

УДК 539.12.164

РОЖДЕНИЕ АТОМОВ ПОЗИТРОНИЯ В РАСПАДАХ ЛЕГКИХ МЕЗОНОВ

А. П. Мартыненко^{*)}, Р. Н. Фаустов

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

В рамках квазипотенциального метода описания связанных состояний исследована вероятность образования ортопозитрония в распаде π^0 -мезона. Вычислены релятивистские и радиационные поправки порядка $O(\alpha)$ к ширине распада и проведено сравнение с экспериментальными данными.

Введение

Реакции взаимодействия и распада пионов служат ценным источником информации не только о свойствах пионов, но и об общих закономерностях взаимодействия элементарных частиц. Так, измерение отношения вероятностей распадов $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ и $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ было использовано для проверки предположения о векторно-аксиальной структуре гамильтониана слабого взаимодействия, а открытие бета-распада пиона $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ явилось экспериментальным подтверждением гипотезы о сохранении векторного тока в слабом взаимодействии [1]. Одно из первых указаний на существование цветовых степеней свободы кварков было получено при изучении распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. В работе [2] была отмечена важность изучения редких распадов псевдоскалярных мезонов

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps, \quad \eta^0 \rightarrow \gamma + Ps$$

(здесь символ Ps обозначает связанное состояние электрона и позитрона), которые являются источником пучков релятивистских позитрониев. Приближенная оценка сечения рождения позитрония, данная в [2] с помощью нерелятивистской волновой функции, впоследствии уточнялась в работе [3], где для описания релятивистских эффектов использована релятивистская волновая функция Барбиери–Ремидди [4], и в работе [5], в которой изучен ряд поправок порядка $O(\alpha)$ к основной амплитуде распада, обусловленных поляризацией вакуума и однофотонным обменом в электрон-позитронном связанном состоянии. Экспериментальная точность измерения вероятности распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$

$$w_{\text{exp}}(\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps) = \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma)} = (1,82 \pm 0,29) \cdot 10^{-9} \quad (1)$$

(здесь Γ — ширина соответствующего распада), существенно возросшая в последнее время [6], делает дальнейшие исследования рождения позитрония и мюония в распадах псевдоскалярных мезонов весьма

актуальными. Для определения интенсивности пучков позитрониев [7], генерированных в изучаемых распадах на протонных кольцевых ускорителях, необходимо знание сечения развала позитрония в веществе, расчет которого был выполнен в рамках квазипотенциального подхода в [8]. Другие механизмы рождения атомов позитрония изучались в работах [9–11]. В настоящей работе исследовались релятивистские эффекты, связанные с рождением ортопозитрония в распаде π^0 -мезона на основе локального квазипотенциального метода [12], использованного ранее при расчете $O(\alpha^2)$ -поправок к ширине распада ортопозитрония [13]. Мы вычисляем также $O(\alpha)$ -поправки к древесной амплитуде, связанные с диаграммами, в которых два виртуальных фотона, испущенные π^0 -мезоном, соединяются с электрон-позитронной линией, и с нее же испускается реальный фотон.

Локальное квазипотенциальное уравнение для двухчастичной волновой функции $\psi_M(\mathbf{p})$ в с.ц.м. имеет вид [12]

$$\left(\frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R} \right) \psi_M(\mathbf{p}) = \int V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) \psi_M(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \quad (2)$$

где $\mu_R = M/4$ — релятивистская приведенная масса, а квадрат относительного импульса частиц на энергетической поверхности выражается через массу связанного состояния $M = 2m + B$ (B — энергия связи) следующим образом:

$$b^2(M) = \frac{1}{4}M^2 - m^2. \quad (3)$$

В случае ортопозитрония основной вклад в оператор взаимодействия частиц $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ дает кулоновский потенциал, для которого (2) имеет точное решение в виде волновых функций типа Паули [13].

2. Релятивистские поправки в распаде $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$

Основной вклад в исследуемую амплитуду распада определяется древесной диаграммой рис. 1. Одна часть этой амплитуды, обусловленная сильным

^{*)} Самарский государственный университет.

взаимодействием, вычислена нами в предположении точечного $g\gamma_5$ -взаимодействия между π^0 -мезоном и составляющими его u -, d -кварками с массой $m_q = = 330$ МэВ [14]. В другой же части амплитуды, связанной с рождением (e^+e^-)-состояния, главную роль играют электромагнитные взаимодействия, последовательный учет которых и будет проведен на основе (2).

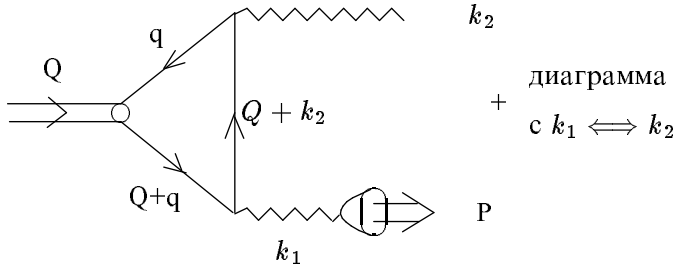


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана, определяющая основной вклад в ширину распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$

Амплитуда распада, представленного на рис. 1, имеет вид

$$M_0 = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2) (4\pi\alpha)^{3/2} F_s^0(Q^2, P^2) \epsilon^{\alpha\beta\sigma\omega} \times \times k_2^\alpha e_\gamma^\beta Q^\sigma \frac{-i}{k_1^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\omega T_0(p, P) \psi_n(p, P)], \quad (4)$$

где $T_0(p, P)$ — часть амплитуды M_0 , которая определяет электромагнитное взаимодействие лептонов в связанном состоянии (основной вклад в M_0 получится, если положить $T_0(p, P) = 1$), N_c — цветовой фактор, e_f — заряд кварка сорта f , $\lambda_u = 1$, $\lambda_d = -1$, p — импульс относительного движения частиц в системе (e^+e^-), $\psi_n(p, P)$ — амплитуда Бете–Солпитера, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$\psi_n(p, P) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G_0(p, k, P) \times \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K(k, q, P) \psi_n(q, P), \quad (5)$$

где $K(k, q, P)$ — двухчастично-неприводимое ядро, а $G_0(p, k, P)$ — двухчастичная свободная функция Грина. Из (5) следует, что амплитуда $\psi_n(p, P)$ в (4) эффективно учитывает кулоновское взаимодействие между электроном и позитроном в связанном состоянии. Переходный формфактор $F_s^0(Q^2, P^2)$, который определяется кварковой петлей, может быть вычислен точно с использованием фейнмановской параметризации:

$$F_s^0(Q^2, P^2) = \int \frac{id^4 q}{(2\pi)^4} \times \times \frac{4m_q g}{(q^2 - m_q^2 + i0)[(q+k_2)^2 - m_q^2 + i0][(q+Q)^2 - m_q^2 + i0]} =$$

$$= \frac{m_q g}{4\pi^2} \int_0^1 dx \times \times \int_0^1 \frac{(1-y)dy}{[Q^2 y(1-y)(1-x) + P^2 y(1-y)x - m_q^2]} = = \frac{m_q g}{2\pi^2} \frac{1}{Q^2 - P^2} \times \times \left[\text{arctg}^2 \left(\frac{\sqrt{Q^2}}{\sqrt{4m_q^2 - Q^2}} \right) - \text{arctg}^2 \left(\frac{\sqrt{P^2}}{\sqrt{4m_q^2 - P^2}} \right) \right].$$

Очевидно, что переходный формфактор, который возникает при расчете ширины распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, может быть получен из (6) при $P^2 = 0$.

Рассмотрим теперь часть амплитуды M_0 , которая связана с волновой функцией $\psi_n(p, P)$. Для расчета ширины распада π^0 -мезона преобразуем M_0 таким образом, чтобы она содержала квазипотенциальную волновую функцию, имеющую хорошую физическую интерпретацию. Для этого введем вершинную функцию $\Gamma(p_1, p_2)$:

$$\psi(p, P) = \frac{\hat{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i0} \Gamma(p_1, p_2) \frac{\hat{p}_2 - m}{p_2^2 - m^2 + i0} \quad (7)$$

и разложим пропагаторы частиц на состояния с положительной и отрицательной энергией. Так, пропагатор электрона представим в виде

$$\frac{\hat{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i0} = = \frac{m}{\epsilon(\mathbf{p})} \left[\frac{u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})}{p_1^0 - \epsilon(\mathbf{p}) + i0} + \frac{v^{(\alpha)}(-\mathbf{p}) \bar{v}^{(\alpha)}(-\mathbf{p})}{p_1^0 + \epsilon(\mathbf{p}) - i0} \right], \quad (8)$$

где $p_1 = P/2 + p$, $p_2 = P/2 - p$ — 4-импульсы электрона и позитрона. Тогда, считая, что взаимодействие частиц описывается локальным квазипотенциальным уравнением (2), и проектируя вершинную функцию на состояния с положительной энергией с помощью биспиноров Дирака [15]:

$$\Gamma^{(+)\alpha\beta}(p_1, p_2) = \frac{\bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2\epsilon(\mathbf{p})}} \Gamma(p_1, p_2) \frac{v^{(\beta)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2\epsilon(\mathbf{p})}} = = (M - 2\sqrt{p^2 + m^2}) \psi_M^{\alpha\beta}(\mathbf{p}), \quad (9)$$

мы можем преобразовать интересующую нас часть амплитуды M_0 к виду

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\omega \psi(p_1, p_2)] = = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\epsilon(\mathbf{p})} \frac{\psi_M(\mathbf{p})}{2\sqrt{2}M[\epsilon(\mathbf{p}) + m]} \times \times \text{Tr} [\gamma^\omega (-\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}(\hat{P} + M) (\hat{p}_1 + m)], \quad (10)$$

где мы также ввели релятивистский прецизионный оператор на связанное 3S_1 -состояние, в котором точно учитывается зависимость от \mathbf{p} [16]:

$$\hat{\pi} = v(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(-\hat{p}_2 + m)\hat{\epsilon}(\hat{P} + M)(\hat{p}_1 + m)}{[\epsilon(\mathbf{p}) + m]}. \quad (11)$$

Дифференциальная ширина распада π^0 -мезона на фотон и атом позитрония определяется известным образом [17]:

$$d\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps) = \frac{1}{32\pi^2 m_\pi^2} |M_0|^2 |\mathbf{P}| d\Omega_{\mathbf{P}}. \quad (12)$$

При этом законы сохранения энергии и импульса однозначно фиксируют частоту излучаемого фотона $\omega = (m_\pi/2)(1 - 4m^2/m_\pi^2)$. Вычислим вначале $w_{\text{th}}(\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps)$ в приближении нулевого относительного движения лептонов. Полагая для этого $p_1 = p_2 = P/2$ и вычисляя след в (10), а затем полную ширину из (12), мы получаем с учетом (4) и (6) следующий результат для относительной вероятности распада

$$w_{0\text{th}} = \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma)} = \frac{1}{2} \alpha^4 \left(1 - \frac{4m^2}{m_\pi^2}\right) \left[1 - \frac{\arcsin^2(m/m_q)}{\arcsin^2(m_\pi/2m_q)}\right]^2, \quad (13)$$

который совпадает с результатами работ [2, 3]. Множитель $1/2$, стоящий в правой части (13), можно уточнить, выполнив суммирование по всем S -состояниям: $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3 = \zeta(3) = 1,202$. Необходимо отметить также, что квазипотенциальная волновая функция $\psi_M(\mathbf{p})$, стоящая в (10), удовлетворяет следующему условию нормировки [15]:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_M(\mathbf{p})|^2 = 2M. \quad (14)$$

Учтем теперь релятивистские поправки к (13), которые обусловлены относительным движением лептонов, образующих связанную систему, а также зависимостью рассматриваемой амплитуды распада от энергии связи B . Для этого разложим подынтегральные множители (10) по степеням $|\mathbf{p}|/m$ с точностью $O(\mathbf{p}^2/m^2)$, имея в виду, что $|\mathbf{p}| \sim \alpha$. Тогда релятивистская поправка порядка α^2 в (10) определяется вычетом подынтегральной функции в полюсе волновой функции $\psi_M(\mathbf{p})$ [18]:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \psi_M(\mathbf{p}) = -\frac{3}{4} \alpha^2 \psi_M(\mathbf{r} = 0). \quad (15)$$

Проводя замену (15) в (10) и учитывая что $B/m = -\alpha^2/4$, мы получаем релятивистскую поправку к (13) следующего вида:

$$w_{1\text{th}} = \frac{1}{8} \alpha^2 w_{0\text{th}}. \quad (16)$$

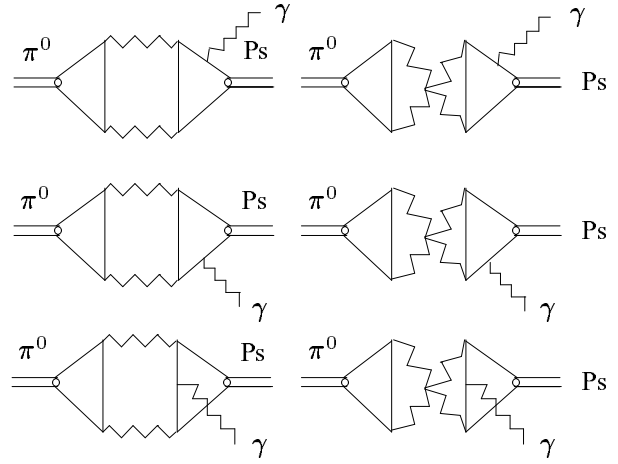


Рис. 2. Диаграммы Фейнмана, представляющие однопетлевые поправки порядка $O(\alpha)$ в ширине распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$

3. Однопетлевые поправки $O(\alpha)$ к ширине распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$

Единственные невычисленные до сих пор поправки $O(\alpha)$ в электромагнитной части амплитуды M_0 определяются шестью диаграммами Фейнмана, представленными на рис. 2. Для их расчета удобно использовать дисперсионный метод. Рассмотрим амплитуду, соответствующую первой из диаграмм рис. 2:

$$M_1 = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2) (4\pi\alpha)^{5/2} \psi(0) \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i0} \frac{-i}{(Q-k)^2 + i0} \times F_s(Q, k) \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k^\alpha Q^\beta e_\gamma^\lambda \times \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \gamma^\nu (\hat{p}_1 - \hat{Q} + m) \gamma^\lambda \hat{\pi} \right] \times \frac{-i}{(p_1 - k)^2 - m^2 + i0} \frac{-i}{(p_1 - Q)^2 - m^2 + i0}. \quad (17)$$

При расчете мнимой части этой амплитуды по $s = Q^2$ мы используем правило Кутковского [17], переводя фотоны в промежуточном состоянии на массовую поверхность. При этом функция $F_s(Q, k)$, определяемая интегралом по «кварковому треугольнику», переходит в функцию (6) при $P^2 = 0$. Выражения для знаменателей электронных пропагаторов упрощаются с учетом $\delta(k^2)$ и $\delta[(k-Q)^2]$:

$$\frac{1}{[(p_1 - k)^2 - m^2 + i0]} \rightarrow -\frac{1}{Pk}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{[(p_1 - Q)^2 - m^2]} \rightarrow \frac{2}{Q^2 - P^2}.$$

В результате после вычисления следа в (17) оказывается, что единственный ненулевой вклад в $\text{Im} M_1$ определяется интегралом

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{k^\mu k^\nu}{Pk} d^4k \delta(k^2) \delta(Q^2 - 2kQ) = \quad (19)$$

$= F_1 g^{\mu\nu} + F_2 P^\mu P^\nu + F_3 Q^\mu Q^\nu + F_4 (Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu)$, где мы записали ожидаемый ответ в виде суммы четырех слагаемых, F_i — коэффициентные функции от Q^2, P^2 . Умножая обе части равенства (19) последовательно на $g^{\mu\nu}, (g^{\mu\nu} - P^\mu Q^\nu / PQ), (g^{\mu\nu} - P^\nu Q^\mu / PQ), (g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu / P^2)$, мы получаем систему четырех уравнений для определения функций F_i . В мнимой части M_1 остается вклад только F_1 с тензором $g^{\mu\nu}$. Аналогично вычисляются мнимые части остальных фейнмановских амплитуд, представленных на рис. 2. Обозначая через M полную однопетлевую амплитуду, получим ее мнимую часть в виде

$$\begin{aligned} \text{Im} M(s) = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2) (4\pi\alpha)^{5/2} \frac{4m_q g \psi(0)}{\pi^3} \times \\ \times \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} e^\alpha e_\gamma^\beta P^\sigma Q^\rho \frac{s}{(s - P^2)^3} \times \\ \times \left[\frac{2P^2 s \ln(s/P^2)}{(s - P^2)(s + P^2)} - 1 \right] \arctg^2 \left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4m_q^2 - s}} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Вычисляя далее дисперсионный интеграл

$$M(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} M(s) ds}{(s - Q^2 - i0)} \quad (21)$$

при $Q^2 \leq 0$ и аналитически продолжая амплитуду M в область физических значений Q^2 , получаем

$$\begin{aligned} M(Q^2 = m_\pi^2) = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2) (4\pi\alpha)^{5/2} \frac{m_q g \psi(0)}{\pi^4} \frac{1}{P^4} \times \\ \times \left(\frac{m^2}{m_\pi^2} \right) \left(\frac{m^2}{m_q^2} \right) \ln \left(\frac{2m}{m_\pi} \right) \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} e^\alpha e_\gamma^\beta P^\sigma Q^\rho, \end{aligned} \quad (22)$$

где также было выполнено разложение амплитуды M по малому параметру m^2/m_π^2 с точностью $o(m^2/m_\pi^2)$.

Интерференционные члены амплитуд M, M_0 дают искомую однопетлевую поправку $O(\alpha)$ в ширине распада π^0 -мезона:

$$w_{2\text{th}} = \alpha \frac{16 (m^2/m_q^2) \ln(2m/m_\pi) (1 - 4m^2/m_\pi^2)}{[\arcsin^2(m_\pi/2m_q) - \arcsin^2(m/m_q)]} w_{0\text{th}}. \quad (23)$$

Относительная величина поправок (16), (23), полученных в данной работе, составляет 10^{-5} . Таким образом, выражения (16), (23), а также полученная ранее в [5] основная часть $O(\alpha)$ -вклада в амплитуду распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$ в сумме дают главные электромагнитные поправки к вероятности $w_{0\text{th}}$. В результате численное теоретическое значение для относительной вероятности распада оказывается равным $w_{\text{th}} = 1,72393 \cdot 10^{-9}$, что хорошо согласуется с экспериментальным выражением (1). Дальнейшее уточнение формулы для w_{th} в случае увеличения экспериментальной точности измерения (1) может быть связано только с исследованием поправок в «сильной» части амплитуды распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + Ps$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-17309).

Литература

1. Окунь Л.Б. Лептоны и кварки М., 1990.
2. Неменов Л.Л. // Ядерная физика. 1972. **15**. С. 1047.
3. Козлов Г.А. // Там же. 1988. **48**. С. 265.
4. Barbieri R., Remiddi E. // Nucl. Phys. 1978. **B141**. P. 413.
5. Высоцкий М.И. // Ядерная физика. 1979. **29**. С. 845.
6. Review of Particle Physics // Phys. Rev. 1996. **D54**. Part 1.
7. Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. // ЖЭТФ. 1981. **54**. С. 827.
8. Дульян Л.С., Коциян А.М., Фаустов Р.Н. // Ядерная физика. 1977. **25**. С. 814.
9. Меледин Г.В., Сербо В.Г., Сливков А.К. // Письма в ЖЭТФ. 1971. **13**. С. 98.
10. Ахундов А.А., Бардин Д.Ю., Неменов Л.Л. // Ядерная физика. 1978. **27**. С. 1542.
11. Любошиц В.Л. // Там же. 1987. **45**. С. 1099.
12. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. // ТМФ. 1985. **64**. С. 179.
13. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. // Изв. вузов, Физика. 1994. № 10. С. 3; Мартыненко А.П., Салеев В.А., Фаустов Р.Н. // Ядерная физика. 1995. **58**. С. 1454.
14. Okubo S., Feldman D. // Phys. Rev. 1960. **117**. P. 279.
15. Фаустов Р.Н. // ТМФ. 1970. **3**. С. 240.
16. Keung Wai-Yee, Muzinich I.J. // Phys. Rev. 1983. **D27**. P. 1518.
17. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Путаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М., 1989.
18. Khriplovich I.B., Milstein A.I. Preprint BINP 94-30, 1994.

Поступила в редакцию
15.08.97