартному квантовому пределу (СКП). Для времени прихода оптимальное значение  $\omega_d$  больше, чем для амплитуды, чему соответствует более сильная связь измерителя координаты и пробного тела. При сильной связи прибора и тела, величина которой далека от оптимальной, точность измерения много меньше СКП. Об этом говорит то, что при больших значениях переменной значения функций  $f(\omega_d \tau_0)$  и  $g(\omega_d \tau_0)$  много больше единицы. При  $\omega_d \tau_0 \rightarrow \infty$  они асимптотически стремятся к функциям  $(\omega_d \tau_0)^2/2$  и  $(\omega_d \tau_0)/(2\sqrt{2})$  соответственно, из чего следует, что точность измерения амплитуды падает быстрее точности измерения времени прихода при усилении связи прибора и пробного тела. Из асимптотики функций  $f$  и  $g$  при малых значениях переменной следует, что при ослаблении связи прибора и тела по сравнению с оптимальной величиной точность измерения времени прихода падает быстрее точности измерения амплитуды.

Функция  $p(\omega_d \tau_0)$  не имеет минимума, из чего следует, что оптимального значения параметра прибора  $\omega_d$ , при котором точность измерения амплитуды импульса силы с нулевым средним значением максимальна, не существует. При усилении связи прибора и пробного тела точность измерения амплитуды падает. Это следует из того, что функция  $p(\omega_d \tau_0)$  монотонно возрастает на промежутке  $(0; +\infty)$ . При малых значениях аргумента функция  $p(\omega_d \tau_0)$  стремится к нулю, следовательно, амплитуду импульса силы с ненулевым средним значением можно измерить с любой наперед заданной точностью, достаточно ослабив связь между прибором и пробным телом. Информация о времени прихода при этом теряется. Это видно из того, что при малых значениях аргумента функция  $q(\omega_d \tau_0)$  стремится к бесконечности.

Для времени прихода импульса силы с ненулевым средним значением существует оптимальное значе-

ние параметра прибора  $\omega_d$ , при котором точность измерения максимальна. Этому соответствует наличие минимума функции  $q(\omega_d \tau_0)$  при  $(\omega_d \tau_0) \approx 1,5$ . Точность измерения при этом конечна и равна СКП.

Анализ функций  $f(\omega_d \tau_0)$ ,  $g(\omega_d \tau_0)$ ,  $p(\omega_d \tau_0)$  и  $q(\omega_d \tau_0)$  показывает, что максимальная точность измерения амплитуды и времени прихода различна для сил с нулевым и ненулевым средним значением. Например, амплитуду силы с ненулевым средним значением можно измерить с любой точностью, в то время как для силы с нулевым средним значением существует ненулевая предельная точность измерения порядка СКП. Чтобы получить максимальную точность измерения, параметры прибора, следящего за координатой пробного тела, также должны быть различными для сил с нулевым и ненулевым средним значением, как и для измерения амплитуды и времени прихода. В частности, чтобы измерить амплитуду с максимально возможной точностью, для силы с ненулевым средним значением требуется максимально уменьшить связь прибора и пробного тела. В случае силы с нулевым средним значением необходимо выбрать значение параметра связи пробного тела и ИК оптимальным. Дальнейшее ослабление или усиление связи уменьшит точность измерения. Для измерения времени прихода силы с максимальной точностью требуется задать оптимальное значение параметра  $\omega_d$ , которое также различно для сил с нулевым и ненулевым средним значением. При увеличении или уменьшении этого параметра по сравнению с оптимальным значением точность измерения времени прихода силы падает.

Воспользуемся тем же методом для случая трех неизвестных: амплитуды, времени прихода и частоты узкополосной силы.

Уравнение (4) примет вид

$$AF(\omega; \omega_0) e^{i\tau} = N(\omega)v(\omega),$$

где  $\omega_0$  — несущая частота узкополосной силы.

Функция неопределенности примет вид

$$\begin{aligned} H(\theta_1; \theta_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} V_1(\omega) V_2(-\omega) N(-\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} A_1 A_2 \frac{\exp\{i\omega(\tau_1 - \tau_2)\}}{N(\omega)} F(\omega; \omega_{01}) F(-\omega; \omega_{02}). \end{aligned}$$

Дифференцируя ее, получим элементы матрицы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{N(\omega)} F(\omega; \omega_0) F(-\omega; \omega_0), \\ a_{22} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega^2}{N(\omega)} F(\omega; \omega_0) F(-\omega; \omega_0), \end{aligned}$$

$$a_{33} = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{N(\omega)} \frac{\partial F(\omega; \omega_0)}{\partial \omega_0} \frac{\partial F(\omega; \omega_0)}{\partial \omega_0},$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0,$$

$$a_{13} = -a_{31} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{N(\omega)} F(\omega; \omega_0) \frac{\partial F(-\omega; \omega_0)}{\partial \omega_0}.$$

Используя условие узкополосности и пренебрегая слагаемым  $a_{13}^2$  по сравнению с  $a_{11}a_{33}$ , получим, что диагональные элементы обратной матрицы обратны диагональным элементам прямой.

Для пробной функции  $F(t) = A e^{-\alpha|t-\tau|} \times \cos(\omega_0(t-\tau))$  по теореме о модуляции  $F(\omega; \omega_0) = (AS(\omega+\omega_0) + AS(\omega-\omega_0))/2$ , где  $S(\omega)$  — спектральная плотность модулирующей функции  $e^{-\alpha|t-\tau|}$ . Используя свойства четности спектральной функции, а также условие узкополосности, пренебрегаем слагаемыми типа  $S(\omega+\omega_0)S(\omega-\omega_0)$  по сравнению с  $S(\omega+\omega_0)S(-\omega-\omega_0)$  и, полагая  $N(\omega) \approx N(\omega_0)$ , получим выражения для ошибок оценивания:

$$\Delta^2 A = N(\omega_0) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|S(\omega)|^2}{2} \right]^{-1},$$

$$\Delta^2 \tau = N(\omega_0) \left[ \omega_0^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|S(\omega)|^2}{2} \right]^{-1},$$

$$\Delta^2 \omega_0 = N(\omega_0) \left[ A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|S'(\omega)|^2}{2} \right]^{-1}.$$

Разбив функцию  $A e^{-\alpha|t-\tau|} \cos(\omega_0(t-\tau) + \varphi)$  на слагаемые, включающие  $\cos(\omega_0(t-\tau))$  и  $\sin(\omega_0(t-\tau))$ , и используя свойства четности, а также действительности и мнимости фурье-спектра четных и нечетных функций соответственно, легко показать, что полученные равенства справедливы для случая любой заранее известной фазы  $\varphi$ . Подставив спектральный вид функции  $e^{-\alpha|t|}$  в  $S(\omega)$ , получим для точности измерения

$$\Delta^2 A = \frac{m\hbar}{\tau^3} (\omega_d^2 \tau_0^2 + (\omega_0^4/\omega_d^4) \tau_0^2) = \frac{m\hbar}{\tau^3} r(\omega_d \tau_0),$$

$$\Delta^2 \tau = \frac{m\hbar}{A^2 \tau} (\omega_d^2/\omega_0^2 + \omega_0^2/\omega_d^2) = \frac{m\hbar}{A^2 \tau} n(\omega_d \tau_0),$$

$$\Delta^2 \omega_0 = \frac{m\hbar}{A^2 \tau^5} (\omega_d^2 \tau_0^2 + (\omega_0^4/\omega_d^4) \tau_0^2) \frac{m\hbar}{A^2 \tau^5} k(\omega_d \tau_0).$$

Величину  $\sqrt{m\hbar/(A^2 \tau^5)}$  назовем по аналогии с величинами  $\sqrt{m\hbar/(\tau^3)}$  и  $\sqrt{m\hbar/(A^2 \tau)}$  стандартным

квантовым пределом для частоты силы. Функции  $r(\omega_d \tau_0)$ ,  $n(\omega_d \tau_0)$  и  $k(\omega_d \tau_0)$  имеют минимумы в точке  $\omega_d = \omega_0$ . Это говорит о том, что существует оптимальное значение параметра измерителя  $\omega_d$ , при котором точность измерения амплитуды, времени прихода и частоты силы максимальна. При усилении или ослаблении связи измерителя координаты и пробного тела по сравнению с оптимальной величиной точность измерения амплитуды, времени прихода и частоты сначала медленно, а затем быстро падает.

Таким образом, показано, что для измерения амплитуды и времени прихода силы с оптимальной точностью необходимо установить соответствующую величину связи прибора и пробного тела. Она будет зависеть не только от требуемой точности измерения, но и от класса измеряемой силы.

Для одновременного измерения амплитуды, времени прихода и частоты силы вида  $F(t) = Af(t-\tau) \times \cos(\omega_0(t-\tau) - \phi)$  величину связи измерителя координаты и пробного тела необходимо задавать в соответствии с предполагаемой частотой сигнала. Несовпадение предполагаемой и истинной частоты уменьшит точность измерения.

#### Приложение

$$f(\omega_d \tau_0) = q(\omega_d \tau_0) = \left[ (1 + (\omega_d \tau_0)^4)^2 \right] \times \\ \times \left[ (\omega_d \tau_0)(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(\omega_d \tau_0)^4 + \right. \\ \left. + 4\sqrt{2}(\omega_d \tau_0)^2 + 2(\omega_d \tau_0)^5 - 6(\omega_d \tau_0)) \right]^{-1},$$

$$g(\omega_d \tau_0) = \left[ (1 + (\omega_d \tau_0)^4)^2 \right] \times \\ \times \left[ 2(\omega_d \tau_0)^2(2\sqrt{2}(\omega_d \tau_0)^3 - \sqrt{2}(\omega_d \tau_0) + \right. \\ \left. + \sqrt{2}(\omega_d \tau_0)^5 + 1 - 3(\omega_d \tau_0)^4) \right]^{-1},$$

$$p(\omega_d \tau_0) = \left[ (\omega_d \tau_0)(1 + (\omega_d \tau_0)^4)^2 \right] \times \\ \times \left[ (-4\sqrt{2}(\omega_d \tau_0)^2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(\omega_d \tau_0)^4 + \right. \\ \left. + 10(\omega_d \tau_0)^3 + 2(\omega_d \tau_0)^7) \right]^{-1}.$$

#### Литература

1. Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я. // Радиотехн. и электроника. 1982. 27, № 12. С. 2392.
2. Воронцов Ю.И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.
3. Braginsky V.B., Khalili F.Ja. Quantum Measurement. Cambridge, 1992.
4. Braginsky V.B., Khalili F.Ya. // Phys. Lett. 1996. А 218. Р. 164.
5. Vyatchanin S.P., Zybova E.A. // Phys. Lett. 1995. А 201. Р. 269.

Поступила в редакцию  
23.05.97