УДК 539.12.01

*Посвящается 90-летию
со дня рождения профессора МГУ
Анатолия Александровича Власова
(1908–1975)*

ПРОБЛЕМЫ РАДИАЦИОННОЙ СИЛЫ

Ал. А. Власов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Дан краткий обзор проблем, возникающих при учете излучения в уравнениях движения заряженных частиц в классической электродинамике.

После появления знаменитой работы Дирака о релятивистской силе радиационного трения в классической электродинамике было опубликовано множество статей и книг, посвященных данной тематике. Среди них отметим работы [1–11], где можно, в частности, найти обзор основных проблем, возникающих при использовании уравнения Лоренца–Дирака: необходимость перенормировки и ее неоднозначность, расходящиеся («убегающие») решения и опережающее взаимодействие (заметим, что с аналогичными проблемами можно встретиться и в других классических полевых теориях — теории скалярного поля, гравитационного и т. п.). В настоящей статье дан краткий обзор проблем учета радиационной отдачи с учетом последних результатов по этой теме.

1. Известно, что x-компонента электрического поля $\mathbf{E}$ точечной частицы с зарядом $e=1$, движущейся вдоль оси x декартовой системы координат, имеет вид (решение Лиенара–Вихерта, используется система единиц, в которой $c=1$)

$$E=\frac{(1+Nv')N}{(1-Nv')(x-R')^2}, \tag{1}$$

где $R'=R(t')$ — траектория движения частицы со скоростью $v'=v(t')=dR'/dt'$, t' — запаздывающее время: $t'=t-|x-R'|$, N — единичный вектор: $N=(x-R')/|x-R'|$.

Чтобы выявить самодействие, надо разложить поле E вблизи самой частицы. Это можно сделать различными способами. Рассмотрим два из них.

1) Пусть $\epsilon=t-t'$ (т. е. $|x-R'|=\epsilon$), $\epsilon\to 0$. Тогда среднее значение электрического поля есть

$$\begin{aligned}<E> &= \frac{1}{2}\left[(E)_{N=1}+(E)_{N=-1}\right]=\\ &=\frac{2v}{\epsilon^2(1-v^2)}-\frac{2\dot v(1+v^2)}{\epsilon(1-v^2)^2}+\\ &+\left[\frac{\ddot v(1+v^2)}{(1-v^2)^2}+\frac{(\dot v)^2 2v(3+v^2)}{(1-v^2)^3}\right].\end{aligned} \tag{2}$$

2) Пусть $\epsilon=|x-R(t)|$, $\epsilon\to 0$. Тогда

$$\begin{aligned}<E> &= \frac{1}{2}\left[(E)_{N=1}+(E)_{N=-1}\right]=\\ &=-\frac{\dot v}{\epsilon}+\left[\frac{2\ddot v}{3(1-v^2)^2}+\frac{(\dot v)^2 2v}{(1-v^2)^3}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Расходящиеся при $\epsilon\to 0$ члены в (2)–(3) ведут к необходимости перенормировки массы в уравнении движения частицы. Конечные при $\epsilon\to 0$ члены в (2)–(3) представляют собой то, что обычно называют радиационной силой.

Мы видим, что конечные члены в (2)–(3) отличаются друг от друга и только член в (3) описывает известное выражение для релятивистской силы Лоренца–Дирака реакции излучения в одномерном случае.

Таким образом, различные способы разложения (различные пути нахождения собственного поля) ведут к различным результатам. С математической точки зрения это очевидный результат — разложение вблизи бесконечности не является строго определенной операцией.

Действительно, к примеру, из расходящейся величины $1/(a-b)$, устремляя a к b различным образом, можно выделить различные конечные члены: если $b=a-\epsilon$, то $1/(a-b)=1/\epsilon+0$ и конечный член отсутствует; если $b=a-\epsilon+c\epsilon^2$, то $1/(a-b)=1/\epsilon+c+O(\epsilon)$ и выделяется конечный член, равный c.

Такова одна из сторон проблемы перенормировки массы и ее неоднозначности (см. также [5, 6]).

2. Другой проблемой является проблема поиска физических решений уравнения Лоренца–Дирака.

Пусть точечная частица массы m и заряда e движется под воздействием внешней силы F вдоль оси x. Релятивистское уравнение Лоренца–Дирака в этом случае гласит:

$$\frac{m\dot v}{(1-(v/c)^2)^{3/2}}=F+\frac{2e^2}{3c^3}\times \left[\frac{\ddot v}{(1-(v/c)^2)^2}+\frac{3v(\dot v)^2}{c^2(1-(v/c)^2)^3}\right], \tag{4}$$

где точка означает производную по t, $v=\dot x$.

Введем безразмерные переменные η и τ, безразмерную силу f и безразмерный радиационный параметр γ, используя масштабные множители a, b, p:

$$a\sim x_{\rm cl},\quad b\sim x_{\rm cl},\quad x_{\rm cl}=\frac{e^2}{mc^2},\quad p=\frac{a}{b},$$

$$x=a\eta,\quad ct=b\tau,\quad f=F\frac{b^2}{amc^2},\quad \gamma=\frac{2}{3b}x_{\rm cl},$$

где $x_{\rm cl}$ — классический радиус частицы.

В новых переменных уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\ddot\eta}{(1-(p\dot\eta)^2)^{3/2}}=f+\gamma\left[\frac{\dddot\eta}{(1-(p\dot\eta)^2)^2}+\frac{3\dot\eta(\ddot\eta)^2p^2}{(1-(p\dot\eta)^2)^3}\right], \tag{5}$$

где точка означает производную по τ.

С помощью релятивистской «скорости» u:

$$u=\frac{\dot\eta}{(1-(p\dot\eta)^2)^{1/2}}=\frac{v/(cp)}{(1-(v/c)^2)^{1/2}}, \tag{6}$$

«ускорения» w:

$$w=\frac{du}{d\tau}, \tag{7}$$

и безразмерного собственного времени s:

$$\frac{b}{c(1-(v/c)^2)^{1/2}}\frac{d}{dt}=(1+(pu)^2)^{1/2}\frac{d}{d\tau}=\frac{d}{ds}$$

уравнение (5) может быть представлено в более простом виде:

$$w=f+\gamma\frac{dw}{ds}. \tag{8}$$

«Решение» (а точнее, интегральное представление) (8) очевидно:

$$w = w(s) = -\frac{1}{\gamma}\exp(s/\gamma)\times \\ \times\int\limits_0^s dx\, f(x)\exp(-x/\gamma) + w_0\exp(s/\gamma), \tag{9}$$

где «начальное» значение ускорения w_0 можно представить в виде

$$w_0 = \left(\frac{\ddot\eta}{(1-(p\dot\eta)^2)^{3/2}}\right)_{s=0} = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{s_0} dx\, f(x)\exp(-x/\gamma).$$

Здесь s_0 — произвольная константа.

Интегрирование (7) с учетом (6) и (9) приводит к следующему «решению» (строго говоря, интегральному уравнению) для скорости частицы v:

$$\frac{1}{p}\ln\sqrt{\frac{(1+v/c)(1-v_0/c)}{(1-v/c)(1+v_0/c)}} = \int\limits_0^s dz\, f(z) - \exp(s/\gamma)\times \\ \times\int\limits_0^s dz\, f(z)\exp(-z/\gamma) + \gamma w_0(\exp(s/\gamma)-1), \tag{10}$$

где v_0 — «начальная» скорость.

Форма уравнения Лоренца–Дирака, сходная с (10), приведена в работах [2–4, 7]. Наша форма уравнения (10) удобна для дальнейшего анализа: из нее сразу следует несколько выводов.

1°. Вид асимптотики решений уравнения качественно не зависит от масштабных множителей a, b, т. е. соответствующие особенности существуют как на «малых», так и на «больших», классических расстояниях.

2°. Если постановка задачи допускает рассмотрение предела $s\to\infty$ (данное условие — сильное, оно означает, во-первых, что траектория частицы допускает существование предела $s\to\infty$, а это может не всегда выполняться, особенно для тех траекторий, которые стремятся к световому конусу, и, во-вторых, что все интегралы должны сходиться), то все «решения» (10) должны быть «убегающими»: $|v|\to c$, за одним исключением (см. ниже п. 4°).

3°. Умножив на скорость u (6) уравнение (8), последнее можно привести к форме, описывающей баланс между энергией W системы «частица+поле», $W = u^2/2 - k(du/d\tau)^2/2$, и работой внешних сил $A = fu$:

$$\frac{dW}{d\tau} = A.$$

Все решения уравнения (8), в том числе и расходящиеся, тождественно удовлетворяют данному уравнению баланса (уравнению сохранения энергии). Поэтому иногда встречающиеся в литературе утверждения о том, что расходящиеся решения нарушают энергетический баланс, с описанной точки зрения неверны.

4°. Рассмотрим возможность существования нерасходящихся решений. Это случай нулевого значения для ускорения на асимптотике $s_0=\infty$ в (9) и

$$w_0 = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty dx\cdot f(x)\exp(-x/\gamma). \tag{11}$$

С учетом (11) правая часть соотношения (10) записывается так:

$$\int\limits_0^s dz\, f(z) + \exp(s/\gamma)\int\limits_s^\infty dz\, f(z)\exp(-z/\gamma) - \\ -\int\limits_0^\infty dx\, f(x)\exp(-x/\gamma), \tag{12}$$

а соотношение (9) принимает вид [1]

$$w(s) = \frac{1}{\gamma}\exp(s/\gamma)\int\limits_s^\infty dx\, f(x)\exp(-x/\gamma) = \\ = \int\limits_0^\infty dy\, f(s+ky)\exp(-y). \tag{13}$$

Тогда при $s\to\infty$ и при «хорошо определенной» силе f скорость v не достигает c и $\omega(s)\to 0$.

Однако при этом возникают предускорение и обратное во времени интегрирование (см. уравнение (12)) со всеми вытекающими парадоксами (некоторые из них обсуждаютя в работах [7–9], см. также ниже).

Подчеркнем еще раз, что выбор начального значения ускорения в форме (11) может быть несовместным с другими начальными условиями уравнения (8) и, таким образом, нереализуемым.

5°. Действительно, в случае притягивающего силового центра, $f(s) < 0$ для всех s, формула (13) означает, что $w(s) < 0$ для всех s, т. е. частица должна с необходимостью упасть на силовой центр. Если при этом сила оказывается сингулярной в центре (например, она образована точечной частицей противоположного знака, покоящейся в центре), то из (8) следует, что в центре должно расходиться и ускорение w; последнее, в свою очередь, в силу формул (13) и (11) означает обращение в бесконечность константы w_0. Таким образом, при конечных начальных ускорениях частица не может упасть на притягивающий точечный силовой центр и отскакивает от него; далее, как только ускорение частицы меняет знак на положительный, в силу условия $f < 0$ и формулы (8) величина dw/ds становится положительной для всех последующих моментов времени, следовательно, частица самоускоряется. Такое поведение полностью согласуется с уже имеющимися в литературе утверждениями об отсутствии физических траекторий в задаче о лобовом столкновении двух частиц противоположных знаков (см., напр., [4]).

6°. В литературе «решение» (12) часто называют «физическим», однако из (10) легко увидеть, что (12) является неустойчивым относительно малых отклонений ускорения w от нулевого значения на бесконечности: благодаря (10) эти первоначально малые отклонения δ растут по крайней мере как e^{δ}.

Такая неустойчивость «физических» решений может быть легко проверена численным интегрированием (см., напр., [10]).

Следовательно, мы можем утверждать, что нерасходящихся устойчивых решений уравнения Лоренца–Дирака не существует, по крайней мере в случае движения по одной прямой.

3. Рассмотрим еще парадоксы, связанные с существованием «экзотических» решений уравнения Лоренца–Дирака, отсутствующих в классическом уравнении движения частицы без радиационного трения («ньютоновском»).

Возьмем для простоты нерелятивистский случай (система единиц, в которой $c = 1$).

Пусть точечная частица массы m и заряда e движется, следуя нерелятивистскому уравнению Лоренца–Дирака, под действием внешней силы F вдоль оси x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{F(x)}{m}. \qquad (14)$$

Здесь второе слагаемое в левой части уравнения (14) ($k \approx x_{\mathrm{cl}}$, x_{cl} — классический радиус частицы, $k > 0$) учитывает радиационнную силу.

1) О б р а з о в а н и е г о р и з о н т а. Для иллюстрации рассмотрим простой и наглядный пример, когда сила в уравнении (14) имеет импульсный вид:

$$F/m = A\delta(x), \qquad (15)$$

где $A > 0$ (см., напр., [2, 3]).

Так как уравнение (14) — третьего порядка, то положение и скорость частицы должны быть всюду непрерывными.

Пусть точка $x = 0$ достигается в момент времени $t = 0$.

Тогда граничные условия при $t = 0$ имеют вид

$$x_+ = x_- = 0, \quad \dot{x}_+ = \dot{x}_-, \quad \ddot{x}_+ = \ddot{x}_- = -A/(kv).$$

Решение уравнения движения (14) с учетом F (15) очевидно:

$$x(t < 0) = -c_1 + (v - c_1/k)t + c_1\exp\{t/k\},$$
$$x(t > 0) = -c_2 + (v - c_2/k)t + c_2\exp\{t/k\},$$
$$c_2 = c_1 - Ak/v.$$

Требование отсутствия самоускорения для $t > 0$ ведет к условию $c_2 = 0$, следовательно, вид траектории следующий:

$$x(t < 0) = \frac{Ak}{v}(\exp\{t/k\} - 1) + \left(v - \frac{A}{v}\right)t,$$
$$x(t > 0) = vt.$$

Мы видим, что в случае $v - A/v > 0$ физические следствия стандартны. Но если $v - A/v < 0$ (т.е. выходная скорость v достаточно мала), то возникают нестандартные свойства — появляется горизонт, т.е. возникают точки на оси x, недоступные при движении из «будущего»: $x \geqslant x_{\min} \equiv x(\dot{x} = 0)$.

В этом смысле рассматриваемая модель при $v \to 0$ не имеет ньютоновского предела.

Модель (14) имеет и другие экзотические, «квантовые» решения.

2) Т у н н е л и р о в а н и е. Пусть сила в (14) имеет вид

$$F/m = -A\delta(x) + A\delta(x - a),$$

т.е. отвечает ступенчатой потенциальной функции (барьеру) высоты $A > 0$ и длины a.

Решение ньютоновского уравнения (14) для $k = 0$ очевидно:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_i, && x < 0; \\ v(t) &= \sqrt{(v_i)^2 - 2A}, && 0 < x < a; \\ v(t) &= v_i, && x > a; \end{aligned}$$

здесь v_i — начальная скорость. Решение в области $0 < x < a$ существует, только если выполняется соотношение $(v_i)^2 - 2A > 0$, в противном случае частица отскакивает от барьера.

Решение уравнения (14), учитывающее радиационную силу, с использованием описанных выше граничных условий существенно отличается от ньютоновского. Так было найдено [8] решение, описывающее прохождение под барьером частицы:

$$\begin{aligned} v(t) &= -7b\exp(t/k) + 16b, && x < 0, \\ v(t) &= 9b\exp(t/k), && 0 < x < a, \\ v(t) &= 12b, && a < x, \end{aligned}$$

где начальная скорость ($t \to -\infty$) равна $v_i = 16b$, а высота и длина барьера связаны соотношениями $a = 3bk$, $A = (12b)^2$.

Барьер частица проходит за время $T = k\ln(4/3)$, хотя для частицы разность $(v_i)^2 - 2A$ отрицательна и поэтому с ньютоновской точки зрения она должна была бы отскочить от барьера.

3) Д и с к р е т н ы й с п е к т р. Уравнение (14) перепишем в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - k\frac{d^3x(t)}{dt^3} \approx \frac{d^2x(t-k)}{dt^2} = \frac{F(x(t))}{m}$$

и «обобщим» его так:

$$\frac{d^2x(t-k)}{dt^2} = \frac{F(x(t))}{m}$$

или в другом виде:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F(x(t+k))}{m}. \qquad (16)$$

Пусть сила $F(x(t))/m = -w^2 x(t)$ отвечает линейному гармоническому осциллятору с собственной частотой w. При $k = 0$ решение (16) очевидно:

$$x(t) = B \exp(ipt), \tag{17}$$

где

$$p = \pm w.$$

При k, отличном от нуля, для решения в виде (17) получаем следующее соотношение:

$$p = \pm w \exp(ikp/2). \tag{18}$$

Теперь частота p имеет в общем случае как действительную часть, так и мнимую (последняя в случае малых частот, $kw \ll 1$, строго положительна, что обеспечивает затухание колебаний с течением времени).

Однако существует и экзотическое чисто колебательное решение с дискретным спектром, обеспечивающее отсутствие как экспоненциального затухания, так и роста решений:

$$p = w = 2\pi n/k, \quad n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$$

Это решение отсутствует в ньютоновском случае и в определенном смысле может быть названо «квантовым».

4. Если принять, что в подходе Лоренца–Дирака действительно возникают проблемы, то можно попытаться подойти к задаче учета реакции излучения другими способами.

Например, в литературе часто высказывается надежда, что модель «размазанной», протяженной в некотором (квантовом или статистическом) смысле частицы может решить проблемы радиационной силы [12–14]. При этом надо отметить, что простая геометрическая протяженность излучаемого объекта сама по себе не решает всех проблем.

Действительно, рассмотрим модель скалярного поля с самодействием в форме [15]:

$$L = \frac{1}{8\pi}\partial_p\phi\partial^p\phi + gn\phi - mn, \quad \partial_p(nu^p) = 0.$$

Возьмем скалярно заряженную раздувающуюся сферу. Ее уравнение расширения определяется разрывами полного тензора энергии-импульса на поверхности сферы. В силу сферической симметрии можно достаточно просто найти полное «запаздывающее» скалярное поле вне и внутри оболочки и соответственно его тензор энергии-импульса (при этом поле «реакции излучения» будет автоматически учтено), которые оказываются на оболочке конечными. Из найденного тензора строится уравнение «раздувания» оболочки. Последнее при этом оказывается самосогласованным и не нуждается в дополнительных слагаемых, связанных с силой реакции излучения (стоит подчеркнуть, что в отличие от электродинамики в теории скалярного поля сфера должна, несмотря на простую симметрию, излучать). Численный анализ уравнения показывает [15], что в задаче существуют решения, которые можно интерпретировать как расходящиеся: $v \to \pm 1$.

Следовательно, существование таких решений не связано с выбором формы силы радиационного трения и не является исключительной чертой «точечных» моделей частиц. Поэтому для решения проблем излучения наряду с введением протяженности у излучаемого объекта требуются еще какие-то дополнительные гипотезы (см, напр., [13]).

Автор благодарен за многочисленные обсуждения рассматриваемых вопросов А. В. Борисову, В. И. Григорьеву и П. А. Полякову.

Литература

1. *Rohrlich F.* Classical Charged Particles. Reading, Mass., 1965.
2. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля М., 1949; *Sokolov A., Ternov I.* Synchrotron Radiation. N.Y., 1968; *А.А. Соколов, И.М. Тернов* Релятивистский электрон. М., 1982 (*Sokolov A., Ternov I.* Radiation from Relativistic Electron. N.Y., 1986); *Клепиков Н.П.* // УФН. 1985. **146**. С. 317.
3. *Plass G.* // Rev. Mod. Phys. 1961. **33**. P. 37.
4. *Parrott S.* Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry. N. Y., 1987.
5. *Teitelboim C.* // Phys. Rev. 1970. **D1**. P. 1572; 1970. **D2**. P. 1763; *Teitelboim C., Villaroel D., van Weert Riv Ch. G.* // Nuovo Cim. 1980. **3**. P. 1; *Glass E., Huschilt J., Szamosi G.* // Amer. J. Phys. 1984. **52**. P. 445.
6. *Tabensky R.* // Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 267.
7. *Parrott S.* // Found. Phys. 1993. **23**. P. 1093.
8. *Denef F., Raeymaekers J., Studer U.M., Troost W.* Prepr. hep-th/9602066.
9. *Alexander A. Vlasov*. Prepr. hep-th/9702177; hep-th/9703001.
10. *Kasher J.* // Phys. Rev. 1975. **D14**. P. 939.
11. *De Groot S., Suttorp L.* Foundations of Electrodynamics. Amsterdam, 1972.
12. *Власов А.А.* // ЖЭТФ. 1938. **8**. С. 291; Ученые записки, Физика. 1945. **75**, № 2; Теория многих частиц. М., 1950; Макроскопическая электродинамика. М., 1955; Статистические функции распределения. М., 1966; Нелокальная статистическая механика. М., 1978.
13. *Alexander A. Vlasov*. Prepr. hep-th/9704072.
14. *Lozada A.* // J. Math. Phys. 1989. **30**. P. 1713. *Bonnor W.* // Proc. Roy. Soc. (Lond.). 1974. **A337**. P. 591.
15. *Ал. А. Власов* // ТМФ. 1996. **109**, № 3. С. 464.

Поступила в редакцию
03.09.97