УДК 621.372.2

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБОСНОВАНИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО ПОДХОДА К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, И. Е. Могилевский

(*кафедра математики*)

Дается обзор исследований по обоснованию сходимости метода конечных элементов для волноводных задач.

В настоящее время в связи с широким применением оптических волноводов в линиях связи проявляется большой интерес к расчету диэлектрических волноведущих систем со сложной геометрией и неоднородным заполнением. Точные аналитические решения уравнений Максвелла для электромагнитного поля волновода могут быть получены лишь для некоторых простых профилей показателя преломления [1–3]. Даже для относительно простого профиля получение выражения для векторных полей мод является весьма трудоемкой задачей. Одним из самых универсальных и мощных методов математического моделирования таких устройств является метод конечных разностей в прямой и вариационной постановке [4–20].

Метод конечных элементов основывается на слабой вариационной формулировке граничной задачи [4, 13, 21–24]. Подобный подход позволяет максимально ослабить требования к гладкости решения и исследовать задачи с особенностями, например с входящими углами [25, 26].

Метод конечных элементов основан на локальной аппроксимации решения кусочно-полиномиальными функциями. Исходная область разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых выступают треугольники или четырехугольники, возможно с криволинейными границами.

Делая подобласть достаточно малой либо выбирая достаточно высокую степень полиномов, можно добиться, чтобы аппроксимирующая функция достаточно точно передавала локальное поведение решения. Метод конечных элементов позволяет сосредоточить внимание на стандартном конечном элементе и построить аппроксимацию независимо от местоположения данного элемента при разбиении области. В результате метод конечных элементов обладает, в частности, следующим свойством [5, 6, 13]. Метод может применяться для областей произвольной формы и граничных условий общего вида, причем возможно нерегулярное разбиение области, т.е. на расположение элементов при разбиении области не накладываются ограничения, что позволяет применять метод конечных элементов для широкого круга областей без использования глобальной фиксированной системы координат.

Начиная с 1960 г. опубликовано большое количество работ по математическому обоснованию метода конечных элементов [4, 14, 26–38], и в целом можно считать его хорошо разработанным для линейных эллиптических задач. Возможность получения априорных и апостериорных оценок позволяет оценить погрешности результатов численного решения. Особенно хорошо техника метода конечных элементов разработана применительно к задачам теории упругости [25, 26, 32]. К сожалению, применительно к задачам электродинамики теоретическое обоснование вариационно-разностного подхода проведено пока еще недостаточно полно, хотя число работ по практическому использованию метода конечных элементов для расчета волноводов ежегодно увеличивается. Для расчета TE и TM мод однородного металлического волновода используется скалярная постановка задачи. В случае же неоднородного заполнения необходима векторная постановка, что приводит к существенному усложнению проблемы.

Одна из основных проблем, возникающих при применении метода конечных элементов к задачам электродинамики, — это появление решений, которые не соответствуют реальным распространяющимся модам [39, 40]. Таким образом, необходимо отсеивать фиктивные моды, которые часто называют «духами». Один из способов построения алгоритма без фиктивных решений описан в работе [28].

Существуют три версии метода конечных элементов: h-версия, p-версия и $h-p$-версия [25–27]. В h-версии степень элементов, используемых для аппроксимации, фиксирована, обычно $p = 1, 2, 3$, а точность достигается путем разбиения области на более мелкие элементы. При использовании p-версии метода конечных элементов разбиение области остается фиксированным, а точность достигается путем увеличения порядка аппроксимации. Использование p-версии и $h-p$-версии началось сравнительно недавно, при этом $h-p$-версия, в которой точность достигается путем одновременного уменьшения размера элементов и увеличения степени p полинома, является очень перспективным направлением. Применение $h-p$-версии к случаю кусочно-аналитической области и кусочно-аналитических граничных условий дает экспоненциальную скорость сходимости [25].

Особый интерес в настоящее время приобретают вопросы, связанные с исследованием сходимости построенных разностных схем и получением оценок точности приближенных решений. Математическая проблема заключается в следующем. Рассматривается задача: найти действительные или комплексные λ и ненулевые $\mathbf{u}(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} L\mathbf{u}(x) = \lambda\mathbf{u}(x), \quad x \in \Omega, \\ B\mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область в R^2 с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \partial\Omega$, L — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка:

$$\begin{gathered} (L\mathbf{u}(x))_k = -\sum_{i,j=1}^{2} D_j\left(a_{ij}^{(k)}(x)D_iu_k\right) + \\ + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(k)}(x)D_iu_j + \sum_{i=1}^{2} c_i^{(k)}(x)u_i, \end{gathered} \tag{2}$$

причем

$$\begin{gathered} \exists\alpha > 0: \ \operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^{(k)}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\|\xi\|^2 \\ \forall x \in \Omega, \quad \forall k = 1,\ldots,n, \quad \forall\xi \in R^2, \end{gathered} \tag{3}$$

$$a_{ij}^{(k)}(x) = a_{ji}^{(k)}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b_{ij}^{(k)}(x), \quad c_i^{(k)}(x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$B\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(x) \ \text{ или } \ B\mathbf{u}(x) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}n_jD_i\mathbf{u}, \tag{4}$$

где $\mathbf{n}(x) = \binom{n_1}{n_2}$ — вектор внешней нормали к Γ. Пусть $(\lambda, \mathbf{u}(x))$ удовлетворяют (1) в классическом смысле в случае граничного условия Дирихле $\mathbf{u}(x) = 0$ $\forall x \in \Gamma$. После умножения (1) покомпонентно на $\mathbf{v}^*(x)$, интегрирования по Ω и суммирования получается вариационная формулировка задачи (1):

$$\begin{gathered} \int_\Omega (L\mathbf{u}, \mathbf{v})\,dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^{(k)}(x)D_iu_kD_jv_k^* + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(k)}(x)D_iu_jv_k^* + \sum_{i=1}^{2} c_i^{(k)}(x)u_iv_k^*\right\}dx \equiv \\ \equiv a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda\int_\Omega (\mathbf{u}, \mathbf{v})\,dx \equiv \lambda b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \forall\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \mathbf{v} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma. \end{gathered} \tag{5}$$

Из непрерывности коэффициентов следует, что

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{1,2}\|\mathbf{v}\|_{1,2} \quad \forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

где

$$\|\mathbf{u}\|_{m,2} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}u_i|^2\,dx\right\}^{1/2},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Считается, что

$$\operatorname{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \alpha_0\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2,$$

поскольку необходимое увеличение коэффициентов $c_1^{(1)}(x)$, $c_2^{(2)}(x)$,..., $c_n^{(n)}(x)$ на постоянную лишь сдвигает собственные значения [41]. Пара $(\lambda, \mathbf{u})$, удовлетворяющая (1) в классическом смысле, является решением уравнения

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{u} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \quad \forall\mathbf{v} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Обратное верно в случае $\mathbf{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ [32].

Часто встречаются задачи вида (1) для областей с углами, для которых обобщенное решение не является классическим [42–47]. В общем случае негладкой области задача рассматривается в обобщенной постановке, доказывается принадлежность $\mathbf{u}$ к пространству Соболева $H^2(\Omega)$ [13, 33, 41, 46–49]. В частном случае выпуклой области справедливо следующее утверждение [47].

Пусть Ω — выпуклое открытое подмножество R^n. Тогда $\forall f \in L_2(\Omega)$ существует единственная функция $u \in H^2(\Omega)$ — решение уравнения

$$\begin{gathered} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij}(x)D_ju\right) = f \ \text{ в } \ \Omega, \ \text{ где } \ a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \\ u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma. \end{gathered}$$

Далее предполагается, что выполнены достаточные условия принадлежности решения задачи (5) пространству $H^2(\Omega)$. Вводится оператор T: $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, определенный из равенства

$$a(T\mathbf{f}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{6}$$

По теореме Лакса–Мильграма задача (6) имеет единственное оганиченное решение $\forall\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$, т. е. оператор T: $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ ограничен, более того, T — компактный оператор (по теореме Релliха) [41]. Из (5) и (6) следует, что $(\lambda, \mathbf{u})$ — собственное значение и собственная функция оператора L тогда и только тогда, когда $T\mathbf{u} = (1/\lambda)\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq 0$, т. е. λ — характеристическое число оператора T. Согласно спектральной теории для компактных операторов [50] спектр $\sigma(T)$ — счетное множество.

Далее, пусть T — компактный оператор T: $H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$, T_h — семейство компактных операторов T_h: $H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$, $0 < h \leqslant 1$, таких, что $T_h \to T$ при $h \to 0$, μ — собственное значение оператора T алгебраической кратности m. Пусть Γ — окружность в комплексной плоскости с центром в точке μ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)$ и не содержит других точек спектра $\sigma(T)$. Оператор

$$E(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_z(T)dz$$

является оператором проектирования на пространство собственных и присоединенных функций, соответствующее собственному значению μ [51, 52], т.е. $R(E) = N\left((\mu - T)^{\alpha}\right)$, где R — область значений оператора E. Для достаточно малого h [53, 54], причем $\Gamma \subset \rho(T_h)$, существует

$$E_h(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_z(T_h)dz \quad \text{и} \quad E_h \to E,$$

$$\dim R\left(E_h(\mu)\right) = \dim R\left(E(\mu)\right) = m.$$

В работе [55] рассматривается проблема спектральной аппроксимации компактного оператора следующего вида T: $H^s(\Omega) \to H^{s+\varepsilon}(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $H^s(\Omega)$. В работах [29, 56] аналогичный результат получен для случая компактных операторов в банаховом пространстве. В [29], кроме того, содержится применение его к методу смешанных конечных элементов для задач второго и четвертого порядка. Случай некомпактного самосопряженного оператора рассмотрен в работах [57, 58]. Получены следующие результаты по применению метода Галеркина [55]. Пусть H_h — семейство конечномерных подпространств $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (обычно это кусочно-линейные или кусочно-полиномиальные функции). Проекционный метод состоит в аппроксимации $\mathbf{u}$ функциями $\mathbf{u_h} \in H_h$, где $\mathbf{u_h}$ — решение задачи

$$a(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) = \lambda(h) b(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) \quad \forall \mathbf{v_h} \in \overset{\circ}{H}_h. \qquad (7)$$

Ограниченный оператор T_h: $H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ является проекцией оператора T [30–32]. Поскольку дополнительная гладкость решения считается доказанной, то выполнено неравенство

$$\|T\mathbf{f}\|_{s+2,2} \leqslant C\|\mathbf{f}\|_{s,2} \quad \forall s. \qquad (8)$$

Пусть $\mu(h)$ — ненулевое собственное значение оператора T_h:

$$T_h \mathbf{w}_h = \mu(h)\mathbf{w}_h, \quad \mathbf{w}_h \in H_h.$$

Оператор T_h определяется посредством равенства

$$a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{\mu(h)} a(T_h\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{\mu(h)} b(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h), \qquad (9)$$

$\lambda(h) = \mu^{-1}(h)$ — собственное значение дискретной задачи.

Справедлива оценка [55, 56]:

$$\|(T - T_h)\mathbf{f}\|_{1,2} \leqslant Ch\|\mathbf{f}\|_{0,2}. \qquad (10)$$

Величина $(T - T_h)\mathbf{f}$ оценивается в норме $L_2(\Omega)$ следующим образом:

$$\|(T - T_h)\mathbf{f}\|_{0,2} \leqslant Ch^2\|\mathbf{f}\|_{0,2}.$$

Пусть λ — собственное значение задачи (5) алгебраической кратности m, $\mu = 1/\lambda$. Тогда собственные значения дискретной задачи (для T_h) $\mu_1(h), \ldots, \mu_m(h)$ сходятся к μ. В [55] получены оценки

$$\left|\lambda - \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j(h)}\right)^{-1}\right| \leqslant Ch^2,$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|\mathbf{u_j} - \mathbf{w_j}\|_{0,2} \leqslant Ch^2,$$

где $\{\mathbf{u_i}\}_{i=1}^{m}$, $\{\mathbf{w_i}\}_{i=1}^{m}$ — ортонормированные базисы в пространстве собственных функций операторов T и T_h соответственно.

Приведенные в данной работе результаты, и в частности оценки для собственных значений, дают возможность строить алгоритмы с гарантируемой точностью приближения на основе вариационно-разностного подхода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-01081).

Литература

1. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М., 1987.
2. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М., 1984.
3. *Маркузе Д.* Оптические волноводы. М., 1974.
4. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
5. *Oden J.T.* // Handbook of Numerical Analysis. Vol. 2. / Ed. P.G. Ciarlet, J.L. Lions. North-Holland, 1991. P. 3.
6. *Ciarlet P.G.* // Ibid. P. 17.
7. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М., 1989.
9. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М., 1989.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1983.
11. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976.
12. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.
13. *Oden J.T., Reddy J.N.* An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. N.Y., 1976.
14. *Noor A.K.* // Finite Elements in Analysis and Design. 1985. Vol. 1, No. 1. P. 101.
15. *Rao S.S.* The Finite Element Method in Engeneering. 2nd ed. Oxford, UK, 1989.

16. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М., 1986.
17. *Завадский В.Б.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М., 1972.
18. *Боголюбов А.Н., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1979. **19**, № 6. С. 1496.
19. *Боголюбов А.Н., Лопушенко В.В.* // Радиотехн. и электроника. 1988. **33**, № 11. С. 2296.
20. *Kikuchi F.* // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1987. **64**. P. 509.
21. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
22. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979.
23. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., 1967.
24. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1973.
25. *Babuška I., Guo B.Q.* // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, No. 4. P. 837.
26. *Babuška I.* // Proc. Finite Element Workshop / Ed. R. Voigt. N. Y., 1987. P. 199.
27. *Babuška I., Suri M.* // SIAM J. Numer. Anal. 1987. **24**, No. 4. P. 750.
28. *Bermudes A., Pedreira D.* // Numer. Math. 1992. **61**, No. 1. P. 39.
29. *Mercier B., Osborn J., Rappaz J., Raviart P.* // Math. Comp. 1981. **36**, No. 154. P. 427.
30. *Chatelin F.* // SIAM Rev. 1981. **23**, No. 4. P. 495.
31. *Chatelin F.* Spectral Approximation of Linear Operators. N. Y., 1983.
32. *Babuška I., Osborn J.* // Handbook of Numerical Analysis. Vol.2. / Ed. P.G. Ciarlet, J.L. Lions. North-Holland, 1991. P. 641.
33. *Wahlbin L.B.* // Ibid. P. 353.
34. *Fix G.J.* // Adv. in Math. 1973. **10**, No. 2. P. 300.
35. *Nedelec J.C.* // Numer. Math. 1980. **35**, No. 3. P. 315.
36. *Raviart P.A., Thomas J.-M.* // Math. Comp. 1977. **31**, No. 138. P. 391.
37. *Roberts J.E., Thomas J.-M.* // Handbook of Numerical Analysis. Vol. 2 / Ed. P.G. Ciarlet, J.L. Lions. North-Holland, 1991. P. 523.
38. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М., 1977.
39. *Боголюбов А.Н., Лопушенко В.В.* // Электродинамика открытых структур миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов: Сб. науч. тр. АН УССР. Харьков, 1990. С. 42.
40. *Свешников А.Г. , Боголюбов А.Н., Минаев Д.В., Сычкова А.В.* // Радиотехн. и электроника. 1993. **38**, № 5. С. 804.
41. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
42. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
43. *Кондратьев В.А.* // Тр. Моск. матем. о-ва. 1967. **16**. С. 227.
44. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* // УМН. 1983. **38**, № 2. С. 3.
45. *Волков Е.А.* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1965. **77**. С. 89.
46. *Babuška I., Guo B.Q.* // SIAM J. Math. Anal. 1988. **19**, No. 1. P. 172.
47. *Grisvard P.* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Boston, 1985.
48. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
49. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
50. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Ч.1. Общая теория. М., 1962.
51. *Babuška I., Aziz A.* // The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations / Ed. A. Aziz. N. Y., 1973. P. 3.
52. *Kolata W.* // Numer. Math. 1978. **29**. P. 159.
53. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
54. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
55. *Bramble J., Osborn J.* // Math. Comp. 1973. **27**, No. 123. P. 525.
56. *Osborn J.* // Math. Comp. 1975. **29**, No. 131. P. 712.
57. *Decloux J., Nassif N., Rappaz J.* // RAIRO Numerical Analysis. 1978. **12**, No. 2. P. 97.
58. *Decloux J., Nassif N., Rappaz J.* // Ibid. P. 113.

Поступила в редакцию
15.08.97