АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 532.5.013.4:536.24

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БУССИНЕСКА ДЛЯ АНАЛИЗА КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЫ

А. В. Уваров, А. И. Осипов

(*кафедра молекулярной физики и физических измерений*)

Проведен анализ полной системы гидродинамических уравнений, позволивший получить условия применимости приближения Буссинеска вблизи критического режима потери конвективной устойчивости. Показано, что сложная система неравенств сводится к простым критериям, определяемым в основном характерными размерами системы. Проанализированы встречающиеся в литературе критерии, которые приводят к неоправданному сужению области применения приближения Буссинеска. Найденные критерии использованы для оценки параметров реальных систем, для которых справедливо приближение Буссинеска.

Одна из основных проблем физической гидродинамики состоит в определении условий, при которых происходит смена режимов гидродинамического движения, сопровождающаяся структурной перестройкой.

К задачам такого типа относится переход ламинарного течения в турбулентное, образование вихрей Тейлора между двумя вращающимися цилиндрами, формирование ячеек Бенара или, в более общем случае, возникновение конвекции в неподвижной среде. Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости обычно рассматривается в приближении Буссинеска. В этом приближении жидкость считается несжимаемой, т. е. пренебрегается изменением плотности под влиянием изменения давления. Вместе с тем учитываются изменения плотности за счет неравномерного распределения температуры.

Условия, при выполнении которых уравнения Буссинеска можно получить из полной системы гидродинамических уравнений, подробно проанализированы в многочисленных работах, начиная с [1] (см. также обзоры [2–4]). С точки зрения практических приложений в этих работах отсутствуют ответы на два основных вопроса: к каким реальным системам и к каким процессам применимо приближение Буссинеска. В цитированных работах нет привязки к конкретным условиям, поэтому там сделаны дополнительные предположения о величине параметров, характеризующих как невозмущенную среду, так и возмущения.

Во всех работах, связанных с анализом применимости приближения Буссинеска, рассматриваются условия, накладываемые на среду, а не на сам процесс, хотя очевидно, например, что звуковые волны приближением Буссинеска не описываются. Это связано с тем, что для звуковых частот нельзя пренебрегать производной по времени по сравнению с производными по координате.

Целью работы является получение конкретных критериев, определяющих условия применимости приближения Буссинеска вблизи критического режима потери устойчивости. Показано, что часто встречающиеся в литературе критерии, основанные на малом изменении плотности за счет изменения давления (см., напр., [5]), приводят к неоправданно малым линейным размерам системы, где возможно применение приближения Буссинеска, причем это относится именно к жидкостям, а не к газам. Кроме того, получены конкретные оценки для характерных размеров системы и характерных времен процесса, при выполнении которых приближение Буссинеска работает.

1. Постановка задачи

Рассмотрим среду с известным уравнением состояния $\rho = \rho(p, T)$ (где ρ — плотность, p — давление, а T — температура газа). Уравнения непрерывности, движения и энергии для малых возмущений в линейном приближении в случае, когда основное состояние стационарно и скорость $\mathbf{v} = 0$, записываются в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \operatorname{grad} \rho = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k'}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}'\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi \operatorname{div} \mathbf{v}') + \rho' g L_i, \qquad (1)$$

$$c_p \rho \mathbf{v}' \operatorname{grad} T + c_p \rho \frac{\partial T'}{\partial t} + \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v}' \operatorname{grad} p\right) = \operatorname{div}(\lambda' \nabla T) + \lambda \Delta T',$$

где штрихами отмечены возмущенные величины, S — удельная энтропия, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, λ, η, ξ — коэффициенты теплопроводности, сдвиговой и объемной (второй) вязкости, $\mathbf{L}$ — единичный вектор, направленный вниз по оси z ($x_3 = z$).

Сравним систему (1) с аналогичной системой в приближении Буссинеска, которое в рассматриваемых условиях имеет вид (см., напр., [4]):

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0,$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\operatorname{grad} p' + \eta\Delta\mathbf{v}' - \beta T'\rho g\mathbf{L}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{v}'\operatorname{grad} T + \frac{\partial T'}{\partial t} = \chi\Delta T',$$

где $\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$ — коэффициент теплового расширения, $\chi = \lambda/c_p\rho$.

Отметим также, что система (2) дополняется условием малости изменения плотности во всем рассматриваемом объеме:

$$\Delta\rho_{\max}/\rho_{\min} \ll 1, \qquad (3)$$

где $\Delta\rho_{\max}$ — максимальная разность плотностей, $\rho_{\min}$ — минимальная плотность. Величина $\Delta\rho_{\max}$ определяется из уравнения состояния:

$$\begin{aligned}\Delta\rho_{\max} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \theta + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \Delta p_{\max} \equiv \\ \equiv -\beta\theta\rho + k_T\rho\Delta p_{\max},\end{aligned} \qquad (4)$$

где k_T — коэффициент изотермической сжимаемости, θ — максимальная разность температур, $\Delta p_{\max}$ — максимальное изменение давления в системе.

Целью работы является выяснение условий, при которых система (1) может быть сведена к системе (2) при выполнении (3).

2. Упрощение полной системы гидродинамических уравнений

Неравенство (3) будет выполнено при следующих ограничениях на изменение давления и температуры:

$$\epsilon_1 = |\beta\theta| \ll 1, \qquad (5)$$

$$\epsilon_2 = (k_T p)\frac{\rho g h}{p} \ll 1, \qquad (6)$$

где h — характерный линейный размер системы.

Перейти от уравнения движения в системе (1) к соответствующему уравнению (2) можно при условии, что возмущение плотности происходит в основном за счет возмущений температуры:

$$\rho'/\rho \gg k_T p'. \qquad (7)$$

Не следует путать величины возмущений с перепадом величин в стационарном режиме (T' и θ, p' и $\rho g h$).

В (7) и далее все штрихованные величины оцениваются по модулю.

Ключевую роль для оценок играет уравнение движения в системе (1). При достаточно малой величине производной $\partial\rho'/\partial t$ в уравнении непрерывности (1) это уравнение будет содержать только три компоненты скорости. Если в уравнении движения (1) последний член мал, то система, состоящая из уравнения непрерывности и трех уравнений движения, выделяется относительно переменных $\mathbf{v}'$, p' и можно показать, что такая система имеет только нулевое решение при нулевых граничных условиях для возмущений скорости. Аналогичная ситуация возникает и для класса решений, где можно пренебречь градиентами давления в уравнениях движения. В этом случае система из четырех уравнений выделяется по переменным $\mathbf{v}'$, ρ'.

Таким образом, будем рассматривать только класс решений, в котором в уравнениях движения члены с $\mathbf{v}'$, ρ' и p' одного порядка. В этом случае из уравнения движения (1) следует, что

$$p' \sim \rho' g h. \qquad (8)$$

Если использовать эту оценку в (7), получим неравенство (6).

Рассмотрим упрощение тех членов в уравнении движения, которые связаны с вязкостью. Пренебречь членами с производными по η можно, если

$$\left| h\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right| \ll \eta$$

или, с учетом того, что вязкость зависит в основном от температуры,

$$\left|\frac{\theta}{T}\frac{d\ln\eta}{d\ln T}\right| \ll 1. \qquad (9)$$

Если изменением η можно пренебречь, то член, связанный с вязкостью, может быть записан в виде [5] $(\eta/3+\xi)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}' + \eta\Delta\mathbf{v}'$ и в этом случае условие перехода к упрощенному уравнению движения состоит в малости вязкостных членов, связанных со сжимаемостью:

$$(\eta/3+\xi)|\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}'| \ll \eta|\Delta\mathbf{v}'|. \qquad (10)$$

Это условие, как и условие (9), подробнее рассмотрим ниже. Как отмечалось во введении, приближение Буссинеска накладывает ограничения в первую очередь на рассматриваемый процесс. Это видно из сравнения уравнений непрерывности в системах (1) и (2). Членом $\partial\rho'/\partial t$ можно пренебречь, если характерное время процесса τ достаточно велико.

Если величина $\omega\rho'$ ($\rho' \sim \exp(i\omega t)$) много меньше входящих в дивергенцию скорости членов в первом уравнении (1), т. е. если $\omega\rho'/\rho \ll v'_z/h$, то первым членом в уравнении непрерывности системы (1) можно пренебречь. Поскольку $\rho'/\rho \sim \beta T'$, то из уравнения движения (2) может быть получено ограничение на характерное время процесса

$$g\tau^2/h \gg 1. \qquad (11)$$

Это условие связано только с характеристикой самого процесса и ограничивает характерные частоты возмущений, которые могут рассматриваться. Второе условие перехода к уравнению непрерывности (2) — это малость члена $v'_z \operatorname{grad} \rho$ по сравнению со слагаемыми в $\rho \operatorname{div} \mathbf{v}'$, т.е. условие $\rho v'_z/h \gg v'_z \Delta\rho/h$, что сводится к неравенству (3).

Таким образом, упрощенное уравнение непрерывности в (3) справедливо при выполнении (11) и (3). Соответственно, справедливо и неравенство (10), хотя отдельные члены, входящие в левую часть (10), имеют тот же порядок, что и члены правой части, но они взаимно компенсируются. Изменением коэффициента λ в уравнении энергии (1) можно пренебречь, если

$$\left|\frac{\theta}{T}\frac{d\ln\lambda}{d\ln T}\right| \ll 1 \qquad (12)$$

(ср. с (9)). Второе неравенство

$$\left|\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \rho T \operatorname{grad} p\right| \ll |c_p \rho \operatorname{grad} T| \qquad (13)$$

позволяет пренебречь в уравнении энергии системы (1) членом, связанным с градиентом давления. Наконец, третье условие связано с возможностью пренебречь производной по времени от величины p':

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T p' \equiv -\frac{\beta \rho T}{p} p' \ll c_p \rho T'. \qquad (14)$$

Поскольку $\operatorname{grad} p \sim g\rho$, а характерное изменение температуры θ связано с критическим числом Рэлея

$$R_c = \frac{gh^3\beta\theta}{\chi\nu}, \qquad (15)$$

где $\nu = \eta/\rho$, то $|\operatorname{grad} T| \sim \theta/h = \chi\nu R_c/(gh^4\beta)$.

Величины p' и T' связаны соотношениями (7) и (8). С учетом (7), (8), (15), неравенства (9), (12)–(14) можно переписать в виде

$$\frac{\epsilon_1}{\beta T}\left|\frac{d\ln\lambda}{d\ln T}\right|, \qquad \frac{\epsilon_1}{\beta T}\left|\frac{dln\eta}{dlnT}\right|, \qquad (16)$$

$$\epsilon_2 \ll \epsilon_1 \frac{k_T p}{(\beta T)^2}, \qquad (17)$$

$$\epsilon_2 \ll \frac{k_T p}{(\beta T)^2}. \qquad (18)$$

Сразу можно отметить, что неравенство (17) при выполнении (5) существенно жестче, чем (18), т.е. при выполнении (5), если можно пренебречь в уравнении энергии градиентом давления, заведомо можно пренебречь и производной по времени от p'.

Таким образом, сформулирована система неравенств ((5), (6), (12), (16), (17)), при выполнении которых возможен переход к приближению Буссинеска. Проведем численные оценки.

3. Оценка условий применимости приближения Буссинеска

Условия (5), (6), (12), (16), (17) характеризуют среду, которая может быть описана в приближении Буссинеска. Рассмотрим их отдельно для газов и жидкостей.

Для газов $k_T p \sim 1$, $\beta T \sim 1$, $d\ln\lambda/d\ln T \sim 1$, $d\ln\eta/d\ln T \sim 1$, поэтому при выполнении неравенства (5) условия (16) выполняются автоматически. То есть без ухудшения точности приближения Буссинеска коэффициенты λ и η можно считать постоянными.

При выполнении (5) и (17) неравенство (6) в газе также автоматически выполняется, поэтому вся система неравенств сводится к двум:

$$\frac{\theta}{T} \ll 1, \qquad A_1 \equiv \frac{\rho g h}{p} \ll \frac{\theta}{T}. \qquad (19)$$

Вблизи критического режима величина θ связана с R_c соотношением (15), поэтому неравенство (5) может быть переписано в виде

$$\frac{gh^3}{\chi\nu} \gg R_c. \qquad (20)$$

Величина $R_c \sim 10^3$, коэффициенты χ и ν в газе порядка $c_s l_*$, где c_s — скорость звука, l_* — длина свободного пробега, т.е. $\chi\nu \sim T/\rho^2$. Таким образом, левая часть (20) пропорциональна $\rho^2 h^3/T$. При нормальных условиях в воздухе значение h ограничивается снизу величиной $\sim 10^{-3}$ м. С уменьшением плотности это значение растет, с увеличением — падает, зависимость от температуры менее существенна.

Второе неравенство в (19) может быть записано в виде

$$\frac{\rho g h}{p}\frac{gh^3}{\chi\nu} \ll R_c. \qquad (21)$$

Выполнение этого неравенства зависит от величины $\rho h^4/T^2$, т.е. в основном определяется размером h, но ограничения уже накладываются сверху. При нормальных условиях в воздухе уже при $h \sim 0,2$ м соотношение (21) перестает выполняться. В жидкостях диапазон изменения плотности гораздо меньше, поэтому роль h является определяющей. Отметим, что в жидкостях, в отличие от газов, условия (16) оказываются более жесткими, чем (5). Действительно, для воды при нормальных условиях $\beta T \sim 0,05$ (для органических соединений эта величина больше), при увеличении температуры для воды βT также увеличивается. Значение параметров $d\ln\lambda/d\ln T$ и $d\ln\eta/d\ln T$ в жидкостях примерно на порядок больше, чем в газах.

Неравенство (20), которое следует из (5) и (15), ограничивает h снизу величиной $\sim 10^{-4}$ м, которая слабо чувствительна к значению R_c. Увеличение правой части (20) на порядок лишь незначительно увеличивает предельную величину h. В жидкостях, как и в газах, при выполнении (5) и (17) выполняется и условие (7). Действительно, для воды при нормальных условиях величина $k_T p \sim 4 \cdot 10^{-5}$, в то время как значение $(\beta T)^2$ существенно больше. Верхнее значение h определяется неравенством (17), которое можно записать в виде

$$(\beta T)^2 \frac{\rho g h}{p} \frac{g h^3}{\chi \nu} \ll R_c. \qquad (22)$$

Зависимость левой части (22) от h очень сильная ($\sim h^4$) и при $h > 0,2$ м неравенство (22) перестает выполняться. Таким образом, как для газов, так и для жидкостей верхний предел размера системы h примерно одинаков, хотя критические значения разности температур существенно различаются. Очень часто [4, 5] в качестве одного из критериев применимости приближения Буссинеска используется условие малого изменения плотности в стационарном режиме за счет изменения давления по сравнению с изменением за счет температуры, т. е.

$$\epsilon_1 = |\beta\theta| \gg \epsilon_2 = k_T \rho g h. \qquad (23)$$

Это неравенство никак не связано с (7), поскольку относится к стационарному распределению параметров. В используемых обозначениях (23) можно переписать в виде

$$(k_T p) \frac{\rho g h}{p} \frac{g h^3}{\chi \nu} \ll R_c. \qquad (24)$$

Для газов, где $k_T p = 1$, неравенство (24) переходит в (21). В жидкостях ситуация совершенно другая. Поскольку $(\beta T)^2 \gg k_T p$, то при выполнении (18) и, следовательно, (22) неравенство (23) заведомо выполняется. То есть реальные условия применимости жестче, чем следует из неравенства (23). Однако самое существенное состоит в том, что условие (23) не используется при выводе приближения Буссинеска.

Интервал h можно сильно расширить, если не исключать градиент давления. Тогда вместо члена $\mathbf{v}' c_p \operatorname{grad} T$ в уравнении энергии будет стоять $c_p \mathbf{v}' \operatorname{grad} T + \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \mathbf{v}' \operatorname{grad} p = \mathbf{v}'(c_p \rho \operatorname{grad} T - \beta T \operatorname{grad} p)$. Решение такой задачи, например, для плоского слоя, ничем не будет отличаться от решения классической задачи, изменится только число Рэлея [6]:

$$R^* = \frac{\beta g h^4}{\chi \nu} \left(\frac{dT}{dz} - \frac{\beta T}{c_p \rho} \frac{dp}{dz} \right). \qquad (25)$$

Как видно из (25), градиент давления, поскольку он направлен в ту же сторону, что и градиент температуры, стабилизирует систему, препятствуя возникновению конвекции, и необходимо дополнительное увеличение разности температур, чтобы достичь критического числа Рэлея. Следует, однако, отметить, что хотя неравенство (24) заметно увеличивает значение h, но это увеличение существенно уменьшает критические значения θ (см. (15)).

Основные результаты

1. На основе анализа полной системы гидродинамических уравнений показано, что приближение Буссинеска применимо для описания процессов с большими характерными временами.

2. Критерии, определяющие применимость приближения Буссинеска для описания критического режима, наиболее сильно зависят от характерных размеров системы, ограничивая его сверху и снизу. Верхний предел практически совпадает для жидкостей и газов. Нижний предел в жидкостях меньше.

3. Часто встречающийся в литературе критерий, связанный с тем, что изменения плотности из-за неоднородности давления малы по сравнению с изменениями, обусловленными неоднородностью температур, не является обязательным, поскольку он не используется при выводе приближения Буссинеска.

Публикуемые исследования были проведены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00750).

Литература

1. *Mihaljan J.M.* // Astrophys. J. 1962. **136**, No. 3. P. 1126.
2. *Cordon R.P., Velarde M.G.* // J. de Physique. 1975. **36**, No. 7–8. P. 591.
3. *Velarde M.G., Cordon R.P.* // Ibid. 1976. **37**, No. 3. P. 177.
4. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1986.
6. *Jeffreys H.* // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1930. **26**. P. 170.

Поступила в редакцию
24.09.97