ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Оценивание нечетких элементов и параметров их распределений

Ю. П. Пытьев

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Рассматриваются методы оптимального оценивания нечетких элементов и параметров их распределений, основанные на минимизации возможности и (или) необходимости ошибки оценивания.

Введение

В последние два десятилетия внимание исследователей, работающих в различных предметных областях, привлекают проблемы оптимизации оценивания и принятия решений в нечеткой обстановке, при нечетких целях и предпочтениях, при нечетких ограничениях и множествах альтернатив. Исследованы нечеткие варианты теории игр, математического программирования, теории полезности и т. д. (см., напр., [1–6]).

В предлагаемой работе рассматриваются методы оптимизации оценивания нечетких элементов и параметров их распределений, основанные на минимизации возможности (или/и необходимости) ошибки оценивания. Изложение следует схемам, принятым в теориях статистических решений и статистического оценивания [7, 8].

1. Оценивание нечеткого элемента

Рассмотрим задачу оценивания ненаблюдаемого нечеткого элемента $\xi \in X$ [9], в которой требуется указать «четкий» элемент $\tilde{X}$, значение которого можно считать в известном смысле наилучшей оценкой ξ. Например, одна из простейших оценок нечеткого элемента $\xi \in X$ — наиболее возможное его значение $x_\xi \in \tilde{X} = X$, выбираемое из множества $^{*)}$

$$\left\{x \in X,\ \varphi^\xi(x) = \max_{y\in X} \varphi^\xi(y)\right\} =$$
$$= \left\{x \in X,\ P^\xi(\{x\}) = \max_{y\in X} P^\xi(\{y\})\right\}.$$

Рассмотрим класс методов оптимального оценивания, основанных на понятии нечеткого отношения погрешности $(X \times \tilde{X},\ l(\cdot,\cdot))$, в котором $l(x,y)$ — возможность ошибки, обусловленной заменой $x \in X$ в равенстве $\xi = x$ на $y \in \tilde{X}$ (аналог величины ошибки)$^{**)}$. При фиксированном $y \in \tilde{X}$ речь идет о нечетком множестве $(X, l(\cdot, y))$[11], возможность ошибки отождествляется с возможностью $l(x,y)$ включения $x \in X$ в это множество [12].

Оценивание ξ при известном распределении. Если $\varphi^\xi(x)$, $x \in X$, — распределение возможностей значений нечеткого элемента $\xi \in X$, то интеграл $l(\cdot, y)$ по P^ξ

$$L(y) = \sup_{x\in X} \min(\varphi^\xi(x), l(x,y)), \quad y \in \tilde{X}, \tag{1}$$

есть возможность включения ξ в нечеткое множество $(X, l(\cdot, y))$[9], зависящее от $y \in \tilde{X}$, и, следовательно, — возможность ошибки, обусловленной выбором $y \in \tilde{X}$ как значения нечеткого элемента $\xi \in X$, — в качестве его оценки.

О п р е д е л е н и е 1. P-оптимальной оценкой ξ назовем любой элемент $y_* \in \tilde{X}$, для которого возможность ошибки (1) минимальна: $L(y_*) = \min\limits_{y\in\tilde{X}} L(y)$.

Согласно выражению (1) для $L(\cdot)$ y_* определяется так, чтобы для всякого $x \in X$ была мала возможность $\varphi^\xi(x)$ значения $\xi = x$, для которого возможность $l(x, y_*)$ ошибки велика, и наоборот — чтобы была мала возможность ошибки $l(x, y_*)$, отвечающей значению $\xi = x$, возможность которого $\varphi^\xi(x)$ велика. Качество P-оптимальной оценки y_* определяется величиной $L(y_*)$ возможности ошибки оценивания нечеткого элемента ξ значением y_*.

Пусть на $X = \tilde{X}$ задана топология, $l_\Delta(x,y) = 0$ при $x \in \Delta(y)$, $l_\Delta(x,y) = 1$ при $x \in X\backslash\Delta(y)$, где $\Delta(y)$ — замкнутая окрестность $y \in X$, такая, что для каждого $x \in X$ найдется $y \in X$, при котором $x \in \Delta(y)$. Если при $l(\cdot,\cdot) = l_\Delta(\cdot,\cdot)$ задача $L(y) \sim \min\limits_{y\in X}$ разрешима, то $\Delta(y_*)$, очевидно, содержит x_ξ — наиболее возможное значение ξ, и если последнее единственно, то $y_* \to x_\xi$ при $\Delta(y_*) \to \{y_*\}$. Так как при этом $l_\Delta(x,y) \to l_0(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = y \\ 1 \text{ при } x \neq y \end{cases}$, то далее, говоря об оценке $y_* = x_\xi$ максимальной возможности, будем считать, что она получается минимизацией

$^{*)}$ В этой работе возможность $P(\cdot)$ считается продолженной на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X [10].

$^{**)}$ Например, $l(x,y) = (2/\pi)\mathrm{arctg}(\varepsilon^2(x-y)^2)$, или $l(x,y) = \min(1, (x-y)^2)$, если $X = \tilde{X} = (-\infty, \infty)$.

$L(y)$ (1) при $l(\cdot,\cdot)=l_0(\cdot,\cdot)$, имея в виду рассмотренный предельный переход.

Согласно определению интеграла по необходимости, данному в работе [13],

$$M(y)=\neg\sup_{x\in X}\min(\varphi^\xi(x),\neg l(x,y))=\neg p_\varphi(\neg l(\cdot,y))=$$

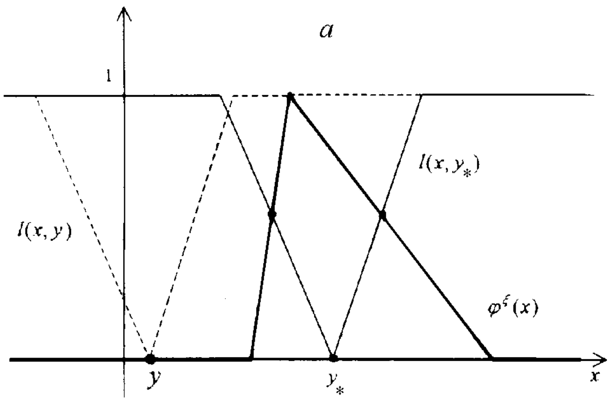
$$=\inf_{x\in X}\max(\neg\varphi^\xi(x),l(x,y))=n_{\neg\varphi}(l(\cdot,y)), \quad (2)$$

— необходимость ошибки, сопутствующей выбору $y\in\tilde X$ как оценки ξ.

Определение 1*. N-оптимальной оценкой ξ назовем любой элемент $y^*\in\tilde X$, минимизирующий необходимость ошибки (2): $M(y^*)=\min\limits_{y\in\tilde X}M(y)$; величина $M(y^*)$ определяет качество N-оптимальной оценки.

Значение $y^*\in\tilde X$ определяется так, чтобы для некоторых $x\in X$ были малы как необходимость $\neg\varphi^\xi(x)$ неравенства $\xi\neq x$ (или велика возможность равенства $\xi=x$), так и возможность ошибки $l(x,y^*)$.

Пусть для любого $x\in X$ $\inf\limits_{y\in\tilde X}l(x,y)=0$ и достигается при $y\in\tilde X(x)$. Тогда $\inf\limits_{y\in\tilde X}M(y)=$ $=\inf\limits_{x\in X}\max(\neg\varphi^\xi(x),\inf\limits_{y\in\tilde X}l(x,y))=\inf\limits_{x\in X}\neg\varphi^\xi(x)=0$ и если $\max\limits_{x\in X}\varphi^\xi(x)=1$ достигается при $x\in X^\xi\subset X$,



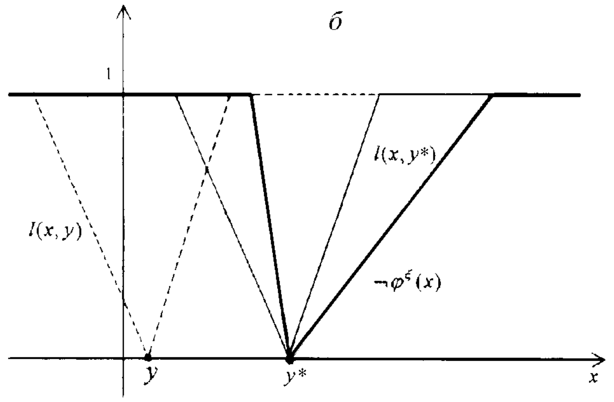


Рис. 1. P- и N-оптимальные оценки при $l(x,y)=\min(|x-y|,1), x,y\in X=\tilde X=(-\infty,\infty)$: решение y_* задачи $L(y)\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$ (*а*) и решение y^* задачи $M(y)\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$ (*б*)

то N-оптимальной оценкой будет любой элемент $y^*\in\bigcup\limits_{x\in X^\xi}\tilde X(x)$, для которого $M(y^*)=0$.

Если, в частности, в (2) $X=\tilde X, l(x,y)=l^0(x,y)=$ $=\begin{cases}0 & \text{при } x=y\\ >0 & \text{при } x\neq y\end{cases}$, $x,y\in X$, то $\min\limits_{y\in\tilde X}M(y)=$ $=\inf\limits_{x\in X}\max(\neg\varphi^\xi(x),\min\limits_{y\in\tilde X}l^0(x,y))=\inf\limits_{x\in X}\neg\varphi^\xi(x)=0$ и достается при $y=y^*=x_\xi\in X^\xi$, т.е. N-оптимальной оценкой ξ при $l(\cdot,\cdot)=l^0(\cdot,\cdot)$ является оценка максимальной возможности.

Поскольку решения задач $L(y)\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$ и $M(y)\sim$ $\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$ могут и не совпадать (рис. 1), представляет интерес параметрический класс $\mathcal K$ Парето — оптимальных оценок, определяемых как решения семейства задач $\max(\varepsilon L(y),(1-\varepsilon)M(y))\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$. Класс $\mathcal K$, очевидно, содержит N- и P-оптимальные оценки, если таковые существуют. Если

$$\begin{aligned}&\max(p_\varphi(l(\cdot,y)),p_\varphi(\neg l(\cdot,y)))=\\&=p_\varphi(\max(l(\cdot,y),\neg l(\cdot,y)))=1,\quad y\in\tilde X,\end{aligned}\quad (3)$$

то $L(y)\geqslant M(y)$, так как в силу условия (3) $p_\varphi(l(\cdot,y))\geqslant$ $\geqslant\neg p_\varphi(\neg l(\cdot,y))$, и более того,

$$M(y)=n_{\neg\varphi}(l(\cdot,y))>0\Rightarrow p_\varphi(l(\cdot,y))=L(y)=1,$$

$$L(y)=p_\varphi(l(\cdot,y))<1\Rightarrow n_{\neg\varphi}(l(\cdot,y))=M(y)=0,$$

поскольку, согласно (2), $n_{\neg\varphi}(l(\cdot,y))+p_\varphi(l(\cdot,y))=1$, $y\in\tilde X$. В этом случае класс $\mathcal K$ устроен достаточно просто. А именно, если $\min\limits_{y\in\tilde X}L(y)<1$, то $\mathcal K$ совпадает с множеством решений задачи $L(y)\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$, поскольку на последнем $M(y)=0$. Если же $\min\limits_{y\in\tilde X}L(y)=1$, то $\mathcal K$ состоит из решений задачи $M(y)\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$.

Оценивание ξ при неизвестном распределении. Если распределение $\varphi^\xi(\cdot)$ неизвестно, то оценка может быть определена как решение задачи на минимакс $\sup\limits_{x\in X}l(x,y)\sim\min\limits_{y\in\tilde Y}$. Такая оценка минимизирует максимальную возможность ошибки и является решением задачи $L(y)\sim\min\limits_{y\in\tilde X}$ при $\varphi^\xi(x)=1$, $x\in X$, в (1). Ясно, что в этом случае возможность ошибки не меньше, чем при любом известном распределении $\varphi^\xi(\cdot)$; в этом смысле распределение $\varphi^\xi(x)=1, x\in X$, следует считать наименее благоприятным. Вместе с тем при этом распределении необходимость ошибки оценивания ξ произвольным элементом $y\in\tilde X$ $M(y)=\inf\limits_{x\in X}l(x,y)$ не больше, чем при любом другом (известном) распределении ξ. Дело в том, что когда

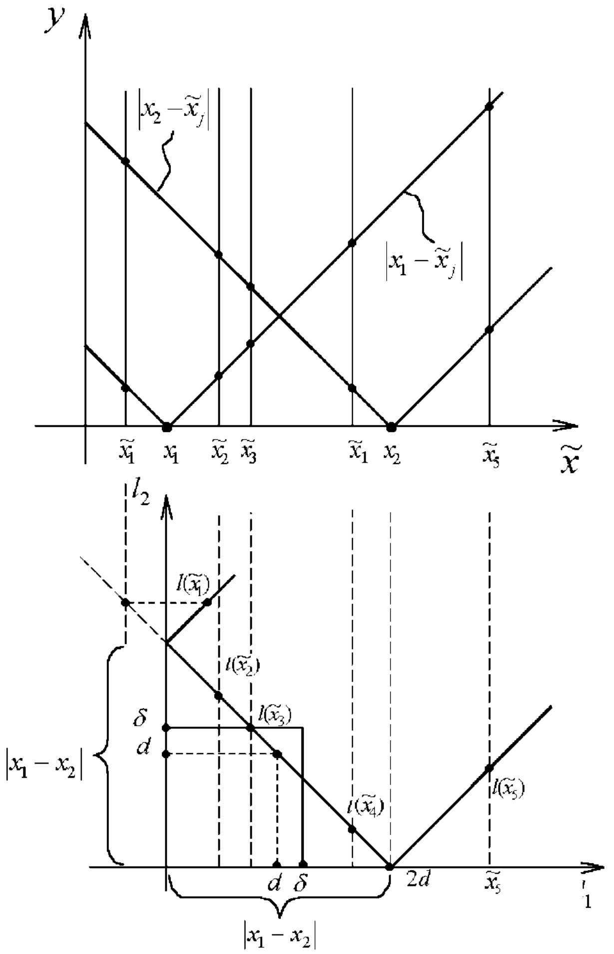


Рис. 2. Значения ξ и значения оценки ξ; графики $|x_1 - \tilde{x}|$ и $|x_2 - \tilde{x}|$ как функции $\tilde{x}$. Точка $l(\tilde{x}_j)$ на нижнем рисунке имеет координаты $l_1(\tilde{x}_j)$ и $l_2(\tilde{x}_j)$, $j = 1, 2, \dots, 5$

все значения $\xi \in X$ равновозможны, любое утверждение $\xi = y$ нельзя считать непременно ошибочным.

Рандомизация оценивания. Как при известном, так и при неизвестном распределении возможностей значений ξ, оценки, рассмотренные в предыдущих пунктах, могут быть в известном смысле улучшены, если задача оценивания должна решаться многократно. В таком случае рандомизированная стратегия оценивания позволит уменьшить возможность ошибки в среднем.

Пусть, например, $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m\}$ — множество значений оценки ξ. Рандомизированная стратегия оценивания сводится к выбору в качестве оценки ξ значения $\tilde{x}_j$ с вероятностью p_j, $j = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$. P-оптимальную рандомизированную стратегию определим условием

$$\mathbf{E}L(\cdot) = \sum_{j=1}^{m} L(\tilde{x}_j)p_j \sim \min_{p}, \quad p = (p_1, \dots, p_m),$$

согласно которому она обеспечивает минимальность средней возможности ошибки; $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания.

Ограничимся анализом примера, в котором ξ принимает два значения: x_1 и x_2, $\varphi^{\xi}(x_1) = \varphi^{\xi}(x_2) = 1$, $X = \{x_1, x_2\}$. Оценка ξ должна выбираться из множества $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_5\}$, возможность ошибки определяется равенством $l(x_i, \tilde{x}_j) = \min(|x_i - \tilde{x}_j|, 1)$, $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, 5$. Обозначим $l(x_i, \tilde{x}_j) = l_i(\tilde{x}_j)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 5$, и обратимся к геометрической иллюстрации задачи оценивания. Как видно из рис. 2, P-оптимальная рандомизированная стратегия оценивания предписывает в качестве оценки ξ использовать $\tilde{x}_3$ с вероятностью p_3, $\tilde{x}_4$ с вероятностью p_4 и определяется условиями

$$p_4 l_1(\tilde{x}_4) + p_3 l_1(\tilde{x}_3) = p_4 l_2(\tilde{x}_4) + p_3 l_2(\tilde{x}_3), \quad p_3 + p_4 = 1,$$

обеспечивающими минимальность средней возможности ошибки. Последняя равна $d = |x_1 - x_2|/2$, в то время как P-оптимальная оценка $\tilde{x}_3$ гарантирует возможность ошибки $\delta > d$.

Оценивание с учетом результата наблюдения. Теперь рассмотрим задачу, в которой требуется оценить (ненаблюдаемый) нечеткий элемент $\eta \in Y$, используя значение (наблюдаемого) нечеткого элемента $\xi \in X$. Речь идет об определеннии стратегии $d(\cdot) : X \to \tilde{Y}$ оценивания, позволяющей каждому значению $\xi = x \in X$ поставить в соответствие значение $y = d(x) \in \tilde{Y}$ в качестве оценки η.

Пусть $\xi, \eta \in X \times Y$ — пара нечетких элементов, $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$ — их распределение, $(Y \times \tilde{Y},\ l(\cdot,\cdot))$ — нечеткое отношение погрешности. P-оптимальную оценку $\hat{\eta}_* = d_*(\xi)$, минимизирующую возможность ошибки, определим из условия

$$L(d(\cdot)) = \sup_{x,y \in X \times Y} \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y, d(x)) \sim \min_{d(\cdot): X \to \tilde{Y}} . \tag{4}$$

Функция $d_*(\cdot) : X \to \tilde{Y}$, удовлетворяющая условию (4): $L(d_*(\cdot)) = \min\limits_{d(\cdot): X \to \tilde{Y}} L(d(\cdot))$, задает P-оптимальную стратегию оценивания η по наблюдению ξ.

Т е о р е м а 1. 1) *Нечеткий элемент $d_*(\xi)$ — P-оптимальная оценка η, если $d = d_*(x)$ является решением следующей задачи на минимум для условной возможности* [12] *ошибки при условии $\xi = x$:*

$$L(d|x) = \sup_{y \in Y} \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), l(y,d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}, \quad x \in X; \tag{5}$$

2) *нечеткий элемент $d_*(\xi)$ — P-оптимальная оценка η, если и только если $d_*(x)$ является решением следующей задачи на минимум:*

$$L(d,x) = \sup_{y \in Y} \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}, \quad x \in X. \tag{5*}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть минимум в (5) достигается при $d = d_* = d_*(x)$. Так как согласно определению условного распределения η при условии $\xi = x$ имеет место равенство $\min\left(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^{\xi}(x)\right) = \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$,

$y \in Y$, [9], то

$$\sup_y \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d_*)) =$$
$$= \min(\varphi^{\xi}(x), \sup_y \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), l(y,d_*))) \leqslant$$
$$\leqslant \min(\varphi^{\xi}(x), \sup_y \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), l(y,d))) =$$
$$= \sup_y \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d)),$$

$d \in \tilde{Y}$, и, следовательно, $d_* = d_*(x) \in \tilde{Y}$ — точка минимума и для $\sup_y \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d))$, $d \in \tilde{Y}$. Поэтому

$$\min_{d(\cdot)} \sup_{x,y} \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d(x))) \geqslant$$
$$\geqslant \sup_x \min_{d(\cdot)} \sup_y \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d(x))) =$$
$$= \sup_{x,y} \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d_*(x))),$$

т. е. $d_*(\cdot)$ — P-оптимальная стратегия, решение задачи (4). Эти же соотношения доказывают второе утверждение. ■

Аналогичный результат имеет место для N-оптимальной стратегии $d^*(\cdot)\colon X \to \tilde{Y}$, минимизирующей необходимость

$$M(d(\cdot)) = \inf_{x,y \in X \times Y} \max(\neg\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d(x))) \quad (4^*)$$

ошибки оценивания нечеткого элемента $\eta \in Y$ посредством $d(\xi)$.

Т е о р е м а 1*. 1) *Нечеткий элемент $d^*(\xi)$ — N-оптимальная оценка η, если $d^*(\cdot)$ — решение задачи на минимум для условной необходимости ошибки*

$$M(d|x) = \inf_{y \in \tilde{Y}} \max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), l(y,d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}$$

при условии $\xi = x \in X$;
2) *нечеткий элемент $d^*(\xi)$ — N-оптимальная оценка η, если и только если $d^*(x)$ — решение задачи на минимум*

$$M(d,x) = \inf_{y \in \tilde{Y}} \max(\neg\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}, \quad x \in X.$$

Доказательство может быть получено по схеме доказательства теоремы 1, если воспользоваться следующим выражением для $M(d(\cdot))$ (4*):

$$M(d(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(M(d(x)|x), \neg\varphi^{\xi}(x)) =$$
$$= \inf_{x \in X} \max(\neg\varphi^{\xi}(x), \inf_{y \in Y} \max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), l(y,d(x)))),$$

основанным на равенстве

$$\neg\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \neg\varphi^{\xi}(x)),$$

эквивалентном равенству

$$\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^{\xi}(x)),$$

определяющему условное распределение $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, $x \in X$, $y \in Y$, [9]. ■

З а м е ч а н и е. Если значение ξ неизвестно, то P-оптимальная оценка нечеткого элемента η должна быть основана на его (априорном) распределении $\varphi^{\eta}(y) = \sup_{x \in X} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $y \in Y$. В таком случае качество P-оптимальной оценки η будет, вообще говоря, хуже, поскольку

$$\sup_y \min(\varphi^{\eta}(y), l(y,d)) \geqslant \sup_y \min(\varphi^{\xi,\eta}(x,y), l(y,d)),$$
$$d \in \tilde{Y}, \quad x \in X.$$

С другой стороны, если нечеткие элементы ξ и η независимы, то знание значения ξ не улучшает оценку η, поскольку в этом случае в (5)

$$\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\eta}(y), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

2. Оценивание параметра распределения нечеткого элемента

Пусть $\varphi^{\xi}(x,t)$, $x \in X$, — распределение нечеткого элемента $\xi \in X$, зависящее от (неизвестного) параметра $t \in T$, $(T \times \tilde{T}, l(\cdot,\cdot))$ — нечеткое отношение погрешности, заданное на множестве значений параметра и его оценки. В задаче оценивания по известному значению x нечеткого элемента ξ требуется оценить значение параметра t.

О п р е д е л е н и е 2. Нечеткий элемент $\hat{\tau} = d_*(\xi)$ назовем P-оптимальной оценкой параметра $t \in T$, а функцию $d_*(\cdot)\colon X \to \tilde{T}$ — P-оптимальной стратегией оценивания, если

$$L(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot): X \to \tilde{T}} L(d(\cdot)), \quad (6)$$

где

$$L(d(\cdot)) = \sup_{t \in T} \sup_{x \in X} \min(\varphi^{\xi}(x,t), l(t,d(x))). \quad (7)$$

В данном случае $L(d(\cdot))$ — максимальная по $t \in T$ возможность $\sup_{x \in X} \min(\varphi^{\xi}(x,t), l(t,d(x)))$ включения нечеткого элемента ξ в нечеткое множество $(X, l(t,d(\cdot)))$, зависящее от $t \in T$ и стратегии $d(\cdot)$. В свою очередь возможность включения ξ в это нечеткое множество есть возможность ошибки оценивания $t \in T$ нечетким элементом $d(\xi) \in T$.

Оценка $d_*(\xi)$ гарантирует минимальность максимальной по $t \in T$ возможности $L(d(\cdot))$ ошибки оценивания неизвестного параметра $t \in T$ значением нечеткого элемента $d_*(\xi) \in \tilde{T}$. Формально эта задача не отличается от задачи (4).

Более того, и по сути параметр $t \in T$ распределения $\varphi^{\xi}(\cdot,t)$ нечеткого элемента $\xi \in X$ естественно обретает черты нечеткого элемента $\tau \in T$, поскольку при $\xi = x$ возникает вопрос о *возможных* его (параметра) значениях.

Если, например, $\xi = t + \nu$, $\varphi^{\nu}(\cdot)$ — распределение $\nu \in X = T$, то при $\xi = x$ значение $\varphi^{\nu}(x - t)$ естественно считать возможностью того, что t — значение параметра распределения ξ, т.е. возможностью равенства $\tau = t \in X$. Вслед за этим возникает вопрос и о том, что известно о параметре $t \in T$ априори, до измерения ξ. Можно, например, задать априорное распределение $\varphi^{\tau}(\cdot)$, причем, если $\varphi^{\tau}(t) = 1$, $t \in T$, то априори все значения параметра считаются одинаково возможными. Если придерживаться этой точки зрения на параметр распределения, то $\varphi^{\xi}(\cdot, t)$ следует считать условным распределением $\varphi^{\xi|\tau}(\cdot|t)$ нечеткого элемента $\xi \in X$ при условии $\tau = t \in T$. Поскольку распределение $\varphi^{\xi,\tau}(x,t) = \min(\varphi^{\xi|\tau}(x|t), \varphi^{\tau}(t)) = \min(\varphi^{\tau|\xi}(t|x), \varphi^{\xi}(x))$, $\quad x, t \in X \times T$, при $\varphi^{\tau}(t) = 1$, $t \in T$, совпадает с $\varphi^{\xi|\tau}(x|t) = \varphi^{\xi}(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$, то в этом случае задача (6), (7) совпадает с задачей (4), ее решение определяется условным распределением $\varphi^{\tau|\xi}(\cdot|\cdot)$ и дано в теореме 1.

Очевидно, что P-оптимальная стратегия $d_*(\cdot)$ определяется как решение задачи на минимум $\sup\limits_{t\in T} \min(\varphi^{\xi}(x,t), l(t,d)) \sim \min\limits_{d\in\tilde{T}}$, зависящее от $x \in X$ как от параметра.

Если, в частности, $T = \tilde{T}$, $l(t,d) = l_0(t,d)$, $t, d \in T$, то с учетом оговоренной выше условности P-оптимальная стратегия определяется решением уравнения $\varphi^{\xi}(x, d_*(x)) = \max\limits_{t\in T} \varphi^{\xi}(x,t)$, $\quad x \in X$. Нечеткий элемент $d_*(\xi)$ можно назвать оценкой максимальной возможности параметра распределения, поскольку возможность $\varphi^{\xi}(x,t)$ равенства $\xi = x$ максимальна при $t = d_*(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081) и программы ISSEP (грант p97-170).

Литература

1. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. М., 1981.
2. Вопросы анализа и процедуры принятия решений / Под ред. И. Ф. Шахнова. М., 1976.
3. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М., 1986.
4. Методы принятия решений в условиях неопределенности. Рига, 1980.
5. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., 1976.
6. *Bellman K., Kalaba R., Zadeh L.* // J. Math. Analysis and Appl. 1966. **13**. P. 1.
7. *Леман Э.* Теория точечного оценивания. М., 1991.
8. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
9. *Пытьев Ю.П.*// Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 2. P. 1).
10. *Пытьев Ю.П.*.// Там же. № 1. С. 3 (Ibid. No. 1. P. 1).
11. *Zadeh L.A.*// Information and Control. 1965. **8**. P. 335.
12. *Пытьев Ю.П.*.// Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 6. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 6. P. 1).
13. *Пытьев Ю.П.*// Там же. N 4. С.3 (Ibid. No. 4. P. 1).

Поступила в редакцию
05.11.97