УДК 514.8, 517.9

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ПОСТАНОВКА СПЕКТРАЛЬНО-ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

С. А. Зададаев

(*кафедра математики*)

Предлагается построение спектрально-эволюционных операторов обратной задачи рассеяния методами дифференциальной геометрии. Обсуждаемый алгоритм использует аналогии между структурными уравнениями поверхности в E^3 и формализмом метода обратной задачи рассеяния.

Впервые взаимосвязь спектрально-эволюционных операторов с уравнениями структуры, вероятно, была выявлена в работе Сасаки [1], где построено явное выражение компонент 1-форм по операторам задачи рассеяния. Более детальное исследование возникающих при данном рассмотрении псевдосферических метрик представлено в работе [2]. В исследованиях [1, 2] ставится вопрос о нахождении 1-форм ω^1, ω^2 и ω_{21} псевдосферических поверхностей, рассматриваемых в качестве геометрической интерпретации определенных типов нелинейных уравнений математической физики, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

Рассматриваемый нами подход связан с иной постановкой проблемы: от произвольного уравнения в частных производных мы переходим к псевдосферической метрике (Λ^2-представление) с последующим определением соответствующих операторов задачи рассеяния. В данном контексте работа является естественным развитием формализма Λ^2-класса дифференциальных уравнений и связанных с ним геометрических построений, введенных Э. Г. Позняком и А. Г. Поповым [3, 4]. Заложенный принцип соответствия нелинейного дифференциального уравнения с уравнением Гаусса позволяет сформулировать ряд утверждений, образующих геометрическую методику постановки задачи рассеяния в методе обратной задачи рассеяния (МОЗР) по заданному уравнению.

1. Λ^2-представление и внутренняя геометрия поверхности

Рассмотрим на гладком двумерном многообразии M_2 произвольную метрику

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2, \tag{1}$$

коэффициенты которой представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned} E &= E(u, u_x, u_t, u_{xx}, \ldots) = E[u], \\ F &= F(u, u_x, u_t, u_{xx}, \ldots) = F[u], \\ G &= G(u, u_x, u_t, u_{xx}, \ldots) = G[u], \end{aligned} \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$ — неизвестная функция независимых переменных x и t. Если при этом задать гауссову кривизну K, то уравнение Гаусса [5]

$$H(E, F, G; K) = 0 \tag{3}$$

можно рассматривать как нелинейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(x,t)$ [3, 4]:

$$\widetilde{H}(u, u_x, u_t, \ldots; K) = 0. \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 1. Дифференциальное уравнение $f[u] = 0$ относительно функции $u(x,t)$ называют *принадлежащим* Λ^2*-классу*, если существуют такие $E[u]$, $F[u]$ и $G[u]$, которые при подстановке в уравнение Гаусса (3) при $K \equiv -1$ переводят (3) в данное уравнение $f[u] = 0$ [4].

О п р е д е л е н и е 2. Соответствующий набор $\{E[u], F[u], G[u]\}$ будем называть Λ^2*-представлением* уравнения $f[u] = 0$. (В случае произвольной гауссовой кривизны говорят о G-классе, G-представлении [6].)

2. Система структурных уравнений поверхностей в E^3

Обратимся к системе структурных уравнений поверхности S в E^3 [7]:

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega^2 = \omega_{21} \wedge \omega^1, \\ d\omega_{21} = K\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases} \tag{5}$$

и определим 1-формы ω^1, ω^2 и ω_{21} как решение системы (5) при условии, что метрика рассматриваемой поверхности задана соотношениями (1)–(2).

Теория подвижного репера дает следующую связь между ds^2 и ω^i:

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что участвующие в (1), (2) и (5), (6) величины связаны следующим образом:

$$\begin{cases} \omega^1 = E^{1/2}\cos(\theta^+)dx + G^{1/2}\cos(\theta^-)dt, \\ \omega^2 = E^{1/2}\sin(\theta^+)dx + G^{1/2}\sin(\theta^-)dt, \end{cases} \tag{7}$$

где $\theta^{\pm} = \theta \pm \frac{1}{2} \arccos\left[\frac{F}{(EG)^{1/2}}\right]$; $\theta(x,t)$ — произвольная функция. Соотношения (7) задают все допустимые 1-формы ω^1 и ω^2, которые соответствуют произвольному выбору $E(x,t)$, $F(x,t)$ и $G(x,t)$ в метрике (1).

Подставляя (7) в первые два уравнения системы (5), получим алгебраическую систему линейных уравнений относительно компонент $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ 1-формы $\omega_{21} = \widetilde{a}(x,t)dx + \widetilde{b}(x,t)dt$, решение которой принимает вид

$$\begin{cases} \widetilde{a} = \dfrac{1}{2w^{1/2}}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{FG_x}{G} - \dfrac{1}{2}\dfrac{FE_x}{E} + F_x - E_t\right] + \theta_x, & (8) \\ \widetilde{b} = \dfrac{1}{2w^{1/2}}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{FG_t}{G} - \dfrac{1}{2}\dfrac{FE_t}{E} - F_t + G_x\right] + \theta_t, & (9) \end{cases}$$

где $w = EG - F^2 > 0$.

При этом третье уравнение системы (5) является уравнением Гаусса для данных E, F, G и произвольной дважды дифференцируемой функции $\theta(x,t)$:

$$\widetilde{b}_x - \widetilde{a}_t = -Kw^{1/2}. \qquad (10)$$

3. Построение спектральных операторов, соответствующих произвольному уравнению из Λ^2-класса

Пусть U и V — матричные операторы (2×2), ψ — двумерная вектор-функция. Рассмотрим следующую спектрально-эволюционную задачу [8], используемую в методе обратной задачи рассеяния:

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, & (11) \\ \psi_t = V\psi. & (12) \end{cases}$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$U_t - V_x + [U,V] = 0, \qquad (13)$$

где $[U,V] = UV - VU$. Для того чтобы уравнение (13) было нетривиальным, оператор U должен зависеть от спектрального параметра ξ, причем $\xi_t = 0$.

Сформулируем теорему, связывающую метрику постоянной гауссовой кривизны с операторами задачи (11)–(12).

Теорема 1. *Рассмотрим некоторое нелинейное уравнение* $f[u] = 0$. *Пусть коэффициенты* $\{E[u], F[u], G[u]\}$ *метрики* (1) *постоянной гауссовой кривизны* $K = \text{const}$ *являются G-представлением данного нелинейного уравнения.*

Тогда операторы U и V задачи (11)–(12), *отвечающей рассматриваемому уравнению* $f[u] = 0$ *с точностью до калибровочных преобразований, принимают следующий вид:*

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{i}{2}\widetilde{a} & \dfrac{1}{2}(-K)^{1/2}E^{1/2}\exp(i\theta^+) \\ \dfrac{1}{2}(-K)^{1/2}E^{1/2}\exp(-i\theta^+) & \dfrac{-i}{2}\widetilde{a} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$V = \begin{pmatrix} \dfrac{i}{2}\widetilde{b} & \dfrac{1}{2}(-K)^{1/2}G^{1/2}\exp(-i\theta^-) \\ \dfrac{1}{2}(-K)^{1/2}G^{1/2}\exp(i\theta^-) & \dfrac{-i}{2}\widetilde{b} \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Функции θ^+ *и* θ^- *задаются соотношениями* (7): $\widetilde{a}$ *и* $\widetilde{b}$ *— соотношениями* (8)–(9).

Замечание. В описанном случае уравнение совместности задачи (11)–(12) $U_t - V_x + [U,V] = 0$ совпадает с уравнением Гаусса $f[u] = 0$.

Справедливость теоремы 1 может быть проверена путем непосредственной подстановки операторов U и V в уравнение совместности.

Таким образом, теорема 1 предоставляет возможность формального выражения операторов спектрально-эволюционной задачи для исследуемого уравнения $f[u] = 0$ по его Λ^2-представлению. Произвольная функция $\theta(x,t)$, играющая роль некоторого калибровочного преобразования, может быть использована (как будет показано ниже) для приведения операторов к модифицированному виду задачи Захарова–Шабата.

4. Λ^2-представление для произвольного нелинейного дифференциального уравнения

Покажем, что произвольное уравнение с частными производными относительно функции $u(x,t)$ принадлежит Λ^2-классу.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим коэффициенты псевдосферической метрики (Λ^2-представление), зависящие от произвольной функции $u(x,t)$, тождественно удовлетворяющие уравнению Гаусса:

$$\begin{aligned} E(x,t) &= (u_x)^2, \\ F(x,t) &= u_x(u_t - u), \\ G(x,t) &= 1 + (u_t - u)^2. \end{aligned} \qquad (16)$$

Компоненты $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ 1-формы ω_{21} принимают следующий вид:

$$\widetilde{a}(x,t) = -u_x - \frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(u_t - u)]_x + \theta_x,$$

$$\widetilde{b}(x,t) = u - u_t - \frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(u_t - u)]_t + \theta_t.$$

Заметим, что для приведения операторов U и V к модифицированному виду задачи Захарова–Шабата [8]:

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} -i\xi & q \\ r & i\xi \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$$

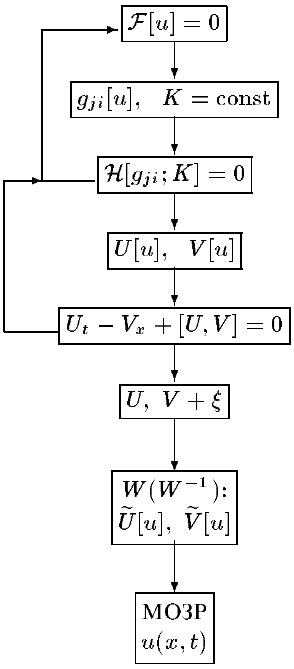
достаточно положить

$$\theta(x,t) = u + \frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(u_t - u)] - \xi x.$$

Следует также отметить неединственность Λ^2-представления: существует ряд других выражений Λ^2-представления для произвольного уравнения $f[u] = 0$ [6], приводящих к различным спектрально-эволюционным операторам.

5. Общая схема постановки спектральной задачи для уравнения, принадлежащего Λ^2-классу

Рассмотрим общую схему постановки спектрально-эволюционной задачи.



— исследуемое нелинейное уравнение

— Λ^2 или сферическое ($K=1$) представление нелинейного уравнения ($K=\mathrm{const}\not\equiv 0$)

— уравнение Гаусса, совпадающее с исследуемым уравнением $\mathcal{F}[u]=0$

— формально записанные операторы U и V, зависящие от $u(x,t)$

— уравнение совместности, совпадающее с уравнением Гаусса

— введение спектрального параметра ξ (исследование локальной симметрии, или использование ξ из g_{ji})

— калибровочное преобразование, приводящее операторы U, V к необходимому для решения МОЗР виду (например, виду Захарова–Шабата)

— получение решений нелинейного уравнения $\mathcal{F}[u]=0$

6. Реализация общей схемы для уравнения sin-Гордона

Рассмотрим сферическую метрику

$$ds^2=dx^2-2\cos(u)\,dx dt+dt^2\quad (K\equiv+1).$$

Подстановка в уравнение Гаусса приводит к уравнению sin-Гордона

$$u_{xt}=\sin(u).$$

Построим операторы U и V в соответствии с формулами (14)–(15):

$$E=1;\quad G=1;\quad F=-\cos(u);\quad W=\sin(u);$$

$$\widetilde{a}=\frac{u}{2}x+\theta_x;\quad \widetilde{b}=-\frac{u}{2}t+\theta_t;$$

$$\widetilde{\theta}^+=\theta-\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2};\quad \theta^-=\theta+\frac{u}{2}-\frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\theta=-u_x/2+\pi/2$. Отметим, что варьирование θ эквивалентно соответствующим калибровочным преобразованиям.

Полученным функциям $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{\theta}^+$ и $\widetilde{\theta}^-$ отвечают следующие искомые операторы U и V:

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{i}{2}\exp(-iu)\\ -\dfrac{i}{2}\exp(iu) & 0\end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} -\dfrac{i}{2}u_t & \dfrac{i}{2}\\ \dfrac{i}{2} & \dfrac{i}{2}u_t\end{pmatrix}.$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о введении спектрального параметра. Локальная симметрия уравнения sin-Гордона допускает лоренцевы сжатия и растяжения: $x\to\zeta x$, $t\to t/\zeta$. Производя указанную замену в спектральной задаче, а следовательно, и в операторах, получаем операторы, содержащие спектральный параметр ζ:

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{i}{2}\zeta\exp(-iu)\\ -\dfrac{i}{2}\zeta\exp(iu) & 0\end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} -\dfrac{i}{2}u_t & \dfrac{i}{2}\zeta\\ \dfrac{i}{2}\zeta & \dfrac{i}{2}u_t\end{pmatrix}.$$

Запишем калибровочное преобразование W:

$$W=\begin{pmatrix} \exp\left(i\dfrac{u}{2}\right) & \exp\left(-i\dfrac{u}{2}\right)\\ -i\exp\left(i\dfrac{u}{2}\right) & i\exp\left(-i\dfrac{u}{2}\right)\end{pmatrix},$$

приводящее спектрально-эволюционные операторы к модифицированному виду:

$$\widetilde{U}=\begin{pmatrix} -i\xi & -\dfrac{u}{2}x\\ \dfrac{u}{2}x & i\xi\end{pmatrix},\quad \widetilde{V}=\frac{i}{4\xi}\begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u)\\ \sin(u) & -\cos(u)\end{pmatrix}.$$

Реализация метода обратной задачи рассеяния для найденных операторов позволяет построить N-солитонные решения уравнения sin-Гордона [8].

Заключение

Представленные выше результаты позволяют получить в явном виде спектрально-эволюционные операторы для любого нелинейного дифференциального уравнения с решениями достаточной гладкости из Λ^2-класса.

Полученные формулы (14)–(15) содержат как неизвестную функцию $u(x,t)$, так и ее первые частные производные. В частности, исследование законов сохранения для эволюционного уравнения $u_t=f[u]$ позволяет исключить зависимость от $u_t(x,t)$ и понизить порядок по содержащимся в выражениях производным $u(x,t)$ по x.

Несмотря на явное выражение операторов U и V, приведенных к модифицированному виду задачи Захарова–Шабата для уравнения $f[u]=0$, вопрос об интегрируемости методом обратной задачи рассеяния в целом остается открытым.

Автор выражает глубокую признательность д-ру физ.-мат. наук А. Г. Попову за полезные обсуждения работы.

Литература

1. *Sasaki R.* // Nucl. Phys. 1979. **B 154**. P. 343.
2. *Chern S.S., Tenenblat K.* // Studies in Appl. Math. 1986. **74**. P. 55.
3. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // ДАН. 1993. **332**, № 4. С. 418.
4. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Итоги науки и техники. Сер. Геометрия-2. 1994. С. 5.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М., 1986.
6. *Попов А.Г.* Методы геометрии Лобачевского в некоторых классах нелинейных задач математической физики: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1995.
7. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
8. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.

Поступила в редакцию
03.10.97